

Non-perturbative aspects of elementary particle physics

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/45394

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



博士論文

素粒子物理学の非摂動的側面

金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻
物理学講座

学籍番号	1323102009
氏名	山田 雅俊
主任指導教員名	青木 健一

目次

第 1 章	序論	4
第 2 章	非摂動くりこみ群	7
2.1	非摂動くりこみ群方程式	7
2.2	ゲージ対称性とくりこみ群	19
第 3 章	カイラル対称性の自発的破れ	23
3.1	量子色力学	23
3.2	カイラル対称性の基本	25
3.3	QCD におけるカイラル対称性の破れ	27
3.4	Nambu–Jona-Lasinio 模型	28
3.5	くりこみ群によるカイラル対称性の自発的破れの解析	29
3.6	章のまとめ	38
第 4 章	電弱対称性の破れの起源と標準模型の拡張	42
4.1	電弱対称性の破れの起源と階層性問題	42
4.2	Bardeen の議論と古典的スケール不変性	45
4.3	隠れたセクターと標準模型	49
4.4	有効模型	50
4.5	暗黒物質の候補	55
4.6	電弱 1 次相転移	60
4.7	章のまとめ	69
第 5 章	漸近的に安全な量子重力	70
5.1	漸近的安全性とは	71
5.2	重力場の量子化	74
5.3	非最小結合を伴う Higgs–Yukawa 模型	77
5.4	くりこみ群方程式	83
5.5	数値計算	89
5.6	漸近安全な量子重力と階層性問題	94
5.7	章のまとめ	95

付録 A	記法と公式	97
A.1	ユークリッド化	97
A.2	Clifford 代数	98
A.3	Fierz 変換	99
A.4	リー代数	100
付録 B	超行列の演算	104
付録 C	曲がった空間上の場の理論	108
C.1	リーマン幾何	108
C.2	時空積分の測度	110
C.3	スカラー場	111
C.4	スピノル場	111
C.5	ゲージ場	113
付録 D	熱核展開	114
付録 E	量子統計	116
付録 F	ベータ関数の導出	117
F.1	Nambu–Jona-Lasinio 模型	117
F.2	漸近的に安全な量子重力と非最小結合する Higgs–Yukawa 模型	120
付録 G	熱効果	130
G.1	熱効果関数	130
	参考文献	136

第 1 章

序論

現在の素粒子物理学において、粒子間に働く力として電磁気力、重力、強い力、弱い力が知られている。その中、電磁気力と弱い力はゲージ群 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ に基づくゲージ理論によって統一的に記述される。これは Weinberg-Salam 理論または電弱理論と呼ばれている [1, 2]。また、強い力はゲージ群 $SU(3)_c$ に基づくゲージ理論で、量子色力学 (QCD) と呼ばれている。電弱理論と量子色力学を合わせた理論体系は標準模型と呼ばれている。標準模型は TeV までの素粒子物理現象を非常によく記述している。さらに、2012 年、CERN の巨大ハドロン加速器 (LHC) による実験により、新しいボゾンが発見された [3, 4]。その質量は現在

$$m = 125.09 \pm 0.24 \text{ GeV} \quad (1.1)$$

である [5]。これは標準模型が予言していた Higgs 粒子であるとして矛盾がない。したがって、発見された粒子は Higgs 粒子と考えられ、この発見をもって標準模型は完成した。

しかし、標準模型では説明がつかない現象がいくつもある。ここに代表的なものを挙げると

- ニュートリノの質量
- 暗黒物質の存在
- バリオン数
- 電弱スケールの起源
- 階層性問題
- 大統一理論 (GUT)
- 量子重力 etc...

簡単にこれらの問題についてコメントしておく。標準模型では、ニュートリノは左巻き粒子のみが導入されており、Dirac 質量項 $\bar{\psi}\psi$ は構成されず、質量はゼロの粒子と定義されている。しかし、ニュートリノ振動の観測 [6, 7, 8, 9] を通してニュートリノには質量があることが証明された。したがって、ニュートリノに質量を与える何らかの機構が必要である。また、質量項として Dirac 質量項 $\bar{\psi}\psi$ もしくは Majorana 質量項 $\psi^c\psi$ の 2 つが可能であり、ニュートリノがどのような質量項を持つのかはまだわかっていない。これには $\nu \neq 0 2\beta$ 崩壊 (neutrino less double beta decay) の観測が期待されている。そのような崩壊が観測がされればニュートリノは Majorana 質量を持つ粒子とわかる。しかしながら、まだその観測には至っていない。

暗黒物質は宇宙における銀河の回転速度 [10] や弾丸銀河団の重力レンズ効果 [11]、そして CMB の温

度ゆらぎ [12] などの観測によりその存在が示唆されている。暗黒物質とは電荷やカラー荷を持たない非相対論的な物質のことである。現在の観測によるとその残存量は

$$\Omega_{\hat{h}} = 0.1198(26) \quad (1.2)$$

となっている [5]。このような性質をもつような標準模型の粒子としてニュートリノがあるが、これは観測による残存量を説明できない。したがって、標準模型では説明がつかず、未知の粒子が存在していると考えられている。

宇宙にはバリオン (粒子) が残っており、反バリオン (反粒子) はほぼ消えてしまっている。現在のバリオン数密度は

$$n_b = 2.482(32) \times 10^{-7} \text{ cm}^{-3} \quad (1.3)$$

これは、なんらかの相互作用によってバリオンと反バリオンの非対称性が生まれ、現在の宇宙のバリオン数が作られなければならないことを意味する。しかし、標準模型の枠組みでは観測されているほどの非対称性を生むことはできない。

標準模型の対称性の中、電弱対称性は Higgs 粒子が真空期待値を持つことで破れ、それに伴って粒子は質量を獲得する。しかし、Higgs 粒子が真空期待値を得る機構は明確ではない。すなわち、電弱対称性が破れるスケール Λ_{EW} の起源はどこから来るのであろうか。また、物理を特徴付けるスケールとして電弱スケール Λ_{EW} と量子重力の効果が現れるプランク・スケール Λ_{planck} が存在する。その大きさは $\Lambda_{\text{EW}} \sim \mathcal{O}(10^2) \text{ GeV}$ に対し、 $\Lambda_{\text{planck}} \sim \mathcal{O}(10^{19}) \text{ GeV}$ であり、約 $\mathcal{O}(10^{17}) \text{ GeV}$ もの差がある。この間には他に理論を特徴付けるスケールは存在しないのであろうか。この問題は階層性問題と呼ばれている。もし、存在するとするならば、その 1 つは大統一理論を特徴付けるスケールがある。電磁気力と弱い力は $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ のゲージ理論で記述されるが、量子色力学は独立に $\text{SU}(3)_c$ のゲージ理論で記述されている。これらをさらに統一的に記述する理論が大統一理論 (GUT) である。GUT は少なくとも $\text{SU}(3)_c \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ のゲージ群を持つより大きなゲージ群で記述される。その候補として $\text{SU}(5)$ や $\text{SO}(10)$ などのゲージ理論が考えられてきたが、それらは陽子崩壊を预言している。しかし、陽子は安定な粒子であり、理論が预言する寿命よりも長いため、うまくいっていない。陽子崩壊が観測されれば GUT への手がかりとなるであろう。

最初に述べたように標準模型では知られている 4 つの力の中、3 つ (電磁気力、弱い力、強い力) の量子論を与えている。しかし、重力の量子論、すなわち量子重力の構築は大きな問題の 1 つである。低エネルギーの重力の物理現象はアインシュタインの一般相対性理論によって説明することができる。しかし、その量子論はくりこみ不可能な理論となることが知られている。したがって、理論の预言力は大きく落ちてしまう。

一方、QCD においても難しい問題が残っている。理論の強い力学のため、クォークはハドロンを作っており、そこでは非自明な物理現象が起っていると思われる。例えば、クォークの閉じ込めやカイラル対称性の自発的破れなどが挙げられる。しかし、強い相互作用では摂動論が使えず、解析には非摂動的な手法が必要となる。これまでの研究で様々な性質が明らかにされてきたものの、我々は QCD を完全に理解してはおらず、我々の知らない物理現象がたくさん起こっていると思われる。

本論ではこれらの問題の中、QCD のカイラル対称性の自発的破れ、電弱スケールの起源と階層性問題、そして量子重力の構築に関してを議論していく。QCD のカイラル対称性の自発的破れを記述する模型として Nambu–Jona-Lasinio (NJL) 模型が知られている。この模型を非摂動的くりこみ群の方法で解析

を行う。特に、有限温度・有限密度系におけるカイラル対称性の回復と相構造を議論する。電弱スケールの起源と階層性問題に関しては古典的スケール対称性に基づく電弱理論の拡張を考える。量子重力を場の量子論の枠組みで説明する考えとして漸近的安全性がある。そのような性質を持つアインシュタイン重力の可能性と物質場と結合した場合での理論構造を非摂動的くりこみ群を用いて調べる。

本論は次のように構成される。次章では非摂動的な解析手法の 1 つである非摂動くりこみ群の方法を説明する。特に、場の量子論における定式化とその近似法およびゲージ理論の取り扱いについて述べる。第 3 章では QCD のカイラル対称性の自発的破れの解析を行う。カイラル対称性と NJL 模型の基本事項について説明したあと、非摂動くりこみ群による解析結果を示す。第 4 章では電弱対称性の破れと階層性問題に関して議論する。第 5 章では漸近的に安全な量子重力を非摂動的くりこみ群で解析する。

第 2 章

非摂動くりこみ群

この章では非摂動くりこみ群の基本的な概念と場の量子論におけるその定式化を述べる。

2.1 非摂動くりこみ群方程式

次の操作を合わせてくりこみ変換と呼ぶ:

- 粗視化
- 再スケール

この変換の成す (半) 群をくりこみ群 (Renormalization Group; RG) と呼んでいる。特に摂動論におけるくりこみ群と区別してここでは非摂動くりこみ群 (Non-perturbative RG) と呼ぶことにする。^{*1} 場の量子論におけるくりこみ群方程式の定式化として次のものが知られている。

- Wegner-Houghton 方程式
- Polchinski 方程式
- Wetterich 方程式

Wegner-Houghton 方程式 [15] と Polchinski 方程式 [16] は Wilsonian 有効作用に対する方程式である。Polchinski 方程式は一般的なカットオフスキームによって定式化されたものであり、カットオフスキームとしてシャープカットオフ関数を適用すると Wegner-Houghton 方程式に帰着させることができる [17]。これらの方程式は、後で述べる局所ポテンシャル近似の下での理論の解析や ϕ^4 スカラー理論 [16, 18, 19], QED [20, 21] のくりこみ可能性の議論等で用いられてきた。しかし、Wilsonian 有効作用にはカットオフスキームに強い依存性があり、また、局所ポテンシャル近似を超える解析を行う際には不便である。

本論文ではくりこみ群方程式としてルジャンドル有効作用に対するものを用いる [22, 23, 24]。この方程式は発展方程式、あるいは Wetterich 方程式と呼ばれる。以下ではこの導出を示す。^{*2}

^{*1} 呼び方は様々で、開発者の Wilson [13, 14] にちなんで Wilson くりこみ群 (Wilsonian RG)、その定式化が厳密であるので厳密くりこみ群 (Exact RG)、実空間に対するくりこみなので実空間くりこみ群 (Real-space RG)、場の量子論では汎関数理論なので汎関数くりこみ群 (Functional RG) などと呼ばれる。どの側面を強調するかによる。

^{*2} Wegner-Houghton 方程式の導出は例えば文献 [25] を見よ。Wilsonian 有効作用とルジャンドル有効作用の関係は文献 [24] 議論されている。非摂動くりこみ群のレビューは文献 [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32] などを参照せよ。

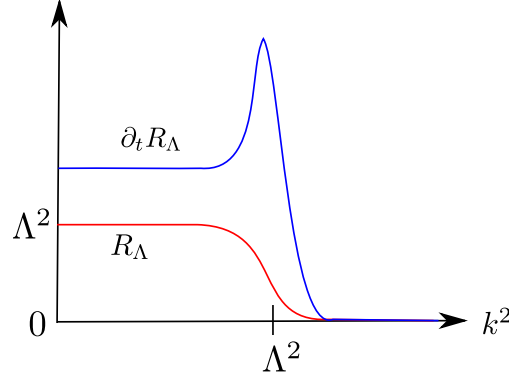


図 2.1 カットオフ関数とその微分の振る舞い.

2.1.1 Wetterich 方程式の導出

次のような Euclidean 化された作用に対する経路積分によって定義された分配関数を考える.

$$Z_\Lambda[J] = e^{W_\Lambda[J]} := \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S_0[\varphi] - \Delta S_\Lambda[\varphi] + J \cdot \varphi} \quad (2.1)$$

ここで, $W_\Lambda[J]$ は連結ダイアグラムの生成母関数である. $\Delta S_\Lambda[\varphi]$ はカットオフであり, スカラー場の場合では,

$$\Delta S_\Lambda[\varphi] := \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \varphi(-p)^T R_\Lambda(p) \varphi(p), \quad (2.2)$$

のように定義される. $R_\Lambda(p)$ はカットオフ関数で, 次の条件を満たすものである.

1. $\lim_{p^2/\Lambda^2 \rightarrow 0} R_\Lambda(p^2) > 0$
2. $\lim_{\Lambda^2/p^2 \rightarrow 0} R_\Lambda(p^2) = 0$
3. $\lim_{\Lambda^2 \rightarrow \Lambda_0^2 \rightarrow \infty} R_\Lambda(p^2) \rightarrow \infty$

条件 1 は運動量 p をゼロにした場合, $R_\Lambda(p)$ が有限である, すなわち赤外カットオフの役割を持つことを意味している. 言い換えれば, $R_\Lambda(p)$ は質量のように振る舞う. しかし, ゲージ場に適用すると理論のゲージ対称性があらわに破れてしまう. したがってくりこみ群をゲージ理論に適用する際には注意が必要である. 条件 2 は赤外極限 $\Lambda \rightarrow 0$ でカットオフ依存性のない有効作用 Γ を得るということに対応する. 条件 3 は初期作用 S_0 が Λ_0 で定義されるということを意味する. $R_\Lambda(p)$ の振る舞いを大雑把に書けば,

$$R_\Lambda(p) \sim \begin{cases} \Lambda^2 & \text{for } p < \Lambda \\ 0 & \text{for } p > \Lambda \end{cases} \quad (2.3)$$

のようになる. 概略図で書けば図 2.1 のようである. すなわち, 低運動量モード $p < \Lambda$ はカットオフで

抑えられており、運動量積分では高運動量モード $p > \Lambda$ のみが積分されることになる。くりこみ群方程式は高運動量モードの量子効果から順に積分していき、低エネルギーの有効理論 Γ を得る過程を記述する。これが粗視化のステップに対応する。 $R_\Lambda(p)$ はその過程をコントロールしている関数であることがわかる。カットオフ関数を座標空間で与えれば、

$$\Delta S_\Lambda[\varphi] = \frac{1}{2} \int_x \int_y \varphi(x)^T R_\Lambda(x, y) \varphi(y) \quad (2.4)$$

となる。このとき、座標積分を $\int_x := \int d^4x$ のように書いた。また、 $R_\Lambda(x, y) = R_\Lambda(y, x)$ を満たす。より具体的な R_Λ は次の 2.1.2 節で与える。以下の導出では座標表示による導出を示す。^{*3}

有効作用 Γ_Λ は W_Λ のルジャンドル変換として定義される。すなわち、

$$\Gamma_\Lambda[\Phi] := J_\Lambda^\Phi \cdot \Phi - W_\Lambda[J_\Lambda^\Phi] - \Delta S_\Lambda[\Phi]. \quad (2.5)$$

このとき、 J_Λ^Φ は

$$\frac{\delta W_\Lambda}{\delta J(x)}[J_\Lambda^\Phi] = \Phi(x) \quad (2.6)$$

で与えられる。この有効作用を Φ で 1 階汎関数微分と 2 階汎関数微分すると、それぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi(x)}[\Phi] &= \int_y \frac{\delta J_\Lambda^\Phi(y)}{\delta \Phi(x)} \Phi(y) + J_\Lambda^\Phi(x) - \int_y \frac{\delta W_\Lambda}{\delta J(y)}[J_\Lambda^\Phi] \frac{\delta J_\Lambda^\Phi(y)}{\delta \Phi(x)} - \frac{\delta \Delta S_\Lambda}{\delta \Phi(x)}[\Phi] \\ &= J_\Lambda^\Phi(x) - \int_y R_\Lambda(x, y) \Phi(y), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)}[\Phi] = \frac{\delta J_\Lambda^\Phi(x)}{\delta \Phi(y)} - R_\Lambda(x, y) \quad (2.8)$$

となる。このとき Φ_Λ^J は

$$\frac{\delta W_\Lambda}{\delta J(x)}[J] = \Phi_\Lambda^J(x) \quad (2.9)$$

によって定義される。つまり、 $J = J_\Lambda^\Phi$ のとき $\Phi_\Lambda^J = \Phi$ である。(2.9) 式の J による汎関数微分を行うと

$$\frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)}[J] = \frac{\delta \Phi_\Lambda^J(x)}{\delta J(y)}[J] \quad (2.10)$$

この右辺は (2.9) の右辺第 1 項目の逆関数になっている。したがって、

$$\frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)}[J_\Lambda^\Phi] = \frac{\delta \Phi_\Lambda^J(x)}{\delta J(y)}[J_\Lambda^\Phi] = \left(\frac{\delta J_\Lambda^\Phi(x)}{\delta \Phi(y)}[\Phi] \right)^{-1} = \left(\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)}[\Phi] + R_\Lambda(x, y) \right)^{-1} \quad (2.11)$$

を得る。このとき、逆関数は一般に座標空間で張られる空間における演算である。次に、有効作用 Γ_Λ の Λ による微分を考えると次を得る。

$$\frac{d\Gamma_\Lambda[\Phi]}{d\Lambda} = \int_x \frac{dJ_\Lambda^\Phi(x)}{d\Lambda} \Phi(x) - \frac{dW_\Lambda[J_\Lambda^\Phi]}{d\Lambda} - \frac{d\Delta S_\Lambda[\Phi]}{d\Lambda}. \quad (2.12)$$

^{*3} 曲がった時空においてはフーリエ変換による平面波展開が使えず、運動量表示ができない場合があるためである。

全微分 $dW_\Lambda/d\Lambda$ を評価する必要がある. 詳細に書くと

$$\begin{aligned}
-\frac{dW_\Lambda[J_\Lambda^\Phi]}{d\Lambda} &= -\frac{1}{Z[J_\Lambda^\Phi]} \frac{dZ_\Lambda[J_\Lambda^\Phi]}{d\Lambda} \\
&= \frac{1}{Z[J_\Lambda^\Phi]} \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S_{\Lambda_0}[\varphi] - \Delta S_\Lambda[\varphi] + J_\Lambda^\Phi \cdot \varphi} \left(\frac{d\Delta S_\Lambda[\varphi]}{d\Lambda} - \frac{dJ_\Lambda^\Phi}{d\Lambda} \cdot \varphi \right) \\
&= \frac{1}{Z[J_\Lambda^\Phi]} \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S_{\Lambda_0}[\varphi] - \Delta S_\Lambda[\varphi] + J_\Lambda^\Phi \cdot \varphi} \left(\int_x \int_y \frac{1}{2} \varphi(x) \frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} \varphi(y) - \int_x \frac{dJ_\Lambda^\Phi(x)}{d\Lambda} \varphi(x) \right) \\
&= \left(\frac{1}{Z[J_\Lambda^\Phi]} \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S_{\Lambda_0}[\varphi] - \Delta S_\Lambda[\varphi] + J_\Lambda^\Phi \cdot \varphi} \int_x \int_y \frac{1}{2} \varphi(x) \frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} \varphi(y) \right) - \int_x \frac{dJ_\Lambda^\Phi(x)}{d\Lambda} \frac{\delta W_\Lambda}{\delta J(x)} [J_\Lambda^\Phi] \\
&= \left(\frac{1}{Z[J_\Lambda^\Phi]} \int [\mathcal{D}\varphi] e^{-S_{\Lambda_0}[\varphi] - \Delta S_\Lambda[\varphi] + J_\Lambda^\Phi \cdot \varphi} \frac{1}{2} \int_x \int_y \varphi(x) \frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} \varphi(y) \right) - \int_x \frac{dJ_\Lambda^\Phi(x)}{d\Lambda} \Phi(x) \\
&= \frac{1}{2Z[J_\Lambda^\Phi]} \int_x \int_y \frac{\delta^2 Z}{\delta J(x) \delta J(y)} [J_\Lambda^\Phi] \frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} - \int_x \frac{dJ_\Lambda^\Phi(x)}{d\Lambda} \Phi(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_x \int_y \left(\frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)} [J_\Lambda^\Phi] + \Phi(x) \Phi(y) \right) \frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} - \int_x \frac{dJ_\Lambda^\Phi(x)}{d\Lambda} \Phi(x) \\
&= \frac{1}{2} \int_x \int_y \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)} [J_\Lambda^\Phi] \frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} + \frac{d\Delta S_\Lambda[\Phi]}{d\Lambda} - \int_x \frac{dJ_\Lambda^\Phi(x)}{d\Lambda} \Phi(x).
\end{aligned}$$

このとき, 以下を用いた.

$$\frac{1}{Z[J_\Lambda^\Phi]} \frac{\delta^2 Z_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)} [J_\Lambda^\Phi] = \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)} [J_\Lambda^\Phi] + \Phi(x) \Phi(y),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta W_\Lambda}{\delta J(x)} [J] &= \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z_\Lambda}{\delta J(x)} [J], \\
\frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)} [J] &= \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)} [J] - \frac{1}{Z[J]^2} \frac{\delta Z_\Lambda}{\delta J(x)} [J] \frac{\delta Z_\Lambda}{\delta J(y)} [J] \\
&= \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta^2 Z_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)} [J] - \Phi_\Lambda^J(x) \Phi_\Lambda^J(y).
\end{aligned}$$

導出された全微分 $dW_\Lambda/d\Lambda$ を (2.12) に代入すると

$$\frac{d\Gamma_\Lambda[\Phi]}{d\Lambda} = \frac{1}{2} \int_x \int_y \frac{\delta^2 W_\Lambda}{\delta J(x) \delta J(y)} [J_\Lambda^\Phi] \frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} \quad (2.13)$$

となる. この右辺はまさに (2.11) に他ならない. したがって,

$$\frac{d\Gamma_\Lambda[\Phi]}{d\Lambda} = \frac{1}{2} \int_x \int_y \left(\frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} [\Phi] + R_\Lambda(x, y) \right)^{-1} \frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} \quad (2.14)$$

となり, Wetterich 方程式を得る.

より一般的な場合, すなわち Φ がグラスマン数であるような場合や, カラーやフレーバーの自由度などを持つ場合などにおいては Wetterich 方程式は次のように書くことができる:

$$\frac{d\Gamma_\Lambda[\Phi]}{d\Lambda} = \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\Gamma_\Lambda^{(2)}[\Phi] + R_\Lambda \right]^{-1} \cdot \left(\frac{dR_\Lambda(x, y)}{d\Lambda} \right) \right\}. \quad (2.15)$$

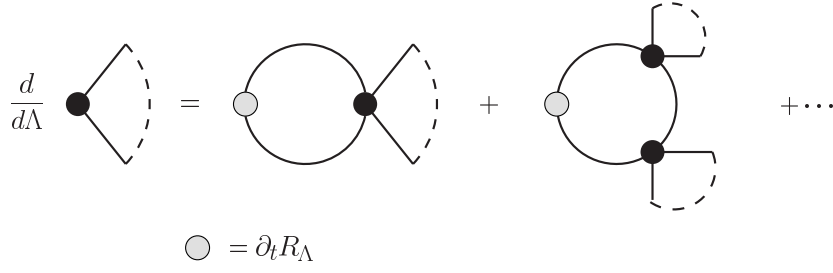


図 2.2 Wetterich 方程式のダイアグラム

ここで,

$$\Gamma_\Lambda^{(2)}[\Phi] = \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\Phi} \Gamma_\Lambda[\Phi] \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Phi} \quad (2.16)$$

と書いた. “STr” は汎関数トレースを意味しており, 場 $\Phi^T = (\phi, \psi, \bar{\psi}^T, A_\mu, \dots)^T$ が持つすべての内部空間におけるトレースを意味する. 微分演算子の固有値の和 (運動量積分) も含まれている. この右辺はベータ関数と呼ばれ, 方程式の導出過程で近似を行っていないので, 厳密な表式になっている. また, 明らかに $[\Gamma_\Lambda^{(2)}[\Phi] + R_\Lambda]^{-1}$ は 2 点関数であり, Wetterich 方程式は 1-loop の表式になっている. ダイアグラムで表せば, 図 2.2 のようになる. しかしながら, この方程式を実際に応用する際には有効作用 Γ_Λ に対して近似が必要である. この方法は 2.1.3 節で述べる.

2.1.2 カットオフ関数

Wetterich 方程式の導出においてカットオフ関数 R_Λ を導入した. この節では, この関数の具体的な形をボソンとフェルミオンに対して運動量表示で与える.

有効作用 Γ_Λ において運動項は

$$\Gamma_\Lambda^{\text{kin}} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{2} Z_\Lambda^\phi \phi(-p) p^2 \phi(p) + Z_\Lambda^\psi \bar{\psi}(-p) i \not{p} \psi(p) \right] \quad (2.17)$$

のようになっている. ^{*4} ここで, Z_Λ^ϕ と Z_Λ^ψ は場のくりこみであり, $Z_{\Lambda_0}^\phi = Z_{\Lambda_0}^\psi = 1$ を満たす. このとき, カットオフ ΔS_Λ は

$$\Delta S_\Lambda = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{2} Z_\Lambda^\phi \phi(-p) R_\Lambda^\phi(p^2) \phi(p) + Z_\Lambda^\psi \bar{\psi}(-p) i R_\Lambda^\psi(p) \psi(p) \right] \quad (2.18)$$

と与えられる. したがって,

$$\Gamma_\Lambda^{\text{kin}} + \Delta S_\Lambda = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{2} Z_\Lambda^\phi \phi(-p) \left(p^2 + R_\Lambda^\phi(p^2) \right) \phi(p) + Z_\Lambda^\psi \bar{\psi}(-p) i \left(\not{p} + R_\Lambda^\psi(p) \right) \psi(p) \right] \quad (2.19)$$

となる. 今, カットオフ関数を次のように書く:

$$R_\Lambda^\phi(p^2) = Z_\Lambda^\phi p^2 r_\Lambda(p^2/\Lambda^2), \quad (2.20)$$

$$R_\Lambda^\psi(p) = Z_\Lambda^\psi \not{p} r_\Lambda(p^2/\Lambda^2). \quad (2.21)$$

^{*4} くりこみ群方程式の定式化はユークリッド空間で行う. 付録 A.1 で与えたユークリッド化の定義ではフェルミオンの運動項の虚数 i はつかない.

$r_\Lambda(x)$ は無次元量 $x := p^2/\Lambda^2$ で書かれた関数であり, 上で述べたカットオフ関数が満たすべき条件を持つ. すなわち,

$$r(x) \sim \begin{cases} 0 & \text{for } x \rightarrow \infty \ (\Lambda \rightarrow 0) \\ 1 & \text{for } x \rightarrow 0 \ (\Lambda \rightarrow \infty) \end{cases} \quad (2.22)$$

のような振る舞いをする. この性質を満たすような $r_\Lambda(x)$ として次のようなものが挙げられる.

- シャープカットオフ型

$$r_\Lambda(x) = \frac{1}{\theta(x-1)} - 1 \quad (2.23)$$

- 指数カットオフ型

$$r_\Lambda(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad (2.24)$$

- 最適化カットオフ型

$$r_\Lambda(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) \theta(1-x) \quad (2.25)$$

シャープカットオフ型 [24, 33] は平均場近似や Schwinger–Dyson 方程式による方法との比較や後で述べる局所ポテンシャル近似の下での解析で用いられる場合があるが, 局所ポテンシャル近似を超える近似の場合, $x = 0$ ($p = \Lambda$) において $\theta(0)$ となり, この値は不定になるため, より詳細な解析を行う際には向かない. *5 指数カットオフ型 [27] は一般には運動量積分を解析的には積分を実行できないが, 数値的に行う場合には便利である. 最適化カットオフ型 [34] は Litim によって提案された関数で, シャープカットオフ型に似ているが $x = 0$ で $r_\Lambda(x) = 0$ となって定義されている. また, 運動量積分を解析的に実行することができるため, よく用いられる.

ここでは4元運動量に対してカットオフを入れた場合を示した. しかし, 有限温度・有限密度の系や磁場などの外場があるような系では4元運動量に対するカットオフは運動量積分や松原和をとることが困難になる. そのような場合には3元運動量 $\vec{p}^2 (= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$ [35] や1元運動量 p_z [36] に対してカットオフを入れる場合がある. このとき, 系のローレンツ対称性は陽に破れるが, 運動量積分が容易に実行できるのでしばしば用いられる.

2.1.3 近似方法

2.1.1 節で示した Wetterich 方程式などのくりこみ群方程式自体は厳密に定式化されたものである. しかしながら, くりこみ群方程式は初期値を $\Gamma_{\Lambda_0} = S_0$ とする汎関数微分方程式であり, 厳密に解くことはできない. したがってなんらかの近似方法を与える必要がある. その1つとしてバーテックス展開の方法 [24, 37, 38] がある. ここではよく用いられる微分展開による方法を説明する.

*5 例えば,

$$I(x) = \delta(x) f(\theta(x)) = \delta(x) \int_0^1 dt f(t)$$

という関数を考えたとき (Morris の補助定理 [24]), $\delta(x) \theta(x) = \frac{1}{2} \delta(x)$ となるが, 一方で, $\delta(x) \theta(x)^2 = \frac{1}{3} \delta(x)$ となる.

微分展開

有効作用は一般に演算子で張られる無限次元理論空間で定義される関数である。これを微分演算子で展開する。例えばスカラー場の場合では、

$$\Gamma_\Lambda[\phi] = \int d^4x \left[V_\Lambda(\phi^2) + \frac{Z_\Lambda(\phi^2)}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{Y_\Lambda(\phi^2)}{6} (\partial^2 \phi)^2 + \dots \right] \quad (2.26)$$

のようになる。このとき、有効作用は初期作用 S_0 が持っていた対称性は保たれている^{*6}。一般に高次微分項は低エネルギーでの物理量への寄与が小さいと考えられるので、次のように近似する。

$$\Gamma_\Lambda[\phi] \simeq \int d^4x \left[V_\Lambda(\phi^2) + \frac{Z_\Lambda(\phi^2)}{2} (\partial_\mu \phi)^2 \right] \quad (2.27)$$

このように有効作用の下ではくりこみ群方程式は連立偏微分方程式

$$\frac{dV_\Lambda(\phi^2)}{d\Lambda} = \beta_V(V_\Lambda(\phi^2), V'_\Lambda(\phi^2), V''_\Lambda(\phi^2), Z_\Lambda(\phi^2), Z'_\Lambda(\phi^2), Z''_\Lambda(\phi^2); \Lambda), \quad (2.28)$$

$$\frac{dZ_\Lambda(\phi^2)}{d\Lambda} = \beta_Z(V_\Lambda(\phi^2), V'_\Lambda(\phi^2), V''_\Lambda(\phi^2), Z_\Lambda(\phi^2), Z'_\Lambda(\phi^2), Z''_\Lambda(\phi^2); \Lambda) \quad (2.29)$$

となる。ここでプライム'は場 ϕ による微分を表す。これは数値的に解くことができる。

さらに、場のくりこみ Z_Λ をスケール Λ に依らないものとして近似する、すなわち $Z_\Lambda = 1$ とすると、偏微分方程式になる。

$$\frac{dV_\Lambda(\phi^2)}{d\Lambda} = \beta_V(V_\Lambda(\phi^2), V'_\Lambda(\phi^2), V''_\Lambda(\phi^2); \Lambda) \quad (2.30)$$

これはくりこみ群方程式の導出において運動量に依らない場 $\phi(p) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) \phi$ を仮定することによっても得られる。一見、荒い近似のように思えるが、時空に依らない真空構造などを調べる場合には比較的良い結果を得ることがわかっている。この近似を局所ポテンシャル近似 (Local Potential Approximation; LPA) [39, 40] と呼ぶ。

ここで、ポテンシャル $V_\Lambda(\phi^2)$ を場 ϕ^2 で展開すると

$$\begin{aligned} V_\Lambda(\phi^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n,\Lambda} \phi^{2n} \\ &= \lambda_{2,\Lambda} \phi^2 + \lambda_{4,\Lambda} \phi^4 + \lambda_{6,\Lambda} \phi^6 + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

となり、このときポテンシャルに対するくりこみ群方程式 (2.30) は

$$\frac{d\lambda_{2n,\Lambda}}{d\Lambda} = \beta_{\lambda_{2n}}(\{\lambda\}; \Lambda) \quad (2.32)$$

のように無限連立常微分方程式になる。低次元の演算子から順に取り込んで、低エネルギーで物理量が十分収束しているところで展開を打ち切れば有限連立方程式である。^{*7}

^{*6} $O(N)$ スカラー理論における $O(N)$ 対称性やフェルミオンのカイラル対称性は保たれる。しかしながらゲージ対称性はカットオフ関数によって対称性が破れてしまう。

^{*7} 展開の収束性については文献 [40, 41, 42, 43, 44, 45] を参照せよ。

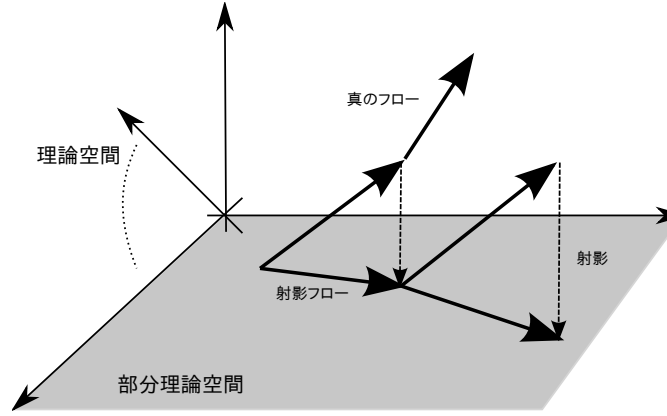


図 2.3 理論空間内のフローな流れと部分理論空間への射影。

これらの近似の下でのくりこみ群の流れは図 2.3 のようになる。無限次元理論空間の中、寄与が大きいと思われる部分理論空間に射影したフローを評価することで物理量を得る。明らかに近似を改善するには有効作用を張る部分理論空間を拡張することでできるので、平均場近似やはしご近似された Schwinger–Dyson 方程式に比べて近似の改善は原理的には明確である。

2.1.4 背景場の方法

2.1.1 節で導出したくりこみ群方程式は運動量にカットオフを導入するため、ゲージ理論に適用した際にはゲージ対称性を破ってしまう。そこで、背景場の方法 [46, 47] を導入し、その下でのくりこみ群方程式を導出する。

まず、背景場の方法を簡単にまとめておく。分配関数は一般に

$$Z[J] = e^{W[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + J^T \cdot \phi} \quad (2.33)$$

と与えられる。今、場 ϕ を背景場 $\bar{\phi}$ とその周りでのゆらぎ φ に分ける: $\phi = \bar{\phi} + \varphi$ 。このとき経路積分は φ に対する積分になる。その経路積分を $\varphi = \phi - \bar{\phi}$ を用いて書きなおすと、

$$\begin{aligned} \hat{Z}[J, \bar{\phi}] &= e^{\hat{W}[J, \bar{\phi}]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\bar{\phi} + \varphi] + J^T \cdot \varphi} \\ &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi, \bar{\phi}] + J^T \cdot (\phi - \bar{\phi})} \\ &= Z[J, \bar{\phi}] e^{-J^T \cdot \bar{\phi}} = e^{W[J, \bar{\phi}] - J^T \cdot \bar{\phi}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

となる。 $\bar{\phi} = 0$ とすると (2.33) 式に帰着する。今、連結ダイアグラムの生成汎関数の関係として

$$\hat{W}[J, \bar{\phi}] = W[J, \bar{\phi}] - J^T \cdot \bar{\phi} \quad (2.35)$$

を定義する。(2.6) 式で定義した古典場に対して背景場の寄与を含んだ古典場をソースの微分によって与える:

$$\hat{\Phi} := \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta J^T} \hat{W}[J^T, \bar{\phi}] = \Phi - \bar{\phi}. \quad (2.36)$$

そして, $\hat{W}$ に対してルジャンドル変換を行うと

$$\hat{\Gamma}[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] = -\hat{W}[J, \bar{\phi}] + J^T \cdot \hat{\Phi} = -W[J, \bar{\phi}] + J^T \cdot \Phi = \Gamma[\Phi, \bar{\phi}] \quad (2.37)$$

を得る. 途中で (2.35) 式を用いた. この関係式で $\hat{\Phi} = 0$ ($\Phi = \bar{\phi}$) としたとき,

$$\hat{\Gamma}[0, \bar{\phi}] = \Gamma[\bar{\phi}, \bar{\phi}] = \Gamma[\Phi, \Phi] \quad (2.38)$$

となり, 右辺はこれまで扱ってきた有効作用 Γ であり, これは背景場を考えたときの有効作用 $\hat{\Gamma}$ に対して $\hat{\Phi} = 0$ とした場合に相当する.

くりこみ群方程式

背景場がある場合のくりこみ群方程式を導出する. 今, カットオフは

$$\Delta S_\Lambda[\varphi, \bar{\phi}] = \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \varphi^T(-p) R_\Lambda^{\bar{\phi}}(p^2) \varphi(p) \quad (2.39)$$

と与える. カットオフ関数 $R_\Lambda^{\bar{\phi}}(p^2)$ は一般に背景場 $\bar{\phi}$ に依存している. このとき, カットオフに依存する連結ダイアグラムの生成汎関数 $\hat{W}_\Lambda[J, \bar{\phi}]$ は

$$e^{\hat{W}_\Lambda[J, \bar{\phi}]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi + \bar{\phi}, \bar{\phi}] + \Delta S_\Lambda[\varphi, \bar{\phi}] + J^T \cdot \varphi} \quad (2.40)$$

と定義され, そのルジャンドル変換によって有効作用

$$\hat{\Gamma}_\Lambda[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] = -\hat{W}_\Lambda[J, \bar{\phi}] + J^T \cdot \hat{\Phi} - \Delta S_\Lambda[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] \quad (2.41)$$

を得る. あとは 2.1.1 節で導出した方法と同様に行っていくと, くりこみ群方程式

$$\partial_t \hat{\Gamma}_\Lambda[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] = \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] + R_\Lambda^{\bar{\phi}} \right]^{-1} \cdot \left(\partial_t R_\Lambda^{\bar{\phi}}(p^2) \right) \right\} \quad (2.42)$$

を得る [48]. ここで, 次のような記法を導入した:

$$\hat{\Gamma}_\Lambda^{(i,j,k,l)}[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] = \underbrace{\left(\frac{\vec{\delta}}{\delta \hat{\Phi}^T} \cdots \frac{\vec{\delta}}{\delta \hat{\Phi}^T} \right)}_{i \text{ times}} \underbrace{\left(\frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\phi}^T} \cdots \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\phi}^T} \right)}_{j \text{ times}} \hat{\Gamma}_\Lambda[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] \underbrace{\left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \hat{\Phi}} \cdots \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \hat{\Phi}} \right)}_{k \text{ times}} \underbrace{\left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \bar{\phi}} \cdots \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \bar{\phi}} \right)}_{l \text{ times}}. \quad (2.43)$$

また, $\partial_t := -\Lambda \partial_\Lambda$ とした.

カットオフ関数

カットオフ関数 $R_\Lambda^{\bar{\phi}}(p^2)$ をどのように与えるかについて議論する. 一般にこの関数は $\hat{\Phi}$ には依らないが, 背景場 $\bar{\phi}$ に依っていてもよい. *8 次のようにカットオフ関数を選んでみよう [49, 50]:

$$R_\Lambda^{\bar{\phi}}(p^2) = \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \bar{\phi}] r_\Lambda^{\bar{\phi}} \left(\frac{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \bar{\phi}]}{Z_\Lambda \Lambda^2} \right). \quad (2.44)$$

*8 カットオフ関数が $\hat{\Phi}$ に依ってしまうと, ΔS_Λ がゆらぎ φ の 2 次の項ではなくなり, 運動量に対するカットオフにならなくなってしまう.

このカットオフ関数は “spectrally adjusted” カットオフ関数と呼ばれる. Z_Λ は場のくりこみ因子である. これを用いるとくりこみ群方程式は

$$\partial_t \hat{\Gamma}_\Lambda[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] = \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \left[\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] + R_\Lambda^{\bar{\phi}}[x] \right]^{-1} \cdot \left[(\eta_Z + 2) \cdot x \cdot y \cdot r_\Lambda^{\bar{\phi}'} + (\partial_t x) \cdot \left[r + y \cdot r_\Lambda^{\bar{\phi}'} \right] \right] \right\} \quad (2.45)$$

と書かれる. ただし,

$$x := \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \bar{\phi}], \quad y := \frac{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \bar{\phi}]}{Z_\Lambda \Lambda^2}, \quad \eta_Z := -\frac{\partial_t Z_\Lambda}{Z_\Lambda} \quad (2.46)$$

とし, $r_\Lambda^{\bar{\phi}}$ についているプライムは y による微分を表す.

一般化固有時くりこみ群方程式

$\hat{\Phi} = 0$, すなわち $\Phi = \bar{\phi}$ としたときのくりこみ群方程式を導出する. ボソンとフェルミオンのそれぞれの場合に対して示す.

• ボソン

カットオフ関数として (2.44) を用いると

$$\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] + R_\Lambda^{\bar{\phi}}[x] \Big|_{\hat{\Phi}=0, \Phi=\bar{\phi}} = \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi] \left[1 + r_\Lambda^{\bar{\phi}}(y) \right] \quad (2.47)$$

なので,

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_\Lambda[\Phi] &= \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \frac{\partial_t \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]}{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]} \cdot \left[\frac{r_\Lambda^{\bar{\phi}}(y)}{1 + r_\Lambda^{\bar{\phi}}(y)} - \frac{-y r_\Lambda^{\bar{\phi}'}(y)}{1 + r_\Lambda^{\bar{\phi}}(r)} \right] - (\eta_Z + 2) \cdot \frac{-y r_\Lambda^{\bar{\phi}'}(y)}{1 + r_\Lambda^{\bar{\phi}}(y)} \right\} \\ &=: \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \frac{\partial_t \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]}{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]} \cdot \left[g(y) - h(y) \right] - (\eta_Z + 2) \cdot h(y) \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる [49, 51]. このとき有効作用を $\Gamma_\Lambda[\Phi] := \hat{\Gamma}_\Lambda[0, \Phi]$ とし,

$$g(y) := \frac{r_\Lambda^{\bar{\phi}}(y)}{1 + r_\Lambda^{\bar{\phi}}(y)}, \quad h(y) := \frac{-y r_\Lambda^{\bar{\phi}'}(y)}{1 + r_\Lambda^{\bar{\phi}}(y)} \quad (2.49)$$

とおいた. 今導出したくりこみ群方程式 (2.48) は閉じた形式になっていない. なぜなら, $\Gamma_\Lambda[\Phi]$ に対して Φ の 2 階微分を計算すると

$$\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi] = \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi] + \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,0,0,1)}[0, \Phi] + \hat{\Gamma}_\Lambda^{(0,1,1,0)}[0, \Phi] + \hat{\Gamma}_\Lambda^{(0,0,1,1)}[0, \Phi] \quad (2.50)$$

となっていて, $\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi]$ と $\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]$ は等価ではないからである. ここでは

$$\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi] \equiv \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi] \quad (2.51)$$

と仮定する [51]. この仮定の下, くりこみ群方程式を変形していく. 関数 $g(y)$, $h(y)$ のラプラス変換を行う:

$$g(y) = \int_0^\infty ds \tilde{g}(s) e^{-ys}, \quad h(y) = \int_0^\infty ds \tilde{h}(s) e^{-ys}. \quad (2.52)$$

また,

$$\frac{d}{ds}\tilde{H}(s) = \tilde{h}(s), \quad \tilde{H}(0) = 0, \quad (2.53)$$

$$\frac{d}{ds}\tilde{G}(s) = \tilde{g}(s), \quad \tilde{G}(0) = 0 \quad (2.54)$$

で定義される関数 $\tilde{H}(s)$, $\tilde{G}(s)$ を導入する. (2.48) 式の右辺の第1項は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \left\{ \left(\frac{\partial_t \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]}{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]} + (\eta_Z + 2) \right) \left[\tilde{g}(s) - \tilde{h}(s) \right] - (\eta_Z + 2) \cdot \tilde{g}(s) \right\} e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \cdot s} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \left\{ \left(\frac{\partial_t \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]}{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]} + (\eta_Z + 2) \right) \left[\frac{d\tilde{G}(s)}{ds} - \frac{d\tilde{H}(s)}{ds} \right] - (\eta_Z + 2) \cdot \tilde{g}(s) \right\} e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \cdot s} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \left(\frac{\partial_t \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]}{\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]} + (\eta_Z + 2) \right) \left[\tilde{G}(s) - \tilde{H}(s) \right] e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \cdot s} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \left\{ (\eta_Z + 2) \cdot \tilde{g}(s) e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \cdot s} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \left[\tilde{G}(s) - \tilde{H}(s) \right] \frac{1}{s} \partial_t \left(e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \cdot s} \right) - \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \left\{ (\eta_Z + 2) \cdot \tilde{g}(s) e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \cdot s} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \left\{ -(\eta_Z + 2) \cdot \tilde{g}(s) + \left[\tilde{H}(s) - \tilde{G}(s) \right] \frac{1}{s} \partial_t \right\} e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}}{Z_\Lambda \Lambda^2} \cdot s} \end{aligned} \quad (2.55)$$

と変形される. したがって, くりこみ群方程式は

$$\partial_t \Gamma_\Lambda[\Phi] = \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \hat{b}(s, \eta_Z) e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi]}{Z_\Lambda \Lambda^2} s}, \quad (2.56)$$

$$\hat{b}(s, \eta_Z) := -\tilde{g}(s) (2 + \eta_Z) + (\tilde{H}(s) - \tilde{G}(s)) \frac{1}{s} \partial_t \quad (2.57)$$

と書ける. この方程式を一般化固有時くりこみ群方程式 (generalized proper-time RG equation) と呼ぶ [49]. このように式変形を行うと付録 D で与えた熱核展開を用いて計算を行うことができる.

● フェルミオン

フェルミオンに対してカットオフ関数を次のように与える [52]:

$$R_\Lambda^\psi(u) = u r_\Lambda^\psi(v). \quad (2.58)$$

ただし,

$$u := \Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi] - M, \quad v := -\frac{uu^\dagger}{(Z_\Lambda \Lambda)^2} \quad (2.59)$$

と定義した. ^{*9} このとき, (2.42) 式のプロパゲータは

$$\hat{\Gamma}_\Lambda[\hat{\Phi}, \bar{\phi}] + R_\Lambda^\psi[x] \Big|_{\hat{\Phi}=0} = u \left[1 + r_\Lambda^\psi(v) \right] + M \quad (2.60)$$

^{*9} フェルミオンの2点関数は一般に

$$\hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi] = P[0, \Phi] + M$$

となるので

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_\Lambda[\Phi] &= \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ \frac{-u^\dagger(1+r_\Lambda^\psi)}{-uu^\dagger(1+r_\Lambda^\psi)^2 + M^2} \left(\partial_t u \cdot r_\Lambda^\psi + u \cdot \partial_t r_\Lambda^\psi \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{STr} \left\{ -(\eta_Z + 1)j(v, \tilde{m}) + \frac{\partial_t u}{u} \left[k(v, \tilde{m}) - j(v, \tilde{m}) \right] \right\}.\end{aligned}\quad (2.61)$$

ここで, $\tilde{m} := M/(Z_\Lambda \Lambda)$, $\eta_Z := -\partial_t Z_\Lambda / Z_\Lambda$,

$$j(v, \tilde{m}) := \frac{-2v^2 r_\Lambda^{\psi'}(1+r_\Lambda^\psi)}{v(1+r_\Lambda^\psi)^2 + \tilde{m}^2}, \quad k(v, \tilde{m}) := \frac{v r_\Lambda^\psi(1+r_\Lambda^\psi)}{v(1+r_\Lambda^\psi)^2 + \tilde{m}^2} \quad (2.62)$$

と定義した. ボソンの場合と同様に $\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi] \equiv \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]$ として計算すると

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_\Lambda[\Phi] &= \frac{1}{2} \int_0^\infty ds \text{STr} \hat{f}(s, \eta_Z, \tilde{m}) e^{-v \cdot s}, \\ \hat{f}(s, \eta_Z, \tilde{m}) &:= -\tilde{k}(s, \tilde{m})(1 + \eta_Z) + (\tilde{J}(s, \tilde{m}) - \tilde{K}(s, \tilde{m})) \frac{1}{2s} \partial_t\end{aligned}\quad (2.63)$$

を得る. ただし, $\tilde{j}(s, \tilde{m})$, $\tilde{k}(s, \tilde{m})$ は (2.62) 式のラプラス変換

$$j(y, \tilde{m}) := \int_0^\infty ds \tilde{j}(s, \tilde{m}) e^{-ys}, \quad k(y, \tilde{m}) := \int_0^\infty ds \tilde{k}(s, \tilde{m}) e^{-ys} \quad (2.64)$$

で定義され, $\tilde{J}(s)$, $\tilde{K}(s)$ は

$$\frac{d}{ds} \tilde{J}(s) = \tilde{j}(s), \quad \tilde{J}(0) = 0, \quad (2.65)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{K}(s) = \tilde{k}(s), \quad \tilde{K}(0) = 0 \quad (2.66)$$

で与えられる.

固有時くりこみ群方程式

(2.48) 式と (2.61) 式に対して $\partial_t \Gamma_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi] = 0$ かつ $\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi] = \hat{\Gamma}_\Lambda^{(1,1,0,0)}[0, \Phi]$ という近似をすると一般化固有時くりこみ群方程式は

$$\partial_t \Gamma_\Lambda[\Phi] = -\frac{1}{2} \text{STr} (2 + \eta_Z) \int_0^\infty ds \tilde{h}(s) e^{-\frac{\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi]}{Z_\Lambda \Lambda^2} s}, \quad (2.67)$$

$$\partial_t \Gamma_\Lambda[\Phi] = -\frac{1}{2} \text{STr} (1 + \eta_Z) \int_0^\infty ds \tilde{j}(s) e^{-\frac{-(\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi])(\Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi])^\dagger}{(Z_\Lambda \Lambda)^2} s} \quad (2.68)$$

となり, フェルミオンの質量 M を含み, カイラル対称性を破る. カットオフ関数がカイラル対称性を破らないように質量を引いておく. また, v の定義にマイナス符号を付けた理由は, 我々のユークリッド化ではフェルミオンの運動項は $\bar{\psi} \not{\partial} \psi$ となって虚数 i が付かない. つまり, その演算子はユニタリーではなく, $\not{\partial}^\dagger = -\not{\partial}$ のようにマイナス符号が出る. この後で行うラプラス変換が定義されるためには v は正定値として定義しなければならない. したがって, マイナス符号を付けた. もし, $\bar{\psi} \rightarrow i\bar{\psi}$ のようなユークリッド化を採用した場合はこのマイナス符号は付かないが, フェルミオンの質量に虚数が付く:

$$u := \Gamma_\Lambda^{(1,1)}[\Phi] - iM, \quad v := \frac{uu^\dagger}{(Z_\Lambda \Lambda)^2}.$$

となる。これは固有時くりこみ群方程式 (proper-time RG equation) と呼ばれる [53, 54, 55, 56, 50]。この式は厳密な定式化ではないが [55, 56, 50]、様々な模型へ適用されてきた [57, 58, 59, 60, 48, 61, 62, 63]。\$O(N)\$ スカラー模型に対してこの定式を用いた解析では理論の臨界指数に対してよい結果を与える [61, 55, 64]。本論では5章で議論する漸近的に安全な量子重力の解析において、くりこみ群方程式の導出する際にも用いる。

2.2 ゲージ対称性とくりこみ群

前節で背景場を導入したくりこみ群方程式の導出を示した。ここではゲージ不変な有効作用をどのようにに取り扱うかを議論する。^{*10}

2.2.1 BRST 対称性と Slavnov–Taylor 恒等式

ゲージ対称性は量子論においては BRST 対称性にとって代わる。それらの対称性の帰結として Ward–Takahashi 恒等式もしくは Slavnov–Taylor 恒等式が得られる。ここではカットオフ関数を含む場合での恒等式を導出する。

ゲージ理論における (ユークリッド化した) 経路積分と連結ダイアグラム生成汎関数 \$W_\Lambda\$ は次のように与えられる:

$$e^{W_\Lambda[K_\mu^a, \sigma^a, \bar{\sigma}^a; \bar{\beta}_\mu^a, \bar{\gamma}^a; \bar{A}_\mu^a]} = \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{-(S[\mathcal{A}] + \Delta S_\Lambda + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}})}. \quad (2.69)$$

ここで、\$S[\mathcal{A}]\$ はゲージ不変なゲージ場の古典作用、\$\Delta S_\Lambda\$ はカットオフ関数で、(2.39) 式で与えたように背景場を導入した場合では

$$\Delta S_\Lambda = \frac{1}{2} \int d^d x (\mathcal{A} - \bar{A})_\mu^a R_\Lambda(\bar{A})^{ab} (\mathcal{A} - \bar{A})_\nu^b + \int d^d x \bar{c}^a R_\Lambda(\bar{A})^{ab} c^b \quad (2.70)$$

となる。BRST 対称性を議論するために BRST 変換を導入する:

$$\delta_{\mathbf{B}} \mathcal{A}_\mu^a = D_\mu(\mathcal{A})^{ab} c^b, \quad (2.71)$$

$$\delta_{\mathbf{B}} c^a = \frac{1}{2} g f^{abc} c^b(x) c^c, \quad (2.72)$$

$$\delta_{\mathbf{B}} \bar{c}^a = B^a, \quad (2.73)$$

$$\delta_{\mathbf{B}} B^a = 0. \quad (2.74)$$

\$B^a(x)\$ は Nakanishi–Lautrup (NL) 場である。ゲージ固定作用とゴースト場の作用は

$$S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} = \int d^d x \delta_{\mathbf{B}} \left[\bar{c}^a \left(F^a + \frac{\alpha}{2} B^a \right) \right] \quad (2.75)$$

と与えられる。ローレンツゲージの場合、\$F^a = -D_\mu(\bar{A})^{ab} (\mathcal{A}_\mu^b - \bar{A}_\mu^b)\$ と置くことで

$$S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} = \int d^d x \left[-B^a D_\mu(\bar{A})^{ab} (\mathcal{A}_\mu^b - \bar{A}_\mu^b) + \frac{1}{2} \alpha B^a B^a - \bar{c}^a D_\mu(\bar{A}) D_\mu(\mathcal{A}) c^a \right] \quad (2.76)$$

^{*10} くりこみ群によるゲージ理論の取り扱いを議論している研究は文献 [65, 57, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86] を参照せよ。

となる. NL 場 B^a を積分すると, ゲージ固定作用とゴースト場の作用はそれぞれ

$$S_{\text{gf}} = \frac{1}{2\alpha} \int d^d x \left[D_\mu(\bar{A})^{ab} (\mathcal{A} - \bar{A})_\mu^b \right]^2, \quad (2.77)$$

$$S_{\text{gh}} = - \int d^d x \bar{c}^a (D_\mu(\bar{A}) D_\mu(\mathcal{A}))^{ab} c^b \quad (2.78)$$

となる. ソースの作用は

$$S_{\text{source}} = - \int d^d x \left[K_\mu^a (\mathcal{A}_\mu^a - \bar{A}_\mu^a) + \bar{\sigma}^a c^a + \sigma^a \bar{c}^a + \bar{\beta}_\mu^a \delta_{\mathbf{B}} \mathcal{A}_\mu^a + \bar{\gamma}^a \delta_{\mathbf{B}} c^a \right] \quad (2.79)$$

と与えられる.

汎関数 W_Λ のルジャンドル変換は

$$\tilde{\Gamma}_\Lambda[\hat{A}, \xi, \bar{\xi}; \bar{\beta}, \bar{\gamma}; \bar{A}] = \int d^d x \left[K_\mu^a \hat{A}_\mu^a + \bar{\sigma}^a \xi^a + \sigma^a \bar{\xi}^a \right] - W_\Lambda[K, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{\beta}, \bar{\gamma}; \bar{A}] \quad (2.80)$$

である. ただし, 古典場を次のように定義した:

$$\hat{A}_\mu^a = \frac{\delta W_\Lambda}{\delta K_\mu^a}, \quad \xi^a = \frac{\delta W_\Lambda}{\delta \bar{\sigma}^a}, \quad \bar{\xi}^a = \frac{\delta W_\Lambda}{\delta \sigma^a}. \quad (2.81)$$

また, (2.80) 式から

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_\Lambda}{\delta \hat{A}_\mu^a} = K_\mu^a, \quad \frac{\delta \tilde{\Gamma}_\Lambda}{\delta \xi^a} = -\bar{\sigma}^a, \quad \frac{\delta \tilde{\Gamma}_\Lambda}{\delta \bar{\xi}^a} = -\sigma^a, \quad (2.82)$$

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}_\Lambda}{\delta \bar{\beta}_\mu^a} = -\frac{\delta W_\Lambda}{\delta \bar{\beta}_\mu^a}, \quad \frac{\delta \tilde{\Gamma}_\Lambda}{\delta \bar{\gamma}^a} = -\frac{\delta W_\Lambda}{\delta \bar{\gamma}^a} \quad (2.83)$$

である.

(2.41) 式に対応する有効作用は

$$\begin{aligned} \Gamma_\Lambda[A, \bar{A}, \xi, \bar{\xi}; \bar{\beta}, \bar{\gamma}] &:= \Gamma_\Lambda[\hat{A}, \xi, \bar{\xi}; \bar{\beta}, \bar{\gamma}; \bar{A}] \\ &= \tilde{\Gamma}_\Lambda[\hat{A}, \xi, \bar{\xi}; \bar{\beta}, \bar{\gamma}; \bar{A}] - \Delta S_\Lambda \\ &= \tilde{\Gamma}_\Lambda[\hat{A}, \xi, \bar{\xi}; \bar{\beta}, \bar{\gamma}; \bar{A}] - \frac{1}{2} \int d^d x \hat{A}_\mu^a R_\Lambda(\bar{A})_{\mu\nu}^{ab} \hat{A}_\nu^b - \int d^d x \bar{\xi}^a R_\Lambda(\bar{A})^{ab} \xi^b \end{aligned} \quad (2.84)$$

なので,

$$\frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \hat{A}_\mu^a} = K_\mu^a - \frac{\delta \Delta S_\Lambda}{\delta \hat{A}_\mu^a}, \quad \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \xi^a} = -\bar{\sigma}^a - \frac{\delta \Delta S_\Lambda}{\delta \xi^a}, \quad \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\xi}^a} = -\sigma^a - \frac{\delta \Delta S_\Lambda}{\delta \bar{\xi}^a}, \quad (2.85)$$

$$\frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\beta}_\mu^a} = -\frac{\delta W_\Lambda}{\delta \bar{\beta}_\mu^a}, \quad \frac{\delta \Gamma_\Lambda}{\delta \bar{\gamma}^a} = -\frac{\delta W_\Lambda}{\delta \bar{\gamma}^a} \quad (2.86)$$

となる. *11

理論の BRST 不変性は

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \left[\delta_{\mathbf{B}} e^{-(S[\mathcal{A}] + \Delta S_\Lambda + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}})} \right] \\ &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \left[\delta_{\mathbf{B}} (S[\mathcal{A}] + \Delta S_\Lambda + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}}) \right] e^{-(S[\mathcal{A}] + \Delta S_\Lambda + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}})} \end{aligned} \quad (2.87)$$

*11 $\hat{A}_\mu^a$ は A_μ^a としてもよい.

を意味し、今、ゲージ場の作用、ゲージ固定作用とゴースト場の作用は BRST 変換の下で不変であるから

$$\langle \delta_{\mathbf{B}} S[\mathcal{A}] \rangle + \langle \delta_{\mathbf{B}} S_{\text{gf}} \rangle + \langle \delta_{\mathbf{B}} S_{\text{gh}} \rangle = 0 \quad (2.88)$$

である。したがって、

$$\langle \delta_{\mathbf{B}} S_{\text{source}} \rangle + \langle \delta_{\mathbf{B}} \Delta S_{\Lambda} \rangle = 0 \quad (2.89)$$

を満たす関係式から Slavnov–Taylor 恒等式が導かれる。ただし、

$$\langle \mathcal{O} \rangle := \int \mathcal{D}\mathcal{A} \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{O} e^{-(S[\mathcal{A}] + \Delta S_{\Lambda} + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} + S_{\text{source}})} \quad (2.90)$$

の意味である。(2.89) 式のそれぞれは

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{B}} S_{\text{source}} \rangle &= - \left\langle \int d^d x \left[K_{\mu}^a \delta_{\mathbf{B}} \mathcal{A}_{\mu}^a + \bar{\sigma}^a \delta_{\mathbf{B}} c^a + \sigma^a \frac{1}{\alpha} D_{\mu}^{ab} (\mathcal{A}_{\mu}^a - \bar{A}_{\mu}^a) \right] \right\rangle \\ &= \int d^d x \left\{ K_{\mu}^a \frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta \bar{\beta}_{\mu}^a} + \bar{\sigma}^a \frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta \bar{\gamma}^a} - \sigma^a \frac{1}{\alpha} D_{\mu}^{ab} \frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta K_{\mu}^b} \right\}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\mathbf{B}} \Delta S_{\Lambda} \rangle &= - \left\langle \int d^d x \left[\delta_{\mathbf{B}} \mathcal{A}_{\mu}^a R_{\Lambda}(\bar{A})_{\mu\nu}^{ab} (\mathcal{A} - \bar{A})_{\nu}^b + (\delta_{\mathbf{B}} \bar{c}^a) R_{\Lambda}(\bar{A})^{ab} c^b - \bar{c}^a R_{\Lambda}(\bar{A})^{ab} \delta_{\mathbf{B}} c^a \right] \right\rangle \\ &= \int d^d x \left\{ \left[\frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta \bar{\beta}_{\mu}^a} + \frac{\delta}{\delta \bar{\beta}^a} \right] \left(R_{\Lambda} \frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta K} \right)_{\mu}^a + \frac{1}{\alpha} \left(D_{\mu}(\bar{A}) \left[\frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta K_{\mu}} + \frac{\delta}{\delta K_{\mu}} \right] \right)^a \left(R_{\Lambda} \frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta \bar{\sigma}} \right)^a \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta \sigma^a} + \frac{\delta}{\delta \sigma^a} \right] \left(R_{\Lambda} \frac{\delta W_{\Lambda}}{\delta \bar{\gamma}} \right)^a \right\} \end{aligned} \quad (2.92)$$

と評価される。これを (2.85) と (2.86) を用いて Γ_{Λ} で書き直し、(2.89) 式を整理すると修正された Slavnov–Taylor 恒等式

$$\int d^d x \left\{ \frac{\delta \Gamma'_{\Lambda}}{\delta A_{\mu}^a} \frac{\delta \Gamma'_{\Lambda}}{\delta \bar{\beta}^{\mu a}} - \frac{\delta \Gamma'_{\Lambda}}{\delta \xi^a} \frac{\delta \Gamma'_{\Lambda}}{\delta \bar{\gamma}^a} \right\} = Y_{\Lambda} \quad (2.93)$$

を得る [87]。ただし、 Y_{Λ} は左辺以外の項をまとめたものであり、

$$\Gamma'_{\Lambda} := \Gamma_{\Lambda} - \frac{1}{2\alpha} \int d^d x [D_{\mu}(\bar{A}) (A_{\mu} - \bar{A}_{\mu})]^2 \quad (2.94)$$

とおいた。

ゲージ不変な近似

有効作用 (2.84) 式が次のように分解できるとする [48]:

$$\Gamma[A, \bar{A}, \xi, \bar{\xi}; \bar{\beta}, \bar{\gamma}] = \bar{\Gamma}_{\Lambda}[A] + \hat{\Gamma}^{\text{gauge}}[A, \bar{A}] + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}} - \int d^d x \{ \bar{\beta}_{\mu}^a \delta_{\mathbf{B}} \mathcal{A}_{\mu}^a + \bar{\gamma}^a \delta_{\mathbf{B}} c^a \}. \quad (2.95)$$

ここで、 $\bar{\Gamma}_{\Lambda}[A] := \Gamma_{\Lambda}[A, A]$ で、ゲージ不変な項である。第2項目 $\hat{\Gamma}^{\text{gauge}}[A, \bar{A}]$ はゲージに依存した項であるが、 $\hat{\Gamma}^{\text{gauge}}[A, A] = 0$ を満たす。この分解を恒等式 (2.93) の左辺に代入すると

$$- \int d^d x \frac{\delta \hat{\Gamma}^{\text{gauge}}}{\delta \bar{A}_{\mu}^a} (D_{\mu}(A) \xi)^a = Y_{\Lambda} \quad (2.96)$$

となる．赤外極限 $\Lambda \rightarrow 0$ では $Y_{\Lambda \rightarrow 0} = 0$ となるが, $\Lambda > 0$ では一般に有限に残る．しかし, 近似として, 任意のスケールで

$$\hat{\Gamma}_{\Lambda}^{\text{gauge}}[A, \bar{A}] = 0 \quad (2.97)$$

とすると, $Y_{\Lambda} = 0$ を満たす．よって, このような近似を採用するとゲージ不変なフローを評価できる．

第 3 章

カイラル対称性の自発的破れ

3.1 量子色力学

強い相互作用を記述するゲージ群 $SU(3)_c$ に基づくゲージ理論は量子色力学 (QCD) と呼ばれており、そのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_{i,f} \left[i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_s A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \right)_i^j - m_f \delta_i^j \right] \psi_{i,f} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad (3.1)$$

で与えられる。

QCD の重要な性質の 1 つは漸近自由性と低エネルギーでの強結合性である。1 ループの摂動論から求められるゲージ結合定数のくりこみ群は

$$\alpha_s(Q) = \frac{\alpha_s^*}{1 + \frac{\alpha_s^*}{4\pi} \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_f \right) \log \left(\frac{Q^2}{M_Z^2} \right)} \quad (3.2)$$

と評価される。^{*1} ただし、 $\alpha_s^* = \alpha(M_Z) = g_s^2(M_Z)/4\pi = 0.1185 \pm 0.00006$ となるようにくりこみ点を選んでいいる。この走る結合定数を図 3.1 の左図に示した。エネルギー Q が小さくなるにつれて $\bar{g}^2(Q)$ は大きくなり、あるスケールで発散する。そのスケールを Λ_{QCD} (ラムダ QCD) と呼び、その値は $N_f = 3$ のとき

$$\Lambda_{\text{QCD}}^{\overline{\text{MS}}} = (340 \pm 8) \text{ MeV} \quad (3.3)$$

である [5]。^{*2} 強結合性によって低エネルギーでは様々な非自明な現象が起こっていると考えられてい

^{*1} ここで示した結果は 1 ループの結果である。より高次の場合、くりこみ群方程式は

$$\mu^2 \frac{d\alpha_s}{d\mu^2} = -(b_0 \alpha_s^2 + b_1 \alpha_s^3 + b_2 \alpha_s^4 + \dots).$$

ただし、 $SU(3)$ の場合、 $b_0 = (33 - 2N_f)/12\pi$, $b_1 = (153 - 19N_f)/24\pi^2$, $b_2 = (2857 - 5033N_f/9 + 325N_f^2/27)/128\pi^3$ と計算されている [5]。

^{*2} $N_f = 4, 5, 6$ に対してはそれぞれ

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{QCD}}^{\overline{\text{MS}}} &= (297 \pm 8) \text{ MeV} \quad \text{for } N_f = 4, \\ \Lambda_{\text{QCD}}^{\overline{\text{MS}}} &= (214 \pm 7) \text{ MeV} \quad \text{for } N_f = 5, \\ \Lambda_{\text{QCD}}^{\overline{\text{MS}}} &= (90.6 \pm 3.4) \text{ MeV} \quad \text{for } N_f = 6 \end{aligned}$$

である。

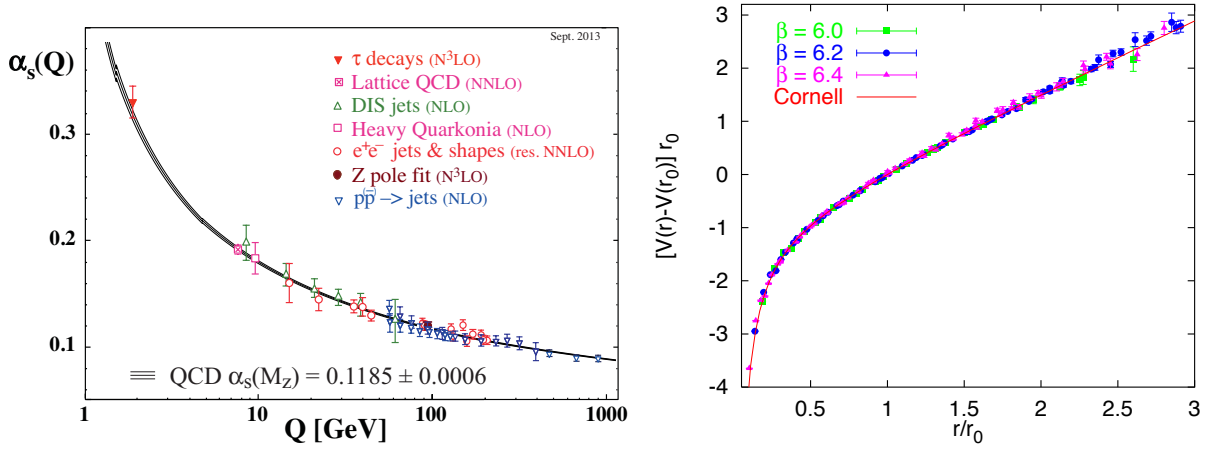


図 3.1 左図: 走る結合定数 [5]. 右図: クォーク間のポテンシャル [88]. このときクォークの質量は無限として (クエンチ極限) 計算されている.

る. その1つはクォークの閉じ込めである. 低エネルギーではクォークは単体では取り出せず, バリオンやメソンと呼ばれる状態で存在している. クォーク間のポテンシャルは

$$V_q = -\frac{\alpha}{r} + \sigma r \quad (3.4)$$

のようになると考えられている. このポテンシャルはコーネル・ポテンシャルと呼ばれている. 第1項目はクーロン・ポテンシャルであり, 1つのグルーオンをやりとりするポテンシャルとなっている. 第2項目は線形ポテンシャルで距離に比例するため, クォーク同士を引き剥がそうとしても不可能であることを意味している. このような線形ポテンシャルは非摂動的性質の1つであり, 摂動論では導出できない. 図3.1の右図に示すように格子ゲージ理論のシミュレーションによる結果はクォーク間にコーネル・ポテンシャルが働いていることを示唆している.*3

もう1つの重要な性質はカイラル対称性の破れである. クォークのカレント質量は電弱対称性の破れによって得られ, その大きさは

$$m_u = 2.3^{+0.7}_{-0.5} \text{ MeV}, \quad m_d = 4.8^{+0.5}_{-0.3} \text{ MeV} \quad (3.5)$$

である [5]. 一方, これらのクォークから構成される陽子 (uud) と中性子 (udd) の質量は

$$m_p = 938.272046 \pm 0.000021 \text{ MeV}, \quad m_n = 939.565379 \pm 0.000021 \text{ MeV} \quad (3.6)$$

である [5]. これから明らかなように, $m_p, m_n \gg 3m_u, 3m_d$ であり, 大きな差がある.

この質量を説明するのが QCD におけるカイラル対称性の自発的破れである. QCD の強い相互作用によって非自明な真空 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ を持ち, その真空から励起される粒子は

$$M_{u,d} \sim \langle \bar{\psi}\psi \rangle \quad (3.7)$$

なる質量を得る. この質量は構成子質量と呼ばれ, これが陽子や中性子の質量のほとんどを説明する. 宇宙にある物質のほとんどは陽子, 中性子, 電子からなる. 電子の質量は $m_e = 0.510998928 \pm 0.00000001$

*3 実際にはクォークの質量が有限なので, 引き剥がすためにエネルギーを与え続けると途中で新たなクォーク対ができる. そのため, ポテンシャルはクォーク対ができるたびに途切れる.

MeV であり [5], 陽子や中性子に比べ十分小さい. カイラル対称性の自発的破れは我々の身の回りの物質の質量を説明していると言える.

平均場近似の方法 [89] や Schwinger–Dyson 方程式 [90] は解析的な非摂動的手法としてよく用いられてきた. しかしながら系統的な近似の改善が困難であり, より詳細な解析には向かない. 格子場シミュレーションはコンピュータによる第1原理計算方法で, QCD の理解に大きく貢献してきたが, 有限密度系において符号問題と呼ばれる問題を抱えている. 化学ポテンシャルを導入すると確率配位を生成するボルツマン因子が虚部を持ってしまい, 確率配位が振動する. そのために系統誤差が大きくなり, 物理量がうまく評価できなくなってしまうという問題である.

一方, 非摂動くりこみ群による方法では理論空間の拡張によって近似の改善ができ, 有限密度系においても本質的な困難は生じない. この章では QCD におけるカイラル対称性の自発的破れの非摂動くりこみ群による解析を行う. 特に, 有限温度・有限密度系における対称性の回復とカイラル相構造を議論する.

3.2 カイラル対称性の基本

フェルミオンはスピノール場であり,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L^i \\ \psi_R^i \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

と書かれる.*⁴ ここで添え字 i はフレーバーの自由度 N_f を表すとする. ψ_L と ψ_R を独立に回転させる $U(N_f)_L \times U(N_f)_R$ 変換のことをカイラル変換という.*⁵ すなわち,

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = U(\boldsymbol{\theta}_L) \psi_L, \quad \psi_R \rightarrow \psi'_R = U(\boldsymbol{\theta}_R) \psi_R. \quad (3.9)$$

ただし,

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{T}}{2}\right) \quad (3.10)$$

かつ $\boldsymbol{T} = (T^0, T^i) = (\mathbf{1}, T^i)$ ($i = 1, \dots, N_f$) は $U(N_f)$ 変換の生成子である. この変換は

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{T}}{2}\right) = \exp\left(i\theta^0 \frac{\mathbf{1}}{2}\right) \cdot \exp\left(i\theta^i \frac{T^i}{2}\right) \quad (3.11)$$

と書けるので $U(N_f) \simeq U(1) \times SU(N_f)$ と分解できることがわかる. よってカイラル変換は $U(N_f)_L \times U(N_f)_R \simeq U(1)_L \times SU(N_f)_L \times U(1)_R \times SU(N_f)_R$ と分解できる. そこで, $U(1)_L \times U(1)_R$ カイラル変換と $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ カイラル変換をそれぞれ別で考えていく.

*⁴ 以下では ψ_L と ψ_R の意味を

$$\psi_L \equiv \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_R \equiv \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}$$

とする場合もある.

*⁵ “カイラル”という言葉の語源はギリシャ語で手を意味する $\chi\epsilon\iota\rho$ (cheir) である. “カイラルである”とは, ある状態とその鏡映の状態が重なり合わないことを意味する. 手はその典型例である.

- $U(1)_L \times U(1)_R$ カイラル変換

陽に書けば,

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = \exp\left(i\frac{\theta_L}{2}\right) \psi_L, \quad \psi_R \rightarrow \psi'_R = \exp\left(i\frac{\theta_R}{2}\right) \psi_R \quad (3.12)$$

となる. これらの変換の下での保存量はそれぞれ,

$$j_L^\mu = \psi_L \gamma^\mu \psi_L = \psi \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \psi, \quad j_R^\mu = \psi_R \gamma^\mu \psi_R = \psi \gamma^\mu \frac{1+\gamma^5}{2} \psi \quad (3.13)$$

となる. 特に位相を $\theta_L = \theta_R \equiv \theta$ としたとき,

$$\psi = \psi_L + \psi_R \rightarrow e^{i\theta/2} \psi_L + e^{i\theta/2} \psi_R = e^{i\theta/2} \psi. \quad (3.14)$$

一方, $-\theta_L = \theta_R \equiv \theta$ としたとき,

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \psi_R \rightarrow e^{-i\theta} \psi_L + e^{i\theta} \psi_R \\ &= \cos(\theta/2) \psi_L - i \sin(\theta/2) \psi_L + \cos(\theta/2) \psi_R + i \sin(\theta/2) \psi_R \\ &= \cos(\theta/2) (\psi_L + \psi_R) + i \sin(\theta/2) (-\psi_L + \psi_R) \\ &= \cos(\theta/2) \psi + i \gamma^5 \sin(\theta/2) \psi \\ &= e^{i\theta\gamma^5/2} \psi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで, $\gamma^5 = \text{diag}(-1_L, 1_R)$ を用いた. (3.14) 式と (3.15) 式はそれぞれベクトル変換 $U(1)_V$ と軸性ベクトル変換 $U(1)_A$ に対応していることがわかる. 保存量は

$$j_V^\mu = \psi \gamma^\mu \psi, \quad j_A^\mu = \psi \gamma^\mu \gamma^5 \psi. \quad (3.16)$$

$U(1)_L \times U(1)_R$ 変換と $U(1)_V \times U(1)_A$ 変換の関係をより詳しく見るために, $\theta_L = \theta \cdot t_L$, $\theta_R = \theta \cdot t_R$, $\theta_V = \theta \cdot t_V$, $\theta_A = \theta \cdot t_A$ とすると, $t_L = (1, 0)$, $t_R = (0, 1)$, $t_V = (1, 1)$, $t_A = (-1, 1)$ であるから

$$t_V = (1, 1) = t_L + t_R, \quad t_A = (-1, 1) = -t_L + t_R \quad (3.17)$$

という関係にある. これは基底の変更に对应しており, 同じ群を生成することがわかる. したがって, $U(1)_L \times U(1)_R \simeq U(1)_V \times U(1)_A$ である.

- $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ カイラル変換

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = \exp\left(i\frac{\theta_L^i T^i}{2}\right) \psi_L, \quad \psi_R \rightarrow \psi'_R = \exp\left(i\frac{\theta_R^i T^i}{2}\right) \psi_R \quad (3.18)$$

であり, これらの変換の下での保存量はそれぞれ,

$$j_L^{i\mu} = \psi_L \gamma^\mu \frac{T^i}{2} \psi_L = \psi \gamma^\mu \frac{T^i}{2} \frac{1-\gamma^5}{2} \psi, \quad j_R^{i\mu} = \psi_R \gamma^\mu \frac{T^i}{2} \psi_R = \psi \gamma^\mu \frac{T^i}{2} \frac{1+\gamma^5}{2} \psi \quad (3.19)$$

となる. $U(1)$ の場合と同様の議論によって, $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \simeq SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ が示せる. ベクトル変換と軸性ベクトル変換は

$$\psi = \psi_L + \psi_R \rightarrow e^{i\theta^i T^i/2} \psi, \quad \psi = -\psi_L + \psi_R \rightarrow e^{i\gamma^5 \theta^i T^i/2} \psi. \quad (3.20)$$

これらの変換の下での保存量は

$$j_V^{i\mu} = \psi \gamma^\mu \frac{T^i}{2} \psi, \quad j_A^{i\mu} = \psi \gamma^\mu \gamma^5 \frac{T^i}{2} \psi \quad (3.21)$$

となる。

以上の議論で、注意すべきことがある。それは左巻き変換 ($U(N_f)_L$ や $SU(N_f)_L$ など) と右巻き変換 ($U(N_f)_R$ や $SU(N_f)_R$ など) はそれぞれ個々で群を形成することができる。例えば、カレント (3.19) の空間積分で定義される電荷 Q_L^i と Q_R^i に対する代数を計算すると

$$[Q_L^i, Q_L^j] = i f^{ijk} Q_L^k, \quad (3.22)$$

$$[Q_R^i, Q_R^j] = i f^{ijk} Q_R^k, \quad (3.23)$$

$$[Q_L^i, Q_R^j] = 0 \quad (3.24)$$

となって L と R の代数が独立で、閉じている。ただし f^{ijk} は群の構造定数である。したがって、 $SU(N_f)_L$ 群や $SU(N_f)_R$ 群が存在する。

一方、ベクトル変換と軸性ベクトル変換に対して同様に電荷 Q_V^i と Q_A^i の代数を計算すると

$$[Q_V^i, Q_V^j] = i f^{ijk} Q_V^k, \quad (3.25)$$

$$[Q_V^i, Q_A^j] = i f^{ijk} Q_A^k, \quad (3.26)$$

$$[Q_A^i, Q_A^j] = i f^{ijk} Q_V^k \quad (3.27)$$

となって、 Q_V^i の代数は閉じているが、 Q_A^i は閉じていない。 $SU(N_f)_V$ は群を成しているが、 $SU(N_f)_A$ はそうではない。したがって、 $SU(N_f)_A$ 群は存在しない。

3.3 QCD におけるカイラル対称性の破れ

前節ではカイラル変換は

$$U(N_f)_L \times U(N_f)_R \simeq U(1)_V \times U(1)_A \times SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \quad (3.28)$$

となることを見た。QCD の古典ラグランジアンはカイラル極限 (裸の質量をゼロとする極限) のとき、この対称性を持つ。QCD による強い相互作用による個々の対称性はそれぞれ次による。

- $U(1)_V$ はクォーク数の保存に対応する変換であり、破れない。
- $U(1)_A$ はカイラル・アノマリーによって破れる。すなわち、カイラル・カレント $j_A^{i\mu}$ が保存しなくなる。 $N_f = 2$ の場合、

$$\partial_\mu j_A^{i\mu} = -\frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \cdot \text{tr}[\tau^i Q^2] \quad (3.29)$$

となる。ここで、 $F_{\mu\nu}$ は電磁場テンソル、 τ^i は Pauli 行列、そして、

$$Q = \begin{pmatrix} Q_u & 0 \\ 0 & Q_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

である。これらを代入すると

$$\partial_\mu j_A^{3\mu} = -\frac{e^2}{32\pi^2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \quad (3.31)$$

を得る。この式は Adler–Bell–Jackiw (ABJ) アノマリーとも呼ばれ、摂動論の 1 ループによって評価されるが、高次ループの寄与はないことが知られているので厳密な式である (Adler–Bardeen の定理 [91])。このようなアノマリーの効果はパイ中間子の 2 つの光子への崩壊 ($\pi^2 \rightarrow 2\gamma$) を説明する。

- $SU(N_f)_V$ について、Vafa–Witten の定理 [92, 93] が知られており、自発的に破れないことが証明されている。
- $SU(N_f)_A$ は自発的に破れる。この対称性の自発的破れに伴ってクォークは質量を獲得すると同時に生成子の破れの数だけの Nambu–Goldstone (NG) ボソンが現れる。これは Nambu–Goldstone の定理 [94, 95] と呼ばれる。本論ではこの自発的破れについて着目し、解析を行っていく。

3.4 Nambu–Jona-Lasinio 模型

Dirac 質量演算子 $\bar{\psi}\psi$ のカイラル変換を見てみる。まず、 $N_f = 1$ の場合について考える。

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \bar{\psi}e^{2i\theta\gamma^5}\psi = \cos\theta\bar{\psi}\psi + \sin\theta\bar{\psi}i\gamma^5\psi \quad (3.32)$$

であり、カイラル変換の下で不変ではないのでフェルミオンの質量項はカイラル対称性によって禁止される。カイラル変換の下で不変な演算子を構築しよう。そのために軸性スカラー演算子に対する変換を考えてみる：

$$\bar{\psi}i\gamma^5\psi \rightarrow \bar{\psi}i\gamma^5e^{2i\theta\gamma^5}\psi = \cos\theta\bar{\psi}i\gamma^5\psi - \sin\theta\bar{\psi}\psi. \quad (3.33)$$

(3.32) 式と (3.33) 式の自乗の和は

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 &\rightarrow (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\bar{\psi}\psi)^2 + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 \\ &= (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 \end{aligned} \quad (3.34)$$

となってカイラル変換に対して不変であることがわかる。したがって、

$$V_{\text{NJL}} = \frac{G}{2} \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 \right] \quad (3.35)$$

はカイラル変換 $U(1)_L \times U(1)_R$ に対して不変であるポテンシャルで、QCD の低エネルギー有効相互作用と考えられる。カイラル対称性の自発的破れを記述する理論

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}i\partial\psi + \frac{G}{2} \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\psi)^2 \right] \quad (3.36)$$

を Nambu–Jona-Lasinio (NJL) 模型 [96, 97] と呼ぶ。

同様に $N_f = 2$, $N_f = 3$ の場合で $U(1)_L \times U(1)_R$ 不変な最低次の相互作用はそれぞれ

$$V_{\text{NJL},2} = \frac{G}{2} \left[(\bar{\psi} \tau^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \tau^a i \gamma^5 \psi)^2 \right], \quad (3.37)$$

$$V_{\text{NJL},3} = \frac{G}{2} \left[(\bar{\psi} \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda^a i \gamma^5 \psi)^2 \right] \quad (3.38)$$

となる。ただし、 $\tau^a := (1, \boldsymbol{\tau})$ と $\lambda^a := (1, \boldsymbol{\lambda})$ である。

上で述べたように、 $U(1)_A$ はカイラル・アノマリーによって破れる。その効果を取り入れた場合、すなわち、 $U(1)_V \times SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A$ の下で不変な相互作用は

$$\begin{aligned} V_{\text{NJL},2,a} &= \frac{G_S}{2} \left[(\bar{\psi} \tau^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \tau^a i \gamma^5 \psi)^2 \right] + \frac{G_D}{2} \left[\det_{i,j} \Phi + \det_{i,j} \Phi^\dagger \right] \\ &= \frac{G}{2} \left[(\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} \boldsymbol{\tau} i \gamma^5 \psi)^2 \right] \quad \text{if } G_S = G_D \equiv \frac{G}{2}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$V_{\text{NJL},3,a} = \frac{G_S}{2} \left[(\bar{\psi} \lambda^a \psi)^2 + (\bar{\psi} \lambda^a i \gamma^5 \psi)^2 \right] + \frac{G_D}{2} \left[\det_{i,j} \Phi + \det_{i,j} \Phi^\dagger \right] \quad (3.40)$$

となる。^{*6} ただし、 $\Phi_{ij} := \bar{\psi}_j \psi_i + i \bar{\psi}_j i \gamma^5 \psi_i$ であり、 $i, j = 1 \sim N_f$ はフレーバーの足である。 $N_f = 2$ の場合ではアノマリーに対応する項は4体フェルミ演算子になっているのに対し、 $N_f = 3$ の場合では6体フェルミ演算子となる。 $N_f = 3$ の場合の6体フェルミ相互作用項は Kobayashi–Maskawa–t'Hooft 項と呼ばれており、 η - η' 系の性質の理解に重要な役割を果たす [98, 99, 100, 101]。

3.5 くりこみ群によるカイラル対称性の自発的破れの解析

この節では NJL 模型で記述されるカイラル対称性の自発的破れをくりこみ群によって解析する。その基本的な性質を調べるためにここでは $N_f = 1$ の場合について調べる。^{*7}

3.5.1 4体フェルミ結合定数の振る舞い

ユークリッド化された簡略化 NJL 模型の作用

$$S_{\text{NJL}} = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{G_0}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 \right\} \quad (3.41)$$

を裸の理論として定義する。この有効作用は離散的なカイラル変換

$$\psi \rightarrow \gamma^5 \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow -\bar{\psi} \gamma^5 \quad (3.42)$$

の下で不変である。この作用から与えられる低エネルギー有効作用は一般にカイラル対称性を保持した無限個の演算子で張られる。ここではまず、4体フェルミ相互作用のみを残し、他の高次演算子を落す近似をする。すなわち、有効作用として

$$\Gamma_\Lambda = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{G_\Lambda}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 \right\} \quad (3.43)$$

^{*6} $N_f = 2$ のとき、実際には $U(1)_V \times SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \times Z_2$ の下で不変である。

^{*7} NJL 模型のくりこみ群による解析は文献 [102, 103, 26, 104, 105, 106, 107, 108] を参照せよ。

を考える.

4 体フェルミ結合定数 G_Λ に対するくりこみ群方程式は次のようになる: ^{*8}

$$\partial_t G_\Lambda = \frac{\Lambda^2 G_\Lambda^2}{\pi^2}. \quad (3.44)$$

カットオフ Λ で無次元化した 4 体フェルミ結合定数 $\tilde{G} := G_\Lambda \Lambda^2 / 2\pi^2$ で書くと

$$\partial_t \tilde{G} = -2\tilde{G} + 2\tilde{G}^2 \quad (3.45)$$

となる. 右辺のベータ関数は固定点 $\tilde{G}_c := 1$ を持つことがわかる. また, この方程式は解析的に解くことができる

$$\tilde{G}(t) = \frac{\tilde{G}_c \tilde{G}_0}{\tilde{G}_0(\tilde{G}_0 - \tilde{G}_c)e^{2t}} \quad (3.46)$$

となる. この解は明らかに

$$t_c = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\tilde{G}_0}{\tilde{G}_0 - \tilde{G}_c} \right) \quad (3.47)$$

で発散する.

4 体フェルミ結合定数の発散の物理的意味

ここで, 4 体フェルミ結合定数の発散の物理的意味を議論する. そのためにまず, 補助場を導入する. 次のガウス積分

$$1 = \int \mathcal{D}\sigma \exp \left\{ - \int d^4x \frac{1}{2G_\Lambda} (\sigma + G_\Lambda \bar{\psi}\psi)^2 \right\} \quad (3.48)$$

を経路積分に挿入すると裸の作用は

$$S_{\text{NJL}} = \int d^4x \left[\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} \frac{1}{G_0} \sigma^2 + \sigma \bar{\psi}\psi \right] \quad (3.49)$$

となる. 補助場であるスカラー場の質量項として

$$m_0^2 := \frac{1}{G_0} \quad (3.50)$$

を得る. 実際に large- N 近似の範囲内では 4 体フェルミ結合定数 G_Λ の逆数のくりこみ群方程式は (3.45) 式から

$$\partial_t \left(\frac{1}{\tilde{G}_\Lambda} \right) = 2 \left(\frac{1}{\tilde{G}_\Lambda} \right) - 2 \quad (3.51)$$

となる. 一方, 質量のくりこみ群方程式は

$$\partial_t \tilde{m}^2 = 2\tilde{m}^2 - 2 \quad (3.52)$$

となり, $1/\tilde{G}_\Lambda$ のくりこみ群方程式と同じ形になっている. ただし, $\tilde{m}^2 = m^2/\Lambda^2$ である.

^{*8} この結果は 3 次元シャープ・カットオフを用いた場合の結果である. この詳しい導出は付録 F の F.1 節に示した.

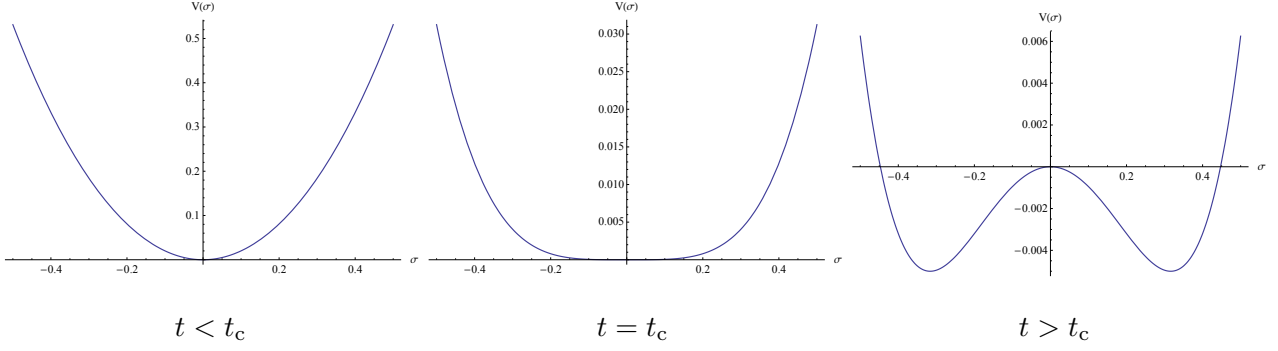


図 3.2 ポテンシャルのくりこみ群の発展. 左図: $m_\Lambda^2 \sim 1/G_\Lambda > 0$, 中図: $m_\Lambda^2 \sim 1/G_\Lambda = 0$, 右図: $m_\Lambda^2 \sim 1/G_\Lambda < 0$.

次に, 低エネルギーの補助場の有効ポテンシャルは

$$U_\Lambda(\sigma^2) = \frac{1}{2}m_\Lambda^2\sigma^2 + \frac{1}{4}\lambda_\Lambda\sigma^4 + \dots \quad (3.53)$$

のように σ の高次で記述される. G_Λ が発散するとき, m_Λ^2 はゼロになる, これは有効ポテンシャルの原点周りの曲率がゼロになることを意味する:

$$m_\Lambda \rightarrow 0 \quad (3.54)$$

すなわち, σ の 2 点関数が

$$\langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle \sim e^{-m_\Lambda x} \rightarrow 1 \quad (3.55)$$

となるので, 定義によって 2 次相転移が起こったことを意味している [109]. 有効ポテンシャルのくりこみ群による発展を概略図を図 3.2 に示した. 原点の曲率がゼロになったあと, 有効ポテンシャルは非自明な真空 $\langle \sigma \rangle \neq 0$ を持つことになる.

以上の議論より, 4 体フェルミ結合定数はカイラルゆらぎ

$$G_\Lambda \sim \left\langle \left(\int d^4x \bar{\psi} \psi \right)^2 \right\rangle \quad (3.56)$$

に対応し, その発散は 2 次相転移が起こったことを意味する.

(3.50) 式に示した関係を別の方法で示してみる. 初期作用に外場を導入する:

$$S_{\text{NJL}} = \int d^4x \left\{ \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \frac{G_0}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 - m_0 \bar{\psi} \psi \right\}. \quad (3.57)$$

ポテンシャルは

$$V(\sigma; t=0; m_0) := \frac{G_0}{2} (\bar{\psi} \psi)^2 + m_0 \bar{\psi} \psi \quad (3.58)$$

である. ここで, $\sigma := \bar{\psi} \psi$ と定義した.*⁹ 低エネルギー有効ポテンシャル $V_\Lambda(\sigma; t; m_0)$ を考える. このポ

*⁹ σ は補助場ではないことに注意せよ. σ を場 $\psi, \bar{\psi}$ で微分すると

$$\sigma \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi} = \bar{\psi}, \quad \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \bar{\psi}} \sigma = \psi$$

となる.

テンシヤルから連結ダイアグラムの生成汎関数を定義する:

$$w(m_0; t) := V(\sigma = 0; t; m_0). \quad (3.59)$$

さらにルジャンドル変換によって Ledengre 有効ポテンシャルを与える:

$$V_L(\phi; t) := m_0 \phi(m_0; t) - w(m_0; t). \quad (3.60)$$

ただし,

$$\phi(m_0; t) := \frac{\partial w(m_0; t)}{\partial m_0} = \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{m_0} \quad (3.61)$$

である.

$w(m_0; t)$ と $V_L(\phi; t)$ の関係として

$$\frac{\partial^2 w}{\partial m_0^2} \cdot \frac{\partial^2 V_L}{\partial \phi^2} = 1 \quad (3.62)$$

がある. また, $w(m_0; t)$ の m_0 による 2 階微分は感受率である:

$$\chi(m_0) := \frac{\partial \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{m_0}}{\partial m_0} = \frac{\partial^2 w}{\partial m_0^2} = \langle (\bar{\psi} \psi)^2 \rangle_{m_0} - \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{m_0}^2. \quad (3.63)$$

したがって,

$$\frac{\partial^2 V_L(\phi; t)}{\partial \phi^2} = \frac{1}{\chi(m_0)}. \quad (3.64)$$

となる. 一方, 4 体フェルミ結合定数は large- N 近似の範囲内で

$$G_\Lambda = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 w(m_0)}{\partial m_0^2} \right|_{m_0=0} + G_{\Lambda_0}. \quad (3.65)$$

と書かれるので, $\chi = 2G_\Lambda$ である. 2 次相転移が起こったとき, 感受率は発散する, すなわち, G_Λ はカイラル感受率であり, 2 次相転移でカイラル対称性が破れると発散する.

今, ルジャンドル有効ポテンシャルを

$$\frac{\partial^2 V_L(\phi; t)}{\partial \phi^2} = \frac{1}{2} m_\Lambda^2 + \frac{1}{4} \lambda_\Lambda \phi^2 + \dots \quad (3.66)$$

のように書くと, 原点 $\phi = 0$ 付近では (3.64) 式から

$$m_\Lambda^2 = \frac{1}{G_\Lambda} \quad (3.67)$$

を得る.

4 体フェルミ結合定数の逆数 $g := 1/\tilde{G}_\Lambda$ のくりこみ群方程式

$$\partial_t g = 2g - 2 \quad (3.68)$$

の解は初期値を $g(0) = g_0$ として

$$g(t) = 1 - (1 - g_0)e^{2t} \quad (3.69)$$

となる. $g_0 < 1$ のとき, $g(t)$ は小さくなっていき, 臨界スケールで $g(t_c) = 0$ となり, ルジャンドル有効ポテンシャルの原点の曲率がゼロにある. さらに $t > t_c$ で $g(t)$ は負の領域に行く, すなわち, 曲率が負になる. このように, 4 体フェルミ結合定数の逆数のくりこみ群方程式はルジャンドル有効ポテンシャルの原点の曲率の振る舞いを記述していることがわかる. ただし, 4 体フェルミ結合定数の逆数を評価することで 2 次のカイラル相転移を評価できるが, 力学的質量を定量的に評価することはできない. 力学的質量の評価には原点の振る舞いだけではなく, より大域的な領域を見る必要がある. したがって, 高次の演算子を含むポテンシャルを評価しなければならない.

3.5.2 弱解の方法

前節で 4 体フェルミ結合定数の逆数は補助場ポテンシャルの原点の振る舞いであり, 2 次相転移を意味することを議論した. 非自明な真空 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$ を得るためには発散の後のフローを評価する必要がある. しかし, くりこみ群のスケールを下げていく過程でこのような特異な振る舞いをすると, その特異点以降のフローを評価することは不可能である. 数値的にくりこみ群方程式を評価することを考えても, その特異点では破綻してしまい, 評価できなくなる.

そのような特異性を避けるために補助場の方法 (Hubbard–Stratonovich 変換 [110, 111]) がよく用いられてきた [112]. また, 近年, 力学的ハドロン化法 (Dynamical Hadronization) という方法が開発された [113, 114, 115, 116]. ^{*10} しかし, 補助場を導入すると理論空間が大きくなり, 解析が複雑になる. さらに, どのように理論空間をトランケーションするかの判断が難しい. 外場の方法 [121] もあるが, 外場をゼロにする極限を取れず, 展開が破綻する [122]. また, 1 次相転移が起こる場合はうまく機能しない [123]. そこで, 本論では弱解の方法 [123] を導入し, 解析を行う. その基本的な考え方についてここでは述べる.

偏微分方程式と特性曲線の方法

(3.58) から生成される低エネルギー有効ポテンシャルに対するくりこみ群方程式は

$$\partial_t V(\sigma; t) = -F(M(\sigma; t), \sigma; t) \quad (3.70)$$

という偏微分方程式である. ここで,

$$M(\sigma; t) := \partial_\sigma V(\sigma; t) \quad (3.71)$$

と定義し, 以後, これを質量関数と呼ぶ. この方程式の両辺を σ で微分して

$$\partial_t M(\sigma; t) + \partial_\sigma F(M(\sigma; t), \sigma; t) = 0 \quad (3.72)$$

とする. 4 体フェルミ結合定数が発散することからこのポテンシャルは途中のスケールで特異的になり, t や σ による微分ができなくなるために解 $M(\sigma; t)$ を定義できなくなる.

ここで, 解を特性曲線の方法と呼ばれる方法を用いて構成する. σ - t - M 平面に曲線 $z = M(\sigma; t)$ を考

^{*10} 力学的ハドロン化法の応用は文献 [117, 118, 119, 120] を見よ.

える. (3.72) 式を次のように書く:

$$(\partial_M F \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} \partial_\sigma M \\ \partial_t M \\ -1 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.73)$$

ここで, $\partial_\sigma F = (\partial_M F)(\partial_\sigma M)$ であることを用いた. この式はベクトル $(\partial_\sigma M, \partial_t M, -1)^T$ とベクトル $(\partial_M F, 1, 0)$ が直交していることを意味している. 一方, M の全微分

$$dM = \partial_\sigma M d\sigma + \partial_t M dt \quad (3.74)$$

は

$$(d\sigma \quad dt \quad dM) \begin{pmatrix} \partial_\sigma M \\ \partial_t M \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.75)$$

と書き直せる. したがって, 無限変位ベクトル $(d\sigma, dt, dM)$ は曲線 z 上の点 (σ, t, M) の接平面上のベクトルで, ベクトル $(\partial_\sigma M, \partial_t M, -1)^T$ と直交している.

よって, 2つのベクトル $(d\sigma, dt, dM)$ と $(\partial_\sigma M, \partial_t M, -1)^T$ は平行に取ることができ, その比例定数を ds とすると

$$\frac{d\sigma(s)}{ds} = \frac{\partial F}{\partial M}, \quad (3.76)$$

$$\frac{dt(s)}{ds} = 1, \quad (3.77)$$

$$\frac{dM(\sigma, s)}{ds} = 0 \quad (3.78)$$

と書くことができる. この (x, t, z) 空間における (3.76)–(3.78) 式で記述される曲線 $(\sigma(s), t(s), M(s))$ を特性曲線 (characteristics) と呼ぶ. 今, 偏微分方程式 (3.72) をこれらの連立常微分方程式に書き直すことができた. この方法を特性曲線の方法と呼ぶ.

有効ポテンシャル V は

$$\begin{aligned} \frac{dV(s)}{ds} &= \frac{\partial V(\sigma; s)}{\partial \sigma} \frac{d\sigma(s)}{ds} + \frac{\partial V(\sigma; s)}{\partial s} \\ &= M \frac{\partial F}{\partial M} - F \end{aligned} \quad (3.79)$$

のように評価できる. また, (3.77) 式は明らかに $s = t$ であるから, 連立常微分方程式は

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial M}, \quad \frac{dM(\sigma, t)}{dt} = 0, \quad \frac{dV(t)}{dt} = M \frac{\partial F}{\partial M} - F \quad (3.80)$$

を評価すればよい.

特に, NJL 模型におけるくりこみ群方程式は

$$F(M(\sigma; t), \sigma; t) = -\frac{\Lambda_0^3 e^{-3t}}{\pi^2} \sqrt{\Lambda_0^2 e^{-2t} + M^2(\sigma; t)} \quad (3.81)$$

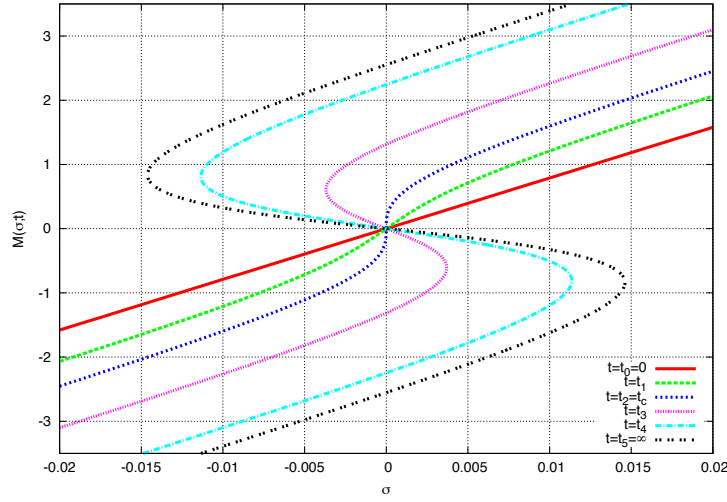


図 3.3 質量関数のくりこみ発展.

となり, F は陽に σ に依っていない. このとき (3.80) 式は

$$M(\sigma(t); t) = M(\sigma_0; 0) =: M_0, \quad (3.82)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \int_0^t d\tau \partial_M F(M_0; \tau), \quad (3.83)$$

$$V(\sigma; t) = V(\sigma_0; 0) + \int_0^t d\tau \left[M \frac{\partial F}{\partial M} - F \right] \Big|_{M=M_0} \quad (3.84)$$

となる.^{*11} ここで, $\sigma_0 := \sigma(0)$ である. よって, これらは連立ではなく, 個々の積分を評価すればよいことがわかる. 初期値を $V(\sigma; 0) = \frac{G_0}{2} \sigma^2$, $M(\sigma; 0) = G_0 \sigma$ として特性曲線を計算すると図 3.3 のようになる. $M(\sigma; 0) = G_0 \sigma$ の直線 ($t = t_0 = 0$) から発展し, 途中のスケール ($t = t_c$) で原点 $\sigma = 0$ のところで $M(\sigma; 0)$ の傾きが無限となっている. これはちょうど 4 体フェルミ結合定数が発散することに対応している. 特性曲線の方法ではその発散のあとの質量関数の振る舞いを追うことができ, $t_c < t < t_5 = \infty$ では質量関数は多価関数になっている.

弱解の方法

前節で偏微分方程式が特異的になるため, 評価できないことを見た. そのような大域的古典解を特性曲線の方法を用いて構成した. そこで, 弱解の方法を導入する.

滑らかかつ無限遠でゼロに収束するテスト関数 $\varphi(\sigma; t)$ を導入し, この関数を (3.72) 式の両辺に掛けて, t, σ で積分する:

$$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty d\sigma (\partial_t M + \partial_\sigma F) \varphi(\sigma; t) = 0. \quad (3.85)$$

部分積分をすると

$$\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty d\sigma \left(M \frac{\partial \varphi}{\partial t} + F \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) + \int_{-\infty}^\infty d\sigma (M \varphi) \Big|_{t=0} = 0 \quad (3.86)$$

^{*11} ただし, この簡略化は NJL 模型に特有のことであり, 一般には連立常微分方程式を評価しなければならない.

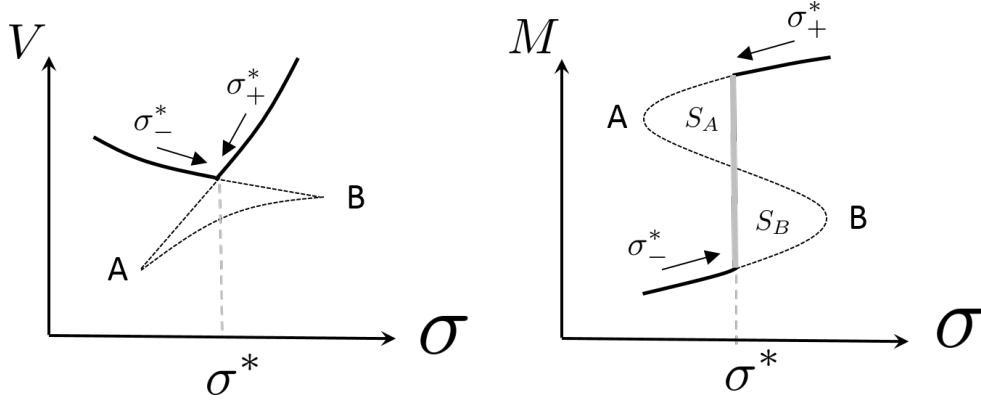


図 3.4 弱解の概略図.

となる. この方程式は t や σ による微分がテスト関数 $\varphi(\sigma; t)$ に掛かっているため, 解が定義できる. (3.86) 式を弱方程式といい, その解を弱解と呼ぶ.*¹² また, これと区別して (3.72) 式を強方程式といい, その解は大域的古典解と呼ぶ.

Rankine–Hugoniot 条件

大域的古典解は多価になっているが, 物理的には真空は 1 つに決まるはずである. したがって, 大域古典解から一意に弱解を決める必要がある. そのために, Rankine–Hugoniot (RH) 条件と呼ばれる条件を与える. それは不連続点 $\sigma^*(t)$ の時間発展が

$$\frac{d\sigma^*(t)}{dt} = \frac{F(M(\sigma_+^*(t); t) - F(M(\sigma_-^*(t); t))}{M(\sigma_+^*(t); t) - M(\sigma_-^*(t); t)}, \quad (3.87)$$

を満たすように決める. ここで, σ_+^* と σ_-^* は不連続点 σ^* にそれぞれ, 右と左から近づけることを意味する.

図 3.4 において, RH 条件は幾何学的に等面積則を意味している [123, 124]:

$$S_A(t) - S_B(t) = \text{const.} \quad (3.88)$$

今の場合, 初期条件として $S_A(0) = S_B(0) = 0$ なので, 任意のスケールで $S_A(t) = S_B(t)$ である. RH 条件を与えると多価関数 (図 3.3) となっていた質量関数から 1 価関数 (図 3.5) となる. 原点で質量関数に飛びがあり, 連続関数ではないが, (3.86) 式を満たす解は不連続点が許されているので, これが弱解となる.*¹³

弱解はカイラル対称性を反映しており,

$$M(\sigma(t); t) = -M(-\sigma(t); t) \quad (3.89)$$

を満たしている. そして, $t > t_c$ では

$$M = \lim_{\sigma \rightarrow 0} M(\sigma; t) = -\lim_{\sigma \rightarrow 0} M(\sigma; t) \neq 0 \quad (3.90)$$

*¹² ここで与える弱解は特に保存則の弱解という. 詳細は文献 [124] を見よ.

*¹³ 飛びのことをショック (shock) と呼ぶ.

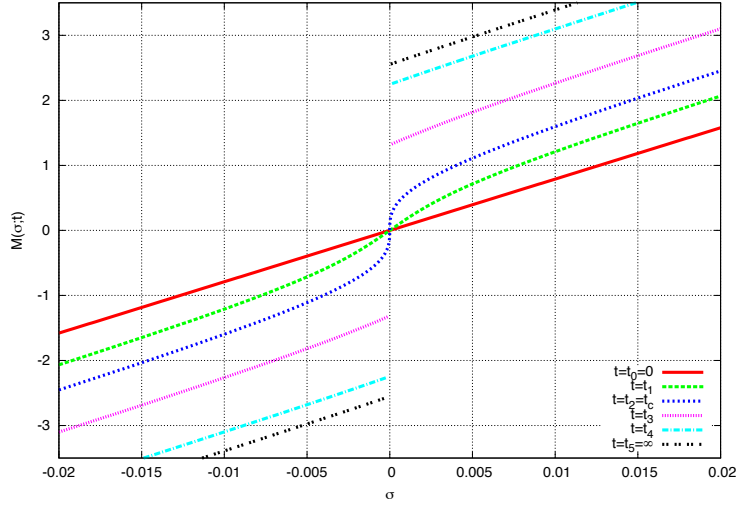


図 3.5 質量関数の弱解.

となって, ゼロでない値を取っている. 赤外での力学的質量は

$$M = \lim_{\sigma \rightarrow 0} M(\sigma; \infty) \quad (3.91)$$

と得る.

次節では弱解の方法をくりこみ群に適用し, 有限温度・有限密度の相構造を調べる.

3.5.3 有限温度・密度系でのカイラル相構造

温度・密度の効果によるカイラル対称性の回復を議論する. 有限温度・有限密度における有効ポテンシャルのくりこみ群方程式は

$$\partial_t V(\sigma; t) = \frac{\Lambda^3}{\pi^2} \left[E + T \log(1 + e^{-\beta(E-\mu)}) + T \log(1 + e^{-\beta(E+\mu)}) \right] \quad (3.92)$$

となる (導出は付録 F の F.1 節に示した). 質量関数に対しては両辺を σ で微分すればよい. この方程式の初期値は

$$V(\sigma; t = 0) = \pi^2 \tilde{G}_0 \sigma \quad (3.93)$$

で与える. ただし,

$$\tilde{G}_0 := \frac{G_0 \Lambda_0^2}{2\pi^2} \quad (3.94)$$

とする. Λ_0 で無次元の 4 体フェルミ結合定数を定義していることに注意すべきである. この偏微分方程式から得られる質量関数の 2 次相転移と 1 次相転移のそれぞれの場合についての振る舞いを調べ, カイラル相構造を示す.

2 次相転移

3.5.1 節で議論した通り, 2 次相転移とはカイラル感受率が発散する場合であり, 4 体フェルミ結合定数が発散することが定義である.

無次元化した4体フェルミ結合定数の逆数 g に対するくりこみ群方程式,

$$\partial_t g = 2g - I(T, \mu) g^2 \quad (3.95)$$

を考えると, 2次相転移は $g(t_c) = 0$ で起こる. ゼロ温度・ゼロ密度でカイラル対称性が破れても有限温度・有限密度の効果によって $g(t)$ はゼロを横切らなくなる.^{*14} したがって, 2次相転移は4体フェルミ結合定数のみを調べることで評価できる.

1 次相転移

1次相転移の場合, ポテンシャルの原点の曲率は正になる. したがって, 原点の振る舞いだけを見てもカイラル対称性の回復と1次相転移の区別がつかない, 言い換えると4体フェルミ結合定数の振る舞いを調べても1次相転移を評価することはできない. 1次相転移をポテンシャルから捉えるには原点のみではなく, 場の値が大きくなところの振る舞いを調べる必要がある. つまり, 高次元演算子 σ^{2n} が必要である. ポテンシャル $V(\sigma; t)$ は無限の演算子が入っているので, $V(\sigma; t)$ に対する偏微分方程式を評価することで1次相転移を調べることができる. 図3.6に1次相転移が起こるような場合での質量関数のくりこみ発展を示した.^{*15} ショックが原点 $\sigma = 0$ でないところから発生し, くりこみ発展するにしたがって原点へとショックは移動する様子が見て取れる.

相図

数値的に評価した相構造を調べる. 図3.7の左図に μ - T 平面でのカイラル相転移の相図を示す. 紫線は2次相転移点を表し, 緑線は1次相転移点を表す. 4体フェルミ結合定数を小さくすると相境界は小さくなっていく. また, 4体フェルミ結合定数が小さくなると, 臨界終点が低温・低密度側に移動していき, 1次相転移の相境界が消えることがわかる. この振る舞いをより明確にするために図3.7の右図に $1/\tilde{G}_0$ - μ 平面の $T = 0$ での2次相転移点 (紫点線) と臨界終点 (緑点線) を示した. $\tilde{G}_0 \sim 1.176$ で両者は交わる, すなわち, 臨界終点は消える. 1次相転移が起こるような場合, ショックは原点ではないところから発生するが, 4体フェルミ結合定数 $\tilde{G}_0$ を小さくしていくとショックが原点側に近くで発生するようになり, 最終的に2次相転移と合併する. 図3.8に $\tilde{G}_0$ - μ - T 平面でのカイラル相境界を示した.

3.6 章のまとめ

この章では有限温度・有限密度 NJL 模型のカイラル対称性の回復について議論した. 4体フェルミ結合定数のくりこみ群フローはある臨界スケールで発散し, それは2次のカイラル相転移を意味している. カイラル対称性の自発的破れが起こった後のくりこみ群を評価するために, 弱解の方法を導入した. 特性曲線の方法によって大域的古典解を構成し, カイラル相転移が起こると質量関数は多価関数になることを見た. これは真空が幾つか存在することになり, その中で実現される真空が1つあるはずである. ここで Rankine-Hugoniot 条件を課すと, 弱解は物理的に正しい真空を一意に選ぶことができる.

^{*14} 反例を章のまとめで議論する.

^{*15} 図3.6自身からは1次相転移であると断言はできないが, 相転移点よりも少し大きな温度や密度を与えるとショックが原点ではないところで止まる. それは有限な $M(0; \infty) \neq 0$ から急に $M(0; \infty) = 0$ になることを意味する. したがって, 1次相転移が起こったことになる.

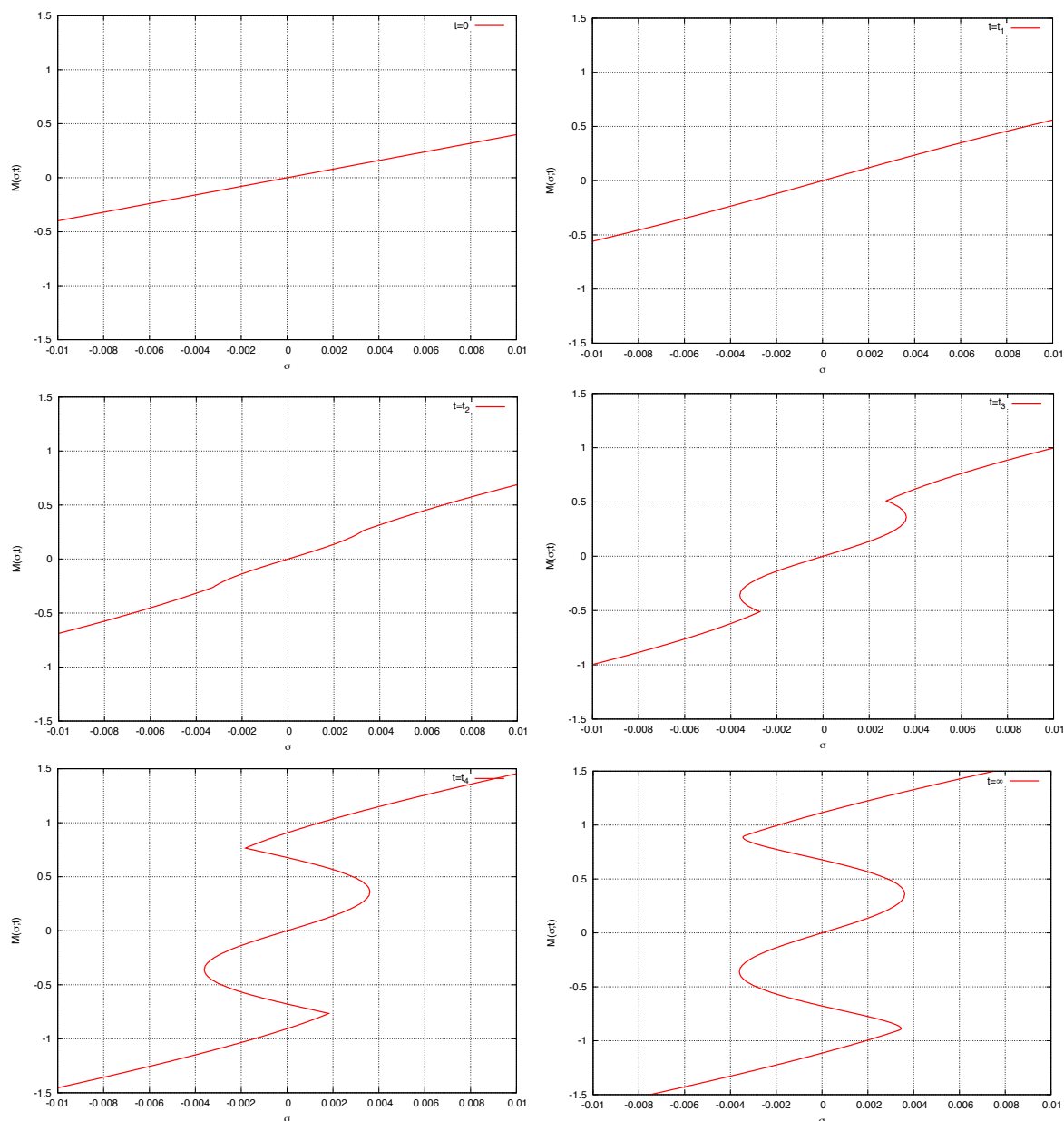


図 3.6 1 次相転移が起こるような場合での $M(\sigma; t)$ のくりこみ発展.

有限温度・有限密度における相構造を示した. 2 次相転移と 1 次相転移を補助場の方法を導入せずに評価することができた. 結果として, 4 体フェルミ結合定数が小さくなると相境界は低温・低密度側に移動するだけでなく, ある結合定数で 1 次相境界は消え, 2 次相転移のみが起こることがわかった.

展望と課題

- 弱解の方法を用いた QCD のカイラル対称性の自発的破れの解析によってグルーオンの交差はしごダイアグラムを取り入れることでゲージの依存性が小さくなることが明らかにされている [122]. 有限温度・有限密度系に拡張することで, グルーオンの交差はしごダイアグラムの相構造に与える寄与を調べるべきである.

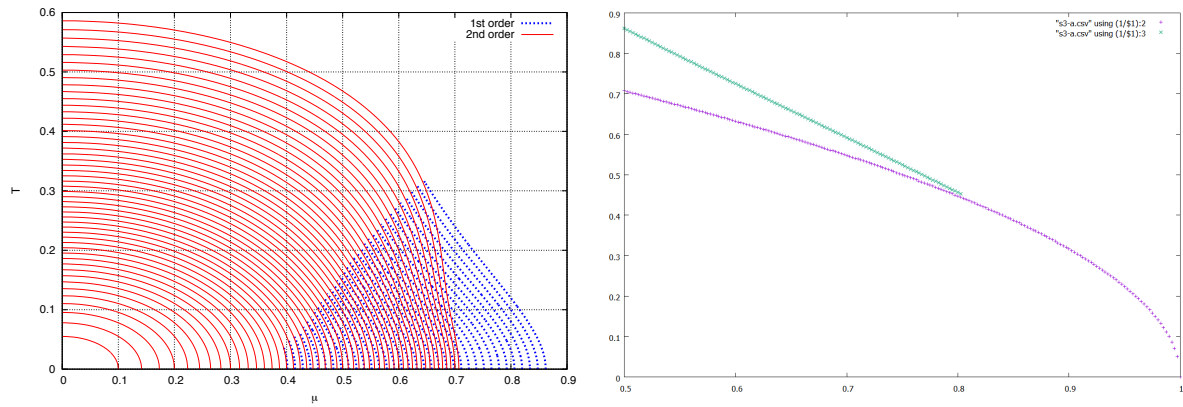


図 3.7 左図: μ - T 平面の相図. 紫線は 2 次相転移線, 緑線は 1 次相転移線. 右図: 紫点線は $T = 0$ での 2 次相転移点と緑点線は臨界終点の $1/\tilde{G}_0 - \mu$ 平面での振る舞い.

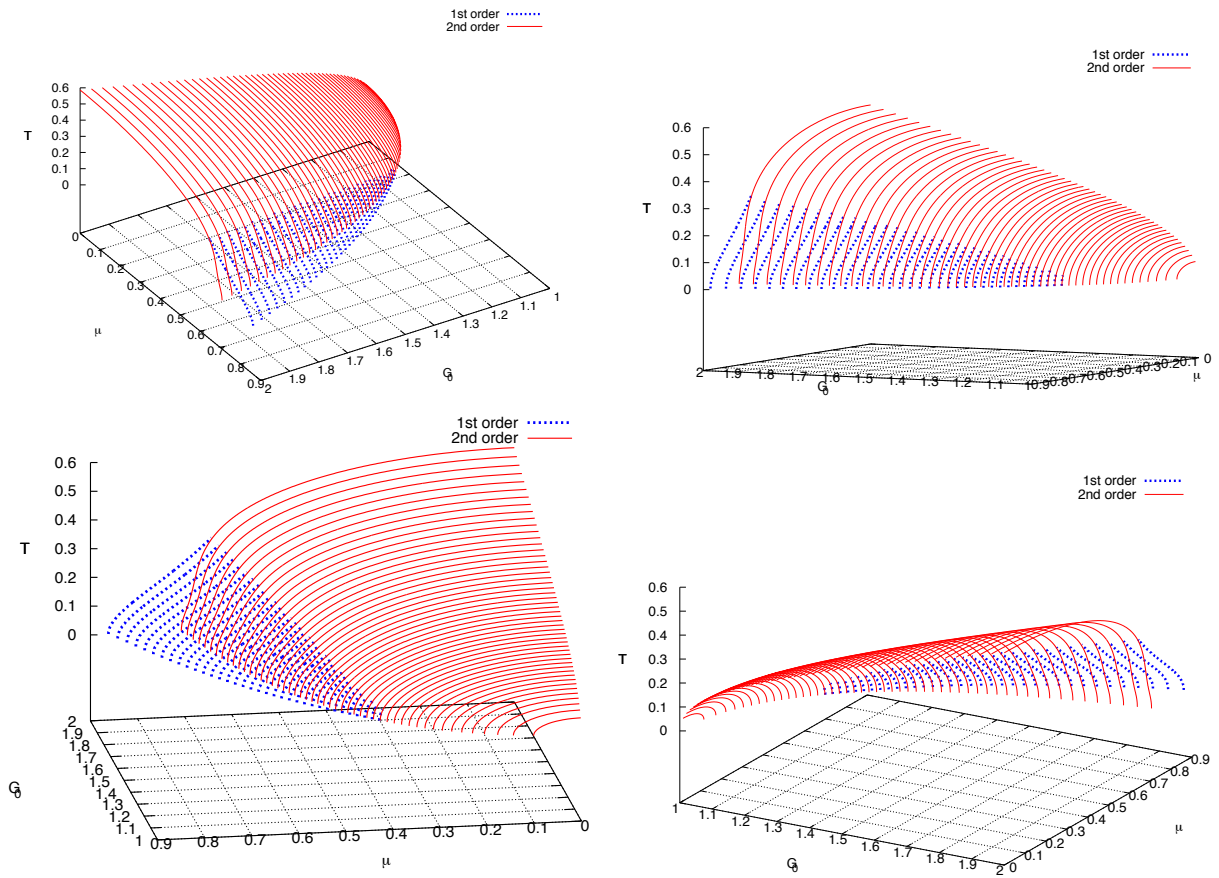


図 3.8 $\tilde{G}_0$ - μ - T 平面の相境界.

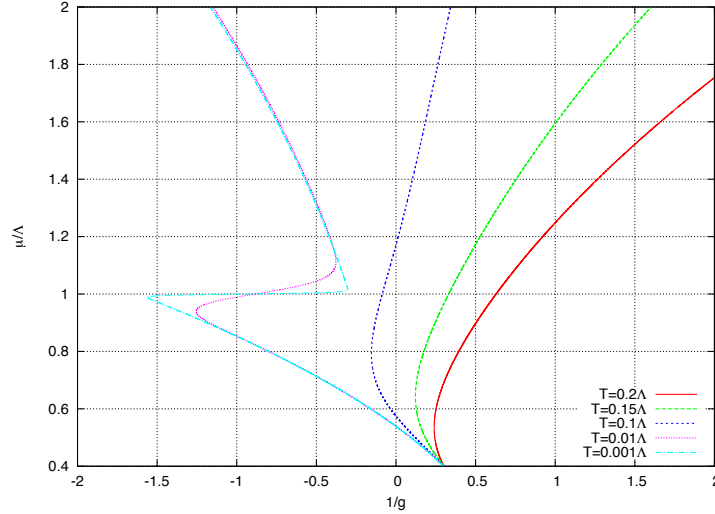


図 3.9 最適化カットオフを用いた場合での 4 体フェルミ結合定数のくりこみ群フロー [109].

- 弱解の方法では今のところ large- N 近似の範囲内でのみで適用できている。その近似を超える場合、一般に (3.70) 式の関数は F は σ の 2 階微分を含んでおり、弱解を構成する際の部分積分をしても微分がテスト関数に押し付けることができなくなる。したがって、2 階微分を含むような場合にどのように弱解を構成するかは課題である。
- この章ではカットオフ関数としてシャープカットオフを採用した。このスキームでは有限温度・有限密度での 4 フェルミ結合定数のくりこみ群フローは一旦 $g(t_c) = 0$ を横切ると再び $g(t) = 0$ となることはなく、一方向のみに進む。特性曲線で見ると質量関数の原点 $\sigma = 0$ の傾きは $(+, \infty, -)$ の順で一方向のみに変化する。しかし、最適化カットオフを用いた場合、図 3.9 に示したように一方向ではなく、再び $g(t) = 0$ を横切り、正に戻ってくる場合がある [109]。そのような場合では弱解として一意に解を選ぶことができなくなる。任意のカットオフ・スキームに対して弱解の方法を適用できるようにするには、フローが戻るような場合でも弱解を一意に決める条件を与える必要がある。

第 4 章

電弱対称性の破れの起源と標準模型の拡張

この章では電弱対称性の破れの起源と階層性問題を解決する 1 つの考え方である古典的スケール不変性に基づく標準模型の拡張を試みる。隠れたセクターとして強いゲージ相互作用を伴う新しいスカラー場 S を導入する。スカラー場は標準模型のセクターと Higgs・ポータル結合 ($H^\dagger H S^\dagger S$) を通して繋がっている。隠れたセクターでの強い相互作用によってスケール不変性が力学的に破れ、その破れが Higgs 場に伝わることで電弱対称性が破れる。すなわち、電弱対称性の破れの起源は隠れたセクターでの強い相互作用によるものとして説明される。ここで提案する模型が暗黒物質候補を含むこと、および、電弱バリオン数生成の条件に必要な強い電弱 1 次相転移が起こり得ることを示す。

4.1 電弱対称性の破れの起源と階層性問題

Weinberg–Salam 理論と電弱スケールの起源

電磁気力と弱い相互作用を統一する Weinberg–Salam 理論は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージ群の表現に粒子が埋め込まれている。ここではその概要をごく簡単にまとめておく。ラグランジアンは次のように与えられる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{higgs}} + \mathcal{L}_{\text{yukawa}}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = \bar{\psi} i \not{D} \psi, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{higgs}} = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - V(H), \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{yukawa}} = y_e \bar{\ell}_L H e_R + y_u \bar{q}_L \tilde{H} u_R + y_d \bar{q}_L H d_R + \text{h.c.}. \quad (4.5)$$

ここで、 $F_{\mu\nu}^i$ と $G_{\mu\nu}$ はそれぞれ $SU(2)_L$ と $U(1)_Y$ ゲージ場のテンソルで、

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g_2 \epsilon^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k, \quad (4.6)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (4.7)$$

場	SU(3) _c	SU(2) _L	U(1) _Y
$q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	3	2	1/2
$u_R = u_R, c_R, t_R$	3	1	4/3
$d_R = d_R, s_R, b_R$	3	1	-2/3
$\ell_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	1	2	-1
$e_R = e_R, \mu_R, \tau_R$	1	2	-2
$H = \begin{pmatrix} \chi^+ \\ H^0 \end{pmatrix}$	1	2	1
A_μ^i (SU(2) _L ゲージ場)	1	3	0
B_μ (U(1) _Y ゲージ場)	1	3	0
g_μ^a (グルーオン場)	8	1	0

表 4.1 標準模型に登場する粒子と電荷の割り当て.

共変微分 D_μ は

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - i \frac{g_2}{2} \tau^i A_\mu^i + i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi \quad (4.8)$$

と定義される. τ^i は Pauli 行列である. また, $\tilde{H} := i\tau^2 H^*$ と定義され, その超電荷は $Y(\tilde{H}) = -1$ である. Higgs 場のポテンシャル $V(H)$ は

$$V(H) = m_H^2 H^\dagger H + \lambda_H (H^\dagger H)^2. \quad (4.9)$$

ここで現れる粒子 $\psi (= \ell_L, q_L, e_R, \dots)$ の電荷の割り当ては表 4.1 にまとめる.

Higgs 場が負の質量 $-\mu^2$ を持つと次のように真空期待値を持ち, 自発的に対称性を破る:

$$\langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

ここで, $v_h = \sqrt{\mu^2/\lambda_H}$ である. Weinberg-Salam 理論が持つ SU(2)_L × U(1)_R は U(1)_{em} に自発的に破れる. Higgs 場が対称性を自発的に破ることによる NG ボソンはゲージ場が吸収することで物理的には現れず, その代わりにゲージ場が質量を獲得することになる. このような状況を見るために, ゲージ固定としてユニタリーゲージを採用する:

$$H = e^{\frac{i\chi^i \tau^i}{v_h}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_h + h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

このとき、ゲージ場は

$$W_\mu^\pm = A_\mu^1 \pm iA_\mu^2, \quad m_W^2 = \frac{g_2^2 v_h^2}{4}, \quad (4.12)$$

$$Z_\mu = \cos \theta_W A_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad m_Z^2 = \frac{g_2^2 + g_1^2}{4} v_h^2, \quad (4.13)$$

$$A_\mu = \sin \theta_W A_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu, \quad m_A^2 = 0 \quad (4.14)$$

のように与えられる。ただし、 $\tan \theta_W = g_1/g_2$ である。また、Yukawa 相互作用からフェルミオンは質量

$$m_\psi = \frac{y_\psi v_h}{\sqrt{2}} \quad (4.15)$$

を得る。質量の観測結果から $v_h = 246$ GeV, $\lambda_H \simeq 0.13$ と決められる。真空期待値の定義から $\mu \simeq 88.69$ GeV とわかる。

ところで、このような Higgs 場の質量項はどのように得られるのであろうか。これは“電弱対称性の力学的破れの起源は何か”という問いであり、“電弱対称性の破れのスケール $\Lambda_{EW} \sim \mathcal{O}(10^2)$ GeV の起源は何か”と言い換えることもできる。この問題に対する明確な答えはまだない。また、Higgs 場の質量には微調整問題と呼ばれる問題が生じる。

階層性問題

電弱スケール Λ_{EW} は $\mathcal{O}(10^2)$ GeV であるのに対し、量子重力の効果が現われるプランクスケール Λ_{PL} は $\mathcal{O}(10^{19})$ GeV であり、 $\mathcal{O}(10^{17})$ GeV もの階層がある。この間には新しい理論を特徴づけるスケールはないのだろうか。この問いは階層性問題と呼ばれている。この問題を認める、すなわち、標準模型がプランクスケールまでの物理を記述する理論であるとしても、さらに微調整問題と呼ばれる問題が起こる。標準模型がプランクスケールで裸の理論として与えられるとする。このとき Higgs の裸の質量 m_0 はプランクスケールの大きさを持つ。低エネルギーで我々が観測する Higgs の質量は量子補正を伴ったくりこまれた質量 m_R である。そのときの量子補正のカットオフはプランクスケールとなる。すなわち、

$$m_R^2 = m_0^2 + \frac{\Lambda_{PL}^2}{16\pi^2} \left(6\lambda + \frac{3}{4}g_1^2 + \frac{9}{4}g_2^2 - 6y^2 + \dots \right) \quad (4.16)$$

となって2次発散の形をしている。これはプランクスケールの量の引き算によって電弱スケールの物理量を出すことを意味する。これにはかなりの微調整が必要となり、微調整問題と呼ばれている。この問題を解決する1つは超対称性 [125, 126] である。これはグラスマン数を持つ超対称パートナー粒子のループ補正が (4.16) 式の右辺第2項目のループ補正と相殺することで解決する。また、Veltmann 条件 [127] と呼ばれる条件を満たす場合もある。これはループ補正における結合定数間の相殺 ($6\lambda + \frac{3}{4}g_1^2 + \dots = 0$) が超対称性が破れるスケールで起こるという条件である。

この問題はスカラー場に特有の問題と言える。フェルミオンに対してカイラル対称性、ゲージ場に対してゲージ対称性という強い対称性があるため、質量項は裸の理論では禁止される。これらの質量は力学的な破れが起こらない限り、生成されない。例えば、クォークは QCD の強い相互作用によってカイラル対称性が力学的に破れることで質量を獲得する。そのとき、その質量は Λ_{QCD} のオーダーになる。ゲージ場の場合においても力学的に破れない限り、ゲージ場の質量項は禁止される。しかしながら、スカラー場の質量項を禁止する強い対称性がないため、階層性問題が生じる。

4.2 Bardeen の議論と古典的スケール不変性

前節で述べた議論において、理論のカットオフとして M_{PL} を与えた。標準模型が高エネルギーで与えられる理論の低エネルギー有効模型であると考えるのは自然なことであり、その有効模型が有効であるエネルギー領域、すなわちカットオフがあると考えられる。したがって、(4.16) 式のような質量項への補正を考えた。

しかし、このような考え方には疑問があることを Bardeen が提示した [128]。Bardeen の考えを議論するために摂動論におけるくりこみを QED を例にして再考してみよう。QED は電弱スケールで弱い相互作用と統一し、Weinberg–Salam 理論になる。すなわち、QED のカットオフは Λ_{EW} と考えられる。しかし、QED による量子補正を計算する際、そのようなカットオフの存在は気にしない。正則化のために手でカットオフ Λ を置くが、QED 自身はくりこみ可能な理論であるので現れる発散、すなわちカットオフは結合定数にくりこまれ、 $\Lambda \rightarrow \infty$ とすることができる。このように手で置いたカットオフ Λ 自身には意味はない、そして、そのカットオフによる 2 次発散 Λ^2 も意味がないと考えてもよいのではないかと思われる。実際、次元正則化による方法を用いると 2 次発散に対応するような発散項は現れず、自動的に引かれている。つまり、2 次発散項はスキームに依っている。物理的に意味があるのは $\log$ 発散のみであり、ベータ関数に寄与を与えるようなスケール・アノマリーを考えればよいということになる。この立場の下、質量項のくりこみ群を計算すると

$$\frac{dm^2}{d \log \mu} = \frac{m^2}{16\pi^2} \left(12\lambda + 6y_t^2 - \frac{9}{2}g^2 - \frac{3}{2}g'^2 \right) \quad (4.17)$$

となって、ベータ関数は m^2 に比例していることがわかる。ただし、 μ^2 はくりこみ点であるプランク・スケールにおいて $m^2(M_{\text{PL}}) = 0$ という境界条件があったとするならば質量項は生成しないことがわかる。したがって、一旦、質量をゼロにした理論を考えると量子論においてもスカラー場はゼロ質量のままであることがわかる。

Higgs 場と結合する新しい粒子があり、その質量が M が与えられるとしよう。このとき質量は

$$m_R^2 = m_0^2 + \frac{\lambda'}{16\pi^2} M^2 \log \left(\frac{\mu^2}{M^2} \right) + \dots \quad (4.18)$$

と与えられる。ただし、 λ' は Higgs 場と新しい粒子との結合定数である。新しい粒子の寄与は $M^2 \log \left(\frac{\mu^2}{M^2} \right)$ のように新しい粒子の質量のオーダーで与えられている。この粒子の質量が TeV スケールのオーダーで与えられるならば、TeV のオーダー同士の裸の質量と量子効果による相殺によって Higgs 質量を出せばよいので微調整問題は生じない。しかしながら、そのようなオーダーの裸の質量の起源は不明である。一方、 M が GUT スケール程度 $\mathcal{O}(10^{16})$ GeV であったとするならば、微調整問題が生じることになる。

以上の議論をまとめると

- 正則化によるカットオフはスキームに依っており、意味がないと考えてもよいのではないか。
- 境界条件として $m_0 = m(M_{\text{PL}} = 0)$ を与えると質量はくりこみ群では動かず、質量は生成しない。
- 質量 M を持つ Higgs 場と結合する新しい粒子があったとき、階層性問題は生じないが、裸の質量の起源はわからない。

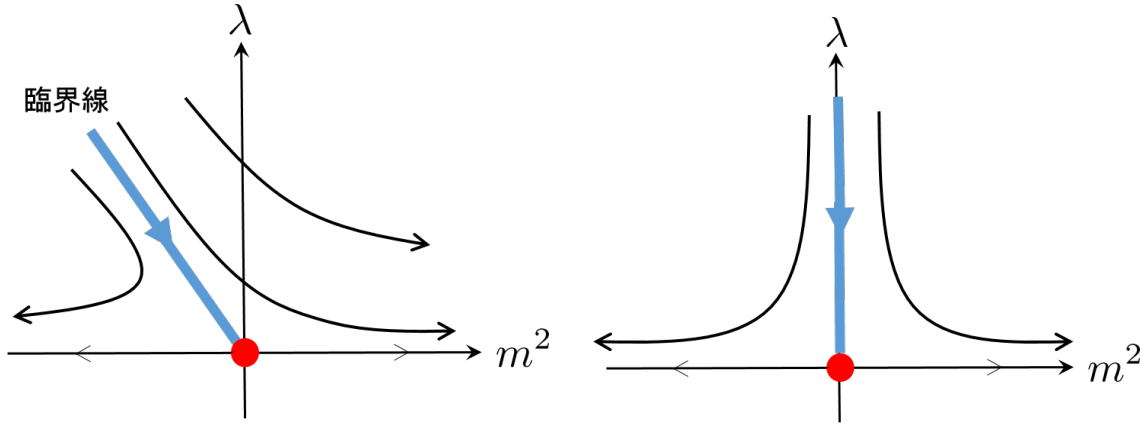


図 4.1 左図: スカラー理論のくりこみ群フロー. 右図: 臨界線が縦軸上 ($m^2 = 0$) になるようなくくりこみスキームをとった場合.

- M が GUT スケールほどであれば微調整問題が現れる.

これらの議論において裸の質量が問題なってくることになる. したがって, この量をなんらかの対称性等で禁止できないかと考える. 裸の質量は標準模型の質量において唯一スケールを持つ量であり, 裸の理論 (古典論) にスケール不変性があったと考えると裸の質量項は禁止される. すなわち, 古典的スケール不変性があればプランクスケールの量は現れず, また質量は標準模型の範囲内では生成しない. さらに, TeV スケールに新しい粒子がある場合, Higgs 場の質量項は $m_R^2 = \frac{\lambda'}{16\pi^2} M^2 \log\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right)$ で与えられ, 電弱スケールは新しい粒子のスケールで特徴付けられることがわかる. このような古典的スケール不変性による標準模型の拡張は階層性問題に対する 1 つの対処法になっている.

非摂動くりこみ群の観点からの古典的スケール不変性

古典的スケール不変性を非摂動くりこみ群の観点から議論する. これは文献 [129] に基づく.

スカラー理論

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\bar{m}^2 \phi^2 - \frac{\bar{\lambda}}{4}\phi^4 \quad (4.19)$$

に対するくりこみ群方程式は

$$\partial_t m^2 = 2m^2 + \frac{L_1 \lambda}{1 + m^2}, \quad (4.20)$$

$$\partial_t \lambda = -\frac{L_2 \lambda^2}{(1 + m^2)^2} \quad (4.21)$$

と計算され, そのフローは図 4.1 のようになる. ただし, $m^2 = \bar{m}^2/\Lambda^2$ と $\lambda = \bar{\lambda}$ は無次元量であり, L_1, L_2 はループ因子で, カットオフスキームに依る. スカラー理論は自明な固定点のみが存在すると考えられている, すなわち, Landau 極問題または自明性の問題が知られている.*1

*1 自明な固定点 $(m^{*2}, \lambda^*) = (0, 0)$ のみが存在する. このとき連続極限を取ることを考えると, $\lambda = 0$ の軸上のみが候補となるため, 自由場の理論となってしまう.

m^2 と λ の 2 次元の理論空間に臨界線 (相境界) があり, 対称性の破れた相 ($m^2 < 0$) と回復している相 ($m^2 > 0$) を分けている. *2 臨界線は $\Lambda \rightarrow 0$ で質量ゼロ $m^2 = 0$ の理論である.

自明な固定点 $(m^{*2}, \lambda^*) = (0, 0)$ 周りのくりこみ群フローを考える. 自明な固定点周りで線形化されたくりこみ群方程式は

$$\partial_t \begin{pmatrix} m^2 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & L_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^2 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

となり, これを対角化して解くと,

$$m^2(t) + \frac{L_1}{2} \lambda(t) = e^{2t} \left(m_0^2 + \frac{L_1}{2} \lambda_0 \right) \quad (4.23)$$

を得る. ただし, m_0^2 と λ_0 は $m(t)$ と $\lambda(t)$ の初期値である. $m_0^2 = -\frac{L_1}{2} \lambda_0$ と取ると, このフローは一定になる. また, (4.21) 式の解は $m^2 = 0$ のとき $\lambda(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ となるので, $m_0^2 = -\frac{L_1}{2} \lambda_0$ とすると $m(t)|_{t \rightarrow 0} \rightarrow 0$ となる. したがって, 臨界線は

$$m_c^2(\lambda) = -\frac{L_1}{2} \lambda \quad (4.24)$$

で与えられ, 裸の質量 m_0 を臨界線上に置くと, くりこみ群のフローは臨界線上を動き, 自明な固定点に近づいていく.

次元のある量で $m_{c0}^2 = -\frac{L_1}{2} \lambda_0$ を書くと,

$$\bar{m}_{c0}^2 = \left(-\frac{L_1}{2} \bar{\lambda}_0 \right) \Lambda_0^2 \quad (4.25)$$

となり, 臨界線の位置は理論のカットオフによる 2 次発散項 Λ_0^2 が決めていることがわかる.

一方, くりこまれた質量 $\bar{m}_R^2$ は

$$\bar{m}_R^2 = \bar{m}_0^2 + \alpha \Lambda_0^2 + \beta \bar{m}_0^2 \quad (4.26)$$

のように与えられる, ただし, α と β は λ や $\log(\Lambda_0/\Lambda)$ による量である. これを書き直すと

$$\bar{m}_R^2 = (1 + \beta)(\bar{m}_0^2 + \alpha' \Lambda_0^2) \quad (4.27)$$

(4.23) 式を比較すると $\bar{m}_R^2 = \bar{m}(t) - \bar{m}_c(\lambda)$, $1 + \beta = e^{2t}$, $\alpha' \Lambda_0^2 = \bar{m}_{c0}^2$ なる関係が読み取れる. くりこまれた質量は裸の質量と 2 次発散 Λ_0^2 の差から生成されることがわかる. これは (4.16) 式を言っているにすぎない. したがって, 上で述べた通り, 裸の質量を 2 次発散項を厳密に一致させる (裸の質量を臨界線上に置く) と, 質量のフローは臨界線上を動き, くりこまれた質量は生成されない. これはくりこまれた質量は臨界線との距離として与えられるということである.

臨界線の位置, すなわち, (4.25) の右辺はくりこみのスキームに依る. このスキームの違いは理論空間の座標変換に対応すると考えられる (図 4.1 の右図参照). 摂動論における次元正則化は 2 次発散を自動

*2 場の量子論における臨界状態とは, $m/\Lambda \rightarrow 0$ のことである. 物性では相関長 ξ と格子の長さ a の比が $\xi/a \rightarrow \infty$ のようになることを意味する. つまり, これは 2 次相転移である. 第 3 章で議論したように, 2 次相転移では 2 点相関関数が強相関になる. ((3.55) 式を参照せよ.) くりこみ変換の過程で $m^2 = 0$ となるのが相転移点であり, 臨界状態であるという. 有効ポテンシャルが $m^2 = 0$ を相境界として対称性の破れた相 ($m^2 < 0$) と回復している相 ($m^2 > 0$) を分けている. くりこまれた質量 m^2 がくりこみ変換の過程でゼロのままという状態はまさに臨界状態が続いた状態である.

的に引き算しているが、これは理論空間上の臨界線を $m^2 = 0$ の軸上に置くようなスキームになっていると考えられる。このようにスキームの違いに依る臨界線の位置、つまり2次発散が物理的に意味があるとは言えないのではないか。たとえ2次発散を出すスキームを選んでも座標変換によっていつでも臨界線を $m^2 = 0$ となるように選ぶことができる。これは摂動論において、いつでも2次発散を引き算できることに対応すると考えられる。

$m^2 = 0$ の位置に臨界線を与えたとしよう。 m_0^2 を臨界線と離れた適当な場所にとると質量のくりこみ群フローは質量パラメータが relevant であるために低エネルギーで大きくなり、くりこまれた質量は Λ_0 のオーダーの大きさになってしまう。くりこまれた質量が Λ_0 に比べて十分小さくなるためには裸の質量 m_0 を臨界線の十分近くに置く必要がある。そうすれば質量のくりこみ群のフローは十分な時間をかけて自明な固定点に近づいていき、 $\Lambda \rightarrow 0$ では臨界線近くの理論 $m^2 \sim 0$ を得ることができる。以上の議論から、微調整問題は“裸の質量を臨界線の十分近くに置く”問題、あるいは“なぜヒッグス場は臨界に近い状態なのか”という問題と言える。

裸の質量を厳密に臨界線上に置くとくりこまれた質量はゼロのままになることを議論したが、摂動論における古典的スケール不変性を課すことはまさに“裸の質量を厳密に臨界線上に置いている”ことに対応する。今、臨界線が $m^2 = 0$ にあるので、一度、この微調整を認めて行えば量子異常による質量生成は起こらず、低エネルギーでも質量がゼロの理論（臨界状態の理論）が実現される。これが非摂動くりこみ群、つまり Wilson 流のくりこみ群による解釈である。

逆に言えば、裸の質量を臨界線上に厳密に置くという調整が何らかの対称性によって保証されていると考え、その対称性が古典的スケール対称性となる。古典的スケール対称性によって調整が行われると、(すなわち、理論を臨界にすると)

- スケール量子異常によって質量項は生成しない

という点が重要である。これは摂動論のくりこみ群方程式 (4.17) 式において $m(M_{\text{PL}}) = 0$ をすると質量のくりこみ群は走らないことと等価である。したがって、スケール不変な古典理論から質量項あるいはスケールをいかに生成するかということが次の課題である。

Coleman-Weinberg 機構によるスケールの生成

古典的スケール不変性を伴う標準模型において、電弱スケールの生成機構でよく知られているものは Coleman-Weinberg 機構 [130] である。スケール不変な裸の理論における Higgs・ポテンシャル $V_{\text{SM}}(H) = \lambda_H (H^\dagger H)^2$ が自己相互作用と標準模型の粒子によるループ効果を受けることで有効ポテンシャルとなる。それは真空期待値を変数として書くと

$$V_{\text{eff}}(v_h) = \frac{\lambda_H}{4} v_h^4 + \sum_{\alpha} \frac{N_{\alpha} M_{\alpha}^4}{64\pi^2} \left(\log \left(\frac{M_{\alpha}^2}{\mu^2} \right) - C_{\alpha} \right) \quad (4.28)$$

と与えられる。ただし、 $\alpha = W, Z, t$ で、それぞれの粒子に対して、 $N_W = 6$, $N_Z = 3$, $N_t = -12$ であり、質量 M_{α} は (4.12) 式, (4.13) 式と (4.15) 式で与えられる。 $C_t = 3/2$ と $C_{W,Z} = 5/6$ である。これら以外の粒子の寄与は小さいとして無視する。前述の議論の通り、Higgs 場の質量項は生成しないが、スケール対称性を破る寄与が量子補正によって生成される、つまりスケールが生成された。結果としてポテンシャルが歪み、非自明な真空 $v_h \neq 0$ が生成される。裸の理論ではスケールのない量 (g_2, g_1, y_t, λ_H) が与えられていたが、量子効果によって次元を伴う量 (g_2, g_1, y_t, v_h) に変わったことになる。これ

を次元変化 (dimensional transmutation) と呼ぶ。しかしながら、以上の標準模型の範囲内の議論では観測結果である $m_h = 125$ GeV および $m_t = 173$ GeV を実現することができないことがわかっている。

よって、何からの拡張が必要であり、Bardeen の議論にあるような TeV スケールにおける新しい物理の存在を示唆していると考え、古典的スケール不変性に基づく標準模型の拡張することは1つの方向性となっている。以下ではそのような拡張の下、新しい電弱スケールの生成の機構を提案する。

4.3 隠れたセクターと標準模型

標準模型の粒子の中、Higgs 場とのみ結合する新しい粒子を導入することを考え、その粒子を与える項を隠れたセクターと呼ぶことにする。隠れたセクターを与える方法は主に2つある。1つは Coleman-Weinberg 機構 [130] を用いる方法である。新しい粒子の寄与が Higgs・ポテンシャルに寄与を与えることで観測結果を説明する。この方法は摂動論に基づく議論であるので、摂動的効果によるものである [131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185]。この場合では質量項は生成しないが、輻射補正によるポテンシャルの補正によってスケールが生成され、非自明な真空が現れる。

もう1つは新しい粒子が強い相互作用をすることによって力学的にスケール対称性が破れ、それが Higgs 場に伝わることで電弱対称性が破れるというものである。こちらは非摂動的効果によるものとなる [186, 187, 188, 189, 190, 191, 192]。摂動的な方法との違いは力学的に質量項とスケールが生成されることである。

本論において提案するのは後者の非摂動的効果による電弱対称性の破れを説明する模型である。次節では模型の具体的な形と機構を説明する。

4.3.1 双線形スカラー凝縮する隠れたセクター

古典的スケール不変性に基づく標準模型の拡張として新しい模型を提案する [193]。その隠れたセクターにおけるラグランジアンを次のように与える：

$$\mathcal{L}_H = -\frac{1}{2}\text{tr}(F_{\mu\nu})^2 + ([D^\mu S_i]^\dagger D_\mu S_i) - \hat{\lambda}_S(S_i^\dagger S_i)(S_j^\dagger S_j) - \hat{\lambda}'_S(S_i^\dagger S_j)(S_j^\dagger S_i) + \hat{\lambda}_{HS}(S_i^\dagger S_i)H^\dagger H. \quad (4.29)$$

S_i は新たに導入された複素スカラー場で、隠れたカラーの自由度 N_c を持っている。また、添え字 i, j はフレーバーの足であり、 $i, j = 1, \dots, N_f$ となる。共変微分は $D_\mu S_i = \partial_\mu S_i - ig_H G_\mu S_i$, G_μ と与えられ、 $G_\mu = G_\mu^a T^a$ は隠れた $SU(N_c)$ ゲージ場である。 H は標準模型の Higgs 場である。このラグランジアンは $SU(N_c) \times U(N_f)$ の変換に対して不変となっており、古典的スケール不変性のためにスカラー場 S の質量項は禁止されている。

標準模型は $\mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{\text{SM}}|_{m_H \rightarrow 0}$ のように拡張された。この模型は次のような過程によって電弱スケールを説明する。まず、隠れたセクターの強い相互作用によってスカラー場が凝縮する [194, 195, 196, 190]:

$$\langle S_i^\dagger S_j \rangle = \left\langle \sum_{a=1}^{N_c} S_i^{a\dagger} S_j^a \right\rangle. \quad (4.30)$$

これはスケール不変性の力学的破れが起こったことを意味する。^{*3} これにより, Higgs・ポータル結合が Higgs の質量項になる: $m_H^2 = -\hat{\lambda}_{HS}\langle S^\dagger S \rangle$. 負の Higgs 質量項が生成されたことによって電弱対称性の破れが起こる, すなわち電弱スケールが生成されたことになる。^{*4} Coleman–Weinberg 機構との違いは, 我々の模型は質量項自身を力学的に生成している点である。

ラグランジアン (4.29) を解析することによってこの機構を確かめることができる。しかし, この模型は強い相互作用であり, 摂動論は使うことはできない。解析的な非摂動的手法は幾つか知られているが, ゲージ場の取り扱いが困難である。したがって, 強い相互作用による力学的スケール対称性の破れを記述する有効模型を構築し, その有効模型を解析することで双対スカラー凝縮 $\langle S^\dagger S \rangle$ などの物理量を定量的に評価する。

次節では有効模型とその解析手法を述べる。そして物理量がどのように得られるかを示す。

4.4 有効模型

ここで構築すべき有効模型は力学的スケール対称性の破れを記述する模型である。しかし, スケール不変性は量子効果 (スケール・アノマリー) によって破れるため [197, 198], 低エネルギーでの有効模型は一般にスケール不変性を陽に破った演算子で記述される:

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \left[(\partial_\mu S_i)^2 + \lambda_{HS}(S_i^\dagger S_i)H^\dagger H - \lambda_S(S_i^\dagger S_i)(S_j^\dagger S_j) - \lambda'_S(S_i^\dagger S_j)(S_j^\dagger S_i) - \lambda_{S6}(S_i^\dagger S_i)(S_j^\dagger S_j)(S_k^\dagger S_k) + \dots \right]. \quad (4.31)$$

ゲージ場は積分され, その量子効果は結合定数に含まれていると仮定する。ここで与えられている結合定数は有効結合定数であり, (4.29) 式で与えられているものとは異なる。また, スカラー場 S の質量項は生成されない。なぜならば, 4.2 節の議論の通り, 古典的スケール不変性が課されると質量のくりこみ群は走らないためである。

この作用 (4.31) は一般に無限個の演算子で張られているので, 有限のオーダーで打ち切る必要がある。この指導原理として Polchinski の定理 [16] を考える。スカラー場の理論において, 任意の高エネルギースケールで任意の演算子で張られた理論を与えたとしても低エネルギー領域ではくりこみ可能な演算子のみで張られた理論空間に帰着する。したがって, ここでは有効理論として $(S^\dagger S)^2$ 項までを取り入れた作用を考える。すなわち,

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{eff}} = \int d^4x \left[([\partial^\mu S_i]^\dagger \partial_\mu S_i) - \lambda_S(S_i^\dagger S_i)(S_j^\dagger S_j) - \lambda'_S(S_i^\dagger S_j)(S_j^\dagger S_i) + \lambda_{HS}(S_i^\dagger S_i)H^\dagger H \right] \quad (4.32)$$

とする。^{*5} この有効模型を力学的スケール対称性の破れを記述する模型とする。このときの秩序変数は $\langle S^\dagger S \rangle$ である。^{*6}

^{*3} この凝縮は $SU(N_c)$ 不変かつ $U(N_f)$ 不変である。

^{*4} ここで与えるのは電弱スケールの力学的起源であり, “負”の質量項が与えられる理由は説明しない。すなわち, (4.29) 式の λ_{HS} の前の符号が負になっていることは仮定である。

^{*5} この作用は明らかにスケール不変性を持っている。質量がない理論もくりこみ可能である [199]。したがって, (4.32) で与えられる理論もくりこみ可能な理論である。

^{*6} 実際には $\langle S^\dagger S \rangle$ を秩序変数とは言えない。なぜならば, スケール不変性はスケール・アノマリーによって陽に破れている

以下の議論では Higgs 場が真空を得ることを見るために標準模型に含まれる Higgs・ポテンシャル

$$V_{\text{SM}} = \lambda_H (H^\dagger H)^2 \quad (4.33)$$

を含めた理論を $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ として解析する。元のゲージ理論 (4.29) ではその強い相互作用によってスケールが生成される。ここで与えた有効理論 (4.32) では、Coleman–Weinberg 機構のような次元変化を用いて強い相互作用による非摂動的なスケール生成を記述する。

スカラー理論で記述されている有効作用は非摂動的に解析する必要がある。ここでは、解析手法として平均場近似の方法を採用する。

4.4.1 平均場近似の下での有効ポテンシャル

平均場近似は多体系の相互作用を 1 体系の相互作用に近似することである。1 体系の場合は経路積分はガウス積分となり、解析的に積分が実行できる。ここでは [200, 89] で与えられている方法を用いて平均場近似を行う。

$N_f = 1$ の場合

まず、 $N_f = 1$ ($\lambda'_S = 0$) の場合を考える。このとき、 $\lambda_S (S_i^\dagger S_i)(S_j^\dagger S_j)$ と $\lambda'_S (S_i^\dagger S_j)(S_j^\dagger S_i)$ は同じ相互作用になるので、 $\lambda_S \equiv \lambda'_S$ とする。平均場近似の下での有効ポテンシャルを求める。この方法は次の様に行う。

1. Bogoliubov–Valatin (BV) 変換された真空 $|0_B\rangle$ を定義する:

$$\langle 0_B | (S^\dagger S) | 0_B \rangle = \left\langle \sum_{a=1}^{N_c} (S^{a\dagger} S^a) \right\rangle =: f. \quad (4.34)$$

2. Wick の定理を用いて次のように真空と正規順序積に分ける:

$$(S^\dagger S) =: (S^\dagger S) : + f, \quad (4.35)$$

$$(S^\dagger S)^2 =: (S^\dagger S)^2 : + 2f(S^\dagger S) - f^2. \quad (4.36)$$

このときコロン:のついた項は正規順序になっており、真空 $|0_B\rangle$ の下で $\langle 0_B | : \mathcal{O} : | 0_B \rangle = 0$ となる。

3. (4.36) を (4.32) で与えられているラグランジアンに代入すると $\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{MFA}} + \mathcal{L}_I$ のように分離される。真空 $|0_B\rangle$ の下で $\mathcal{L}_{\text{MFA}}$ と $\mathcal{L}_I$ はそれぞれ,

$$\langle 0_B | \mathcal{L}_{\text{MFA}} | 0_B \rangle = (\partial^\mu S)^\dagger (\partial_\mu S) - M^2 (S^\dagger S) - \lambda_H (H^\dagger H)^2 + \lambda_S f^2, \quad (4.37)$$

$$\langle 0_B | \mathcal{L}_I | 0_B \rangle = 0 \quad (4.38)$$

となる。ただし、 $M^2 = 2\lambda_S f - \lambda_{HS} H^\dagger H$ である。

ためである。しかし、その破れはエネルギーの変化は $\log$ のであり、そのアノマリー効果による破れは力学的に破れに比べて十分に小さいと考えられる。また、質量項はアノマリーでは生成されないため、現れていない。したがって、 $\langle S^\dagger S \rangle$ を秩序変数と見なしてもよい。

4. $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ を $\mathcal{L}_{\text{MFA}}$ と近似し、スカラー場 S の経路積分を実行する．このとき、スカラー場を $S_i \rightarrow S_i + \chi_i$ のように背景場周りで展開し、ゆらぎ χ を積分すると有効ポテンシャルは

$$V_{\text{MFA}} = -\frac{\Gamma_{\text{MFA}}}{\Omega} = M^2(S^\dagger S) + \lambda_H(H^\dagger H)^2 - \lambda_S f^2 + \frac{2N_c}{2} \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} \log(-p^2 + M^2) \quad (4.39)$$

となる． Ω は時空の体積である．最後のループ積分に対応し、紫外発散を伴う．ここでは次元正則化を用いて

$$\frac{2N_c}{2} \int \frac{d^4 p}{i(2\pi)^4} \log(-p^2 + M^2) = -\frac{N_c}{32\pi^2} M^4 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi) - \log(M^2) + \frac{3}{2} \right) \quad (4.40)$$

を得る ($\epsilon = 4 - d$). $\overline{\text{MS}}$ スキームを用いて、発散項 ($1/\epsilon$) と定数 (γ_E と $\log(4\pi)$) を結合定数にくりこむと次の有効ポテンシャル V_{MFA} を得る:

$$V_{\text{MFA}} = M^2(S^\dagger S) + \lambda_H(H^\dagger H)^2 - \lambda_S f^2 + \frac{N_c}{32\pi^2} M^4 \log \frac{M^2}{\Lambda_H^2}. \quad (4.41)$$

ここで、 λ_S , λ_{HS} はくりこまれた結合定数、 $\Lambda_H = \mu e^{3/4}$ はくりこみ点である．

非摂動的なループの効果によってスケール Λ_H が生成されたことになる．得られた有効ポテンシャル (4.41) の最小値を求める、すなわち、自己無撞着方程式を解く:

$$\frac{\partial}{\partial S^a} V_{\text{MFA}} = \frac{\partial}{\partial f} V_{\text{MFA}} = \frac{\partial}{\partial H_i} V_{\text{MFA}} = 0. \quad (i = 1, 2) \quad (4.42)$$

初めの微分から $(S^a)^\dagger M^2 = (S^a)^\dagger (2\lambda_S f - \lambda_{HS} H^\dagger H) = 0$ を得る．これを満たす条件は3つ考えられる:

1. $\langle S \rangle \neq 0, \langle M^2 \rangle = 0$
2. $\langle S \rangle = 0, \langle M^2 \rangle = 0$
3. $\langle S \rangle = 0, \langle M^2 \rangle \neq 0$

これらの条件の中、どのポテンシャルが最小値となるかを探す必要がある．条件1の場合、 $\langle M^2 \rangle = 0$ から $2\lambda_S \langle f \rangle = \lambda_{HS} \langle H^\dagger H \rangle$ となっている．これを有効ポテンシャル (4.41) に代入すると

$$\langle V_{\text{MFA}} \rangle = \left(\lambda_H - \frac{\lambda_{HS}}{4\lambda_S} \right) \langle (H^\dagger H)^2 \rangle \quad (4.43)$$

を得る． $\langle f \rangle = \langle H^\dagger H \rangle = 0$ であれば任意の $\langle S \rangle \neq 0$ に対して $\langle V_{\text{MFA}} \rangle = 0$ となる．これは終点解 (end-point solution) と呼ばれる解になる [201, 202]．条件2の場合は明らかに $\langle V_{\text{MFA}} \rangle = 0$ を得る．条件3の場合は

$$C := 4\lambda_H \lambda_S - \lambda_{HS}^2 > 0 \quad (4.44)$$

を満たせば成立する．ただし，ここではすべての結合定数は正の値をとるものとする．^{*7} このとき，Higgs 場の真空期待値とスカラー凝縮およびそのときのポテンシャルの値はそれぞれ，

$$|\langle H \rangle|^2 = \frac{v_h}{2} = \frac{\lambda_{HS}}{C} \exp\left(\frac{32\pi^2 \lambda_H}{N_c C} - \frac{1}{2}\right) \Lambda_H^2, \quad (4.45)$$

$$\langle f \rangle = \frac{2\lambda_H}{C} \exp\left(\frac{32\pi^2 \lambda_H}{N_c C} - \frac{1}{2}\right) \Lambda_H^2, \quad (4.46)$$

$$\langle V_{\text{MFA}} \rangle = -\frac{N_c}{64\pi^2} \exp\left(\frac{64\pi^2 \lambda_H}{N_c C} - 1\right) \Lambda_H^4 < 0 \quad (4.47)$$

のようになり，このときにポテンシャルの最小値となることがわかる．すべての真空はスケール Λ_H によって特徴付けられている．また，この近似の範囲での Higgs 場の質量は

$$m_{h0}^2 = |\langle H \rangle|^2 \left(\frac{16\lambda_H^2 \lambda_S}{C} + \frac{N_c \lambda_{HS}^2}{8\pi^2} \right) \quad (4.48)$$

と与えられる． λ_{HS} が小さいとして近似すると $m_{h0}^2 \simeq 4\lambda_H |\langle H \rangle|^2 = 2\lambda_{HS} \langle f \rangle$ となり，Higgs 場の質量はスカラー凝縮に比例していることがわかる．この真空は隠れたカラー対称性 $\text{SU}(N_c)$ を破らない真空である．したがって Higgs 機構のようにゲージ場が質量を持つプロカ場にはならない．

$N_f > 1$ の場合

次に任意のフレーバーの場合を考える． $N_f = 1$ の場合と同様に平均場近似を行う．その際の Wick の定理は次のように与えられる．

$$(S_i^\dagger S_j) = (S_i^\dagger S_j) : + f_{ij}, \quad (4.49)$$

$$(S_i^\dagger S_j)(S_j^\dagger S_i) = (S_i^\dagger S_j)(S_j^\dagger S_i) : + 2f_{ij}(S_j^\dagger S_i) - |f_{ij}|^2, \quad (4.50)$$

ただし，

$$f_{ij} := \langle (S_i^\dagger S_j) \rangle = \left\langle \sum_{a=1}^{N_c} S_i^{a\dagger} S_j^a \right\rangle \quad (4.51)$$

と定義した．これを (4.32) で与えられているラグランジアンに代入すると，

$$\mathcal{L}_{\text{MFA}} = (\partial^\mu S)^\dagger (\partial_\mu S) - M^2 (S^\dagger S) - \lambda_H (H^\dagger H)^2 + \lambda_S f^2 \quad (4.52)$$

を得る． $N_f = 1$ の場合と同じステップで有効ポテンシャルを導出すると

$$V_{\text{MFA}} = M^2 (S_i^\dagger S_i) + \lambda_H (H^\dagger H)^2 - N_f (N_f \lambda_S + \lambda'_S) f^2 + \frac{N_c N_f}{32\pi^2} M^4 \log \frac{M^2}{\Lambda_H^2} \quad (4.53)$$

を得る．この有効ポテンシャルに対して自己無撞着方程式 (4.42) を計算すると， $N_f = 1$ の場合と同様に議論によって

$$G := 4N_f \lambda_H \lambda_S - N_f \lambda_{HS}^2 + 4\lambda_H \lambda'_S > 0 \quad (4.54)$$

^{*7} $O(N)$ スカラー模型における真空構造の解析は文献 [203, 204, 205, 201] で議論されてきた．その模型が $\langle \phi \rangle \neq 0$ の真空を実現することを議論したのは [203] である． $\langle \phi^2 \rangle \neq 0$ かつ $\langle \phi \rangle = 0$ の真空が存在することを指摘したのは [204] である．それらの詳細な解析は [205] で行われた．その後，[201, 202] が終点解が真空となる場合を指摘した．我々の模型では古典的スケール不変性によって裸の質量がないため，真空として $\phi^2 \neq 0$ の真空が実現されている．

を満たすとき、真空として $\langle S \rangle = 0$, $\langle M^2 \rangle \neq 0$ が選ばれる。ここで、

$$M^2 = 2(N_f \lambda_S + \lambda'_S) f - \lambda_{HS} H^\dagger H \quad (4.55)$$

である。Higgs 場の真空期待値とスカラー凝縮は

$$|\langle H \rangle|^2 = \frac{v_h}{2} = \frac{N_f \lambda_{HS}}{G} \exp \left(\frac{32\pi^2 \lambda_H}{N_c G} - \frac{1}{2} \right) \Lambda_H^2, \quad (4.56)$$

$$\langle f \rangle = \frac{2\lambda_H}{G} \exp \left(\frac{32\pi^2 \lambda_H}{N_c G} - \frac{1}{2} \right) \Lambda_H^2. \quad (4.57)$$

Higgs 場の質量は

$$m_{h0}^2 = |\langle H \rangle|^2 \left(\frac{16\lambda_H^2 (N_f \lambda_S + \lambda'_S)}{G} + \frac{N_c N_f \lambda_{HS}^2}{8\pi^2} \right) \quad (4.58)$$

と得られる。

結合定数のくりこみ群

ここで結合定数 λ_S のくりこみ群を $N_f = 1$ かつ $\lambda_{HS} = 0$ の場合で考えてみる。便宜的に $\chi = 2\lambda_S f$ と変換して

$$V_{\text{MFA}}(\chi; \lambda_S) = -\frac{1}{4\lambda_S} \chi^2 + \frac{N_c}{32\pi^2} \chi^2 \log \frac{\chi}{\Lambda_H^2} \quad (4.59)$$

としておく。くりこみ群方程式は

$$\frac{\partial^2 V_{\text{MFA}}}{\partial f^2} (e^t \chi; \lambda_S) = \frac{\partial^2 V_{\text{MFA}}}{\partial f^2} (\chi; \lambda_S(t)) \quad (4.60)$$

から

$$\lambda_S(t) = \frac{\lambda_S}{1 - \frac{N_c \lambda_S}{8\pi^2} t} \quad (4.61)$$

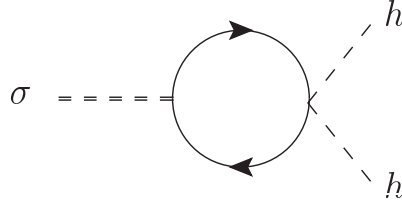
と得られる。ただし、 $t = \log(\chi/\mu^2)$ とし、 $t = 0$ のときに $\lambda_S > 0$ と定義した。明らかにこの解は Landau 極を $t = t_c := 8\pi^2/N_c \lambda_S$ で持つ。今の解析では摂動論を用いていないので結合定数が大きくなっても破綻はしない。すなわち、 $t > t_c$ の領域も許されることになる。このとき、結合定数 $\lambda_S(t)$ は負の値となる。

一方、有効ポテンシャルの χ の変化による振る舞いを考えてみる：

$$V_{\text{MFA}}(\chi) = -\frac{1}{4\lambda_S} \chi^2 + \frac{N_c}{32\pi^2} \chi^2 \log \frac{\chi}{\Lambda_H^2}. \quad (4.62)$$

χ が小さい領域では最低次項 (第1項目) がループ補正項 (第2項目) よりも大きいために、ポテンシャルは負の傾きを持つことになる。 χ が大きくなるにつれてループ補正項が大きくなり、

$$\chi_m := \Lambda_H^2 \exp \left(\frac{8\pi^2}{N_c \lambda_S} \right) \quad (4.63)$$

図 4.2 σ の Higgs への崩壊

で最低次項とループ補正項の大小が入れ替わり, $\chi > \chi_m$ の領域ではポテンシャルの傾きが正になる. $\chi = \chi_m$ はポテンシャルの最小値となる. このとき

$$t = t_m := \log\left(\frac{\chi_m}{\mu^2}\right) = e^{3/2} \frac{8\pi^2}{N_c \lambda_S} > t_c \quad (4.64)$$

となっているので, ^{*8} 結合定数 $\lambda_S(t)$ は負になっている [204]. したがって, 非自明な真空 $\langle \chi \rangle \neq 0$ を得るには Landau 極を超えている必要があり摂動論では得られない真空であることがわかる.

また, $t \rightarrow \infty$, すなわち場 χ が大きいところでは $\lambda(t) \rightarrow 0_-$ であり, 漸近的自由な振る舞いになっていることがわかる.

4.5 暗黒物質の候補

前節では真空構造を平均場近似の下で評価した. 次にこの模型には暗黒物質の候補が考えられることを見る.

真空 $|0_B\rangle$ でのスカラー凝縮は (4.51) のように与えた. 今, この真空の周りの励起場を考える:

$$\langle 0_B | (S_i^\dagger S_j) | 0_B \rangle = f_{ij} = \langle f_{ij} \rangle + Z_\sigma^{1/2} \delta_{ij} \sigma + Z_\phi^{1/2} t_{ji}^\alpha \phi^\alpha. \quad (4.65)$$

σ と $\phi^\alpha (\alpha = 1, \dots, N_f^2 - 1)$ が真空 $\langle f_{ij} \rangle$ からの励起場であり, スカラー場である. Z_σ と Z_ϕ はそれらの場のくりこみで, 正準次元が2である. t_{ji}^α はフレーバー空間の $SU(N_f)$ 群の生成子で, $\text{Tr}(t^\alpha t^\beta) = \delta^{\alpha\beta}/2$ のように規格化されているとする.

この模型において $U(N_f)$ フレーバー対称性が破れないと仮定すると

$$\langle f_{ij} \rangle = \delta_{ij} f \text{ and } \langle \sigma \rangle = \langle \phi^\alpha \rangle = 0 \quad (4.66)$$

とできる. なぜなら, $\langle \sigma \rangle \neq 0$ の場合でも f に吸収して $\langle \sigma \rangle = 0$ ととることができるからである. これにより, 真空構造は $\langle \sigma \rangle = \langle \phi^\alpha \rangle = 0$ の場合, 前節で評価した真空を用いることができる. σ は図 4.2 のような過程を通して Higgs 場に崩壊する. 一方, ϕ^α はフレーバー対称性が破れないとすると Higgs への崩壊は禁止され, 安定な粒子となる. したがって, ϕ^α が暗黒物質の候補になりうるということがわかる.

ϕ^α が暗黒物質候補であるから, その質量および残存量を計算する. 観測の結果を再現するような条件でのスピン独立な断面積と暗黒物質の質量が許される領域を以下で評価する. (4.65) を (4.52) に代入す

^{*8} $\Lambda_H = \mu e^{3/4}$ であることを用いた.

ることでラグランジアンを

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{\text{MFA}} = & (\partial^\mu S_i^\dagger \partial_\mu S_i) - M^2(S_i^\dagger S_i) + N_f(N_f \lambda_S + \lambda'_S) Z_\sigma \sigma^2 + \frac{\lambda'_S}{2} Z_\phi \phi^\alpha \phi^\alpha \\ & - 2(N_f \lambda_S + \lambda'_S) Z_\sigma^{1/2} \sigma (S_i^\dagger S_i) - 2\lambda'_S Z_\phi^{1/2} (S_i^\dagger t_{ij}^\alpha \phi^\alpha S_j) \\ & + \lambda_{HS} (S_i^\dagger S_i) H^\dagger H - \lambda_H (H^\dagger H)^2\end{aligned}\quad (4.67)$$

と得る. ラグランジアン (4.67) から 2 点関数を計算し, その極を求めることで Higgs 場や σ , ϕ^α の質量を求めることができる. 今, Higgs 場を $H^T = (\chi^+, (v_h + h + i\chi^0)/\sqrt{2})$ と定義する. このとき, χ^+ と χ^0 は Nambu–Goldstone 場である. それぞれの場の逆 2 点関数を 1 ループのオーダーで計算すると

$$\Gamma_\phi^{\alpha\beta}(p^2) = Z_\phi \delta^{\alpha\beta} \lambda'_S \Gamma_\phi(p^2) = Z_\phi \delta^{\alpha\beta} \lambda'_S [1 + 2\lambda'_S N_c \Gamma(p^2)], \quad (4.68)$$

$$\Gamma_\sigma(p^2) = 2Z_\sigma N_f (N_f \lambda_S + \lambda'_S) [1 + 2N_c (N_f \lambda_S + \lambda'_S) \Gamma(p^2)], \quad (4.69)$$

$$\Gamma_{h\sigma}(p^2) = -2Z_\sigma^{1/2} v_h \lambda_{HS} (N_f \lambda_S + \lambda'_S) N_f N_c \Gamma(p^2), \quad (4.70)$$

$$\Gamma_h(p^2) = p^2 - m_{h1}^2 + (v_h \lambda_{HS})^2 N_f N_c (\Gamma(p^2) - \Gamma(0)) \quad (4.71)$$

となる. ここで, $m_{h1}^2 := m_{h0}^2 + \delta m_h^2$ で, m_{h0}^2 は (4.58) で与えたものであり, δm_h^2 は標準模型の量子補正による寄与を表す. Higgs 場のくりこみからの補正はここでは無視する. $\Gamma(p^2)$ は 1 ループの積分因子で,

$$\begin{aligned}\Gamma(p^2) &= \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + M_0^2)((k-p)^2 - M_0^2)} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(2 - \log \left[\frac{M_0^2}{\Lambda_H^2 \exp(-3/2)} \right] - 2(4/x - 1)^{1/2} \arctan(4/x - 1)^{-1/2} \right)\end{aligned}\quad (4.72)$$

と評価される. ただし, $x := p^2/M_0^2$, $M_0^2 := 2(N_f \lambda_S + \lambda'_S) \langle f \rangle - (\lambda_{HS}/2)v_0^2$ である.

まず, ϕ^α の質量と場のくりこみ Z_ϕ を評価する. (4.68) のゼロ点を読み取ることで暗黒物質の質量を求められる:

$$\Gamma_\phi^{\alpha\beta}(p^2 = m_{\text{DM}}^2) = 0. \quad (4.73)$$

また, 場のくりこみ Z_ϕ は運動量 p^2 の係数であるから,

$$\begin{aligned}Z_\phi^{-1} &= 2(\lambda'_S)^2 N_c \frac{d\Gamma}{dp^2} \Big|_{p^2=m_{\text{DM}}^2} \\ &= \frac{2(\lambda'_S)^2 N_c}{16\pi^2 m_{\text{DM}}^2} \left(4[y(4-y)]^{-1/2} \arctan(4/y - 1)^{-1/2} - 1 \right)\end{aligned}\quad (4.74)$$

と計算される. $y = m_{\text{DM}}^2/M_0^2$ とした.

次に, Higgs 場と場 σ の質量を求める. 両者は混合してるのでそれらの逆 2 点関数 (4.69), (4.70), (4.71) で定義される混合行列

$$\Gamma(p^2) = \begin{pmatrix} \Gamma_h(p^2) & \Gamma_{h\sigma}(p^2) \\ \Gamma_{h\sigma}(p^2) & \Gamma_\sigma(p^2) \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

を対角化し, そのゼロ点を評価することでそれらの質量を求めることができる.

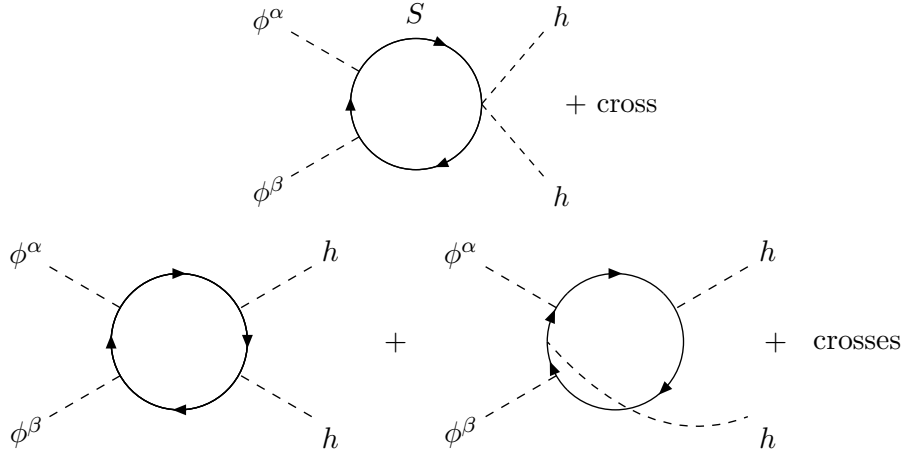


図 4.3 暗黒物質と Higgs との相互作用. λ_{HS} は小さい値をとるものとする, $\lambda_{HS}^2(v_h/M_0)^2 \ll \lambda_{HS}$ より, 上図の方が下図よりも寄与が大きい.

ϕ^α の暗黒物質としての残存量を評価するために ϕ^α がスカラー場 S のループを通して Higgs 場に対消滅する過程を考える. 図 4.3 のようなループを評価し, 有効相互作用 $\phi^2 h^2$ の有効結合定数 κ_s と κ_t を求めると,

$$\kappa_{s(t)} \delta^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta} \Gamma_{\phi^2 h^2}(M_0, m_{\text{DM}}, \epsilon = 1(-1)), \quad (4.76)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi^2 h^2}(M_0, m_{\text{DM}}, \epsilon) &= \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{1}{[(k-p)^2 - M_0^2][k^2 - M_0^2][(k+p')^2 - M_0^2]} \Big|_{p=\epsilon p'=(m_{\text{DM}}, 0, 0, 0)} \\ &= \frac{Z_\phi N_c (\lambda'_S)^2 \lambda_{HS}}{4\pi^2} \\ &\times \left(\lambda_{HS} \frac{v_h^2}{4M_0^4} - \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{m_{\text{DM}}^2} \left(\frac{\arctan(4/y-1)^{-1/2}}{(4/y-1)^{-1/2}} - \frac{\arctan(1/y-1)^{-1/2}}{(1/y-1)^{-1/2}} \right) \text{ for } \epsilon = 1 \\ \frac{2 \arctan(4/y-1)^{-1/2}}{M_0 m_{\text{DM}} (4-y)^{1/2}} \text{ for } \epsilon = -1 \end{array} \right\} \right) \end{aligned} \quad (4.77)$$

となる.^{*9} ただし, $y := m_{\text{DM}}/M_0^2$ とした. ϵ は s -チャネル (+1) と t -チャネル (-1) を表している.

暗黒物質の残存量は次のように与えられる:

$$\Omega \hat{h}^2 = (N_f^2 - 1) \frac{Y_\infty s_0 m_{\text{DM}}}{\rho_c / \hat{h}^2}. \quad (4.78)$$

^{*9} σ や ϕ^α の質量がスカラー場 S の質量よりも小さい場合 ($m_{\text{DM}}, m_\sigma > M_0$), この量は複素数になる. このような状況は QCD の NJL 模型の重い中間子がクォークのループを通して軽い粒子へと消滅する際に, 重い中間子がクォークよりも軽い場合に起こりうる. このとき, $\kappa_{s(t)}$ の実部を評価すると実験結果をよく再現していることが経験上わかっている. したがって, ここでの解析でも $\text{Re}[\kappa_{s(t)}]$ を用いて評価することとする. 一方, $m_{\text{DM}}, m_\sigma > 2M_0$ のとき, σ や ϕ^α が S の 2 体に崩壊する. 今の有効模型の範囲では閉じ込めの効果が含まれていないのでこのようなことが起こりうる. したがって, $m_{\text{DM}}, m_\sigma < 2M_0$ となるような場合を以下では考える.

ただし, $s_0 = 2890 \text{ cm}^{-3}$ は現在のエントロピー密度, $\rho_c/\hat{h}^2 = 1.05 \times 10^{-5} \text{ GeV cm}^{-3}$ は臨界密度で, $\hat{h}$ は無次元のハッブル・パラメータである. Y_∞ は暗黒物質の数密度とエントロピーの比の漸近値であり, これは次のボルツマン方程式を解くことで得られる:

$$\frac{dY}{dx} = -0.264 g_*^{1/2} \frac{m_{\text{DM}} M_{\text{PL}}}{x^2} \langle \sigma v \rangle (Y^2 - \bar{Y}^2). \quad (4.79)$$

ただし, $x := m_{\text{DM}}/T$ で, T は温度である. $M_{\text{PL}} = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV}$ はプランク質量, g_* は有効自由度であり, 全相対論的粒子の自由度を足しあげによって

$$g_* = \sum_{i=\text{boson}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermion}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 \quad (4.80)$$

と与えられる. ここで, g_i と T_i はそれぞれ各粒子の自由度と温度である. 今の模型の場合, $g_* = 106.75 + N_f^2 - 1$ となる. 標準模型と隠れたセクターの粒子数の対応する. また, $\bar{Y}$ は平衡状態での Y で値であり, 非相対論的な場合,

$$\bar{Y} = 0.145 \frac{g_i}{g_{*s}} x^{3/2} e^{-x} \quad (4.81)$$

で定義される. g_{*s} は

$$g_{*s} = \sum_{i=\text{boson}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermion}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (4.82)$$

と定義されている. ^{*10} Y_∞ は (4.79) 式の解の $x \rightarrow \infty$ での値として与えられる. ^{*11}

$\langle \sigma v \rangle$ は対消滅散乱断面積であり, 今の場合,

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{32\pi m_{\text{DM}}^3} \sum_{I=W,Z,t,h} (m_{\text{DM}}^2 - m_I^2)^{1/2} a_I + \mathcal{O}(v^2) \quad (4.83)$$

である. $I = W, Z, t, h$ はそれぞれ, W ボソン, Z ボソン, t はトップ・クォーク, h は Higgs を表し, それらの質量は $m_W = 80.4 \text{ GeV}$, $m_Z = 90.2 \text{ GeV}$, $m_t = 174 \text{ GeV}$ である. a_I はそれぞれの場に対して

$$a_{W(Z)} = 4(2)[\text{Re}(\kappa_s)]^2 \Delta_h^2 m_{W(Z)}^4 \left(3 + 4 \frac{m_{\text{DM}}^4}{m_{W(Z)}^4} - 4 \frac{m_{\text{DM}}^2}{m_{W(Z)}^2} \right), \quad (4.84)$$

$$a_t = 24[\text{Re}(\kappa_s)]^2 \Delta_h^2 m_t^2 (m_{\text{DM}}^2 - m_t^2), \quad (4.85)$$

$$a_h = [\text{Re}(\kappa_s)]^2 \left(1 + 24\lambda_H \Delta_h \frac{m_W^2}{g^2} \right)^2 \quad (4.86)$$

と定義される. κ_s は (4.76) で求められたのもであり, $g = 0.65$ は $\text{SU}(2)_L$ のゲージ結合定数, $\Delta_h = (4m_{\text{DM}}^2 - m_h^2)^{-1}$ は Higgs 場のプロパゲータである.

以上の量を数値的評価する自由パラメータは $\Lambda_H, \lambda_S, \lambda'_S, \lambda_{HS}, \lambda_H, N_f, N_c$ の7つである. 一方, 入力パラメータとなるのは

^{*10} g_* は全相対論的なエネルギー密度 $\rho_r = (\pi^2/30h^3c^3)g_*(k_B T)^4$ の中で定義されるのに対し, g_{*s} はエントロピー $s = (2\pi^2/45h^3c^3)g_{*s}(k_B T)^3$ の中で定義される. 違いは温度のべきである. 両者の温度の依存性を見ると温度が $T > 10^{-4} \text{ GeV}$ の領域ではあまり違いがない. したがって, $g_* \simeq g_{*s}$ として計算する.

^{*11} ボルツマン方程式の導出や以下でのスピン独立な弾性断面積の導出等は文献 [206, 207] などを参照のこと.

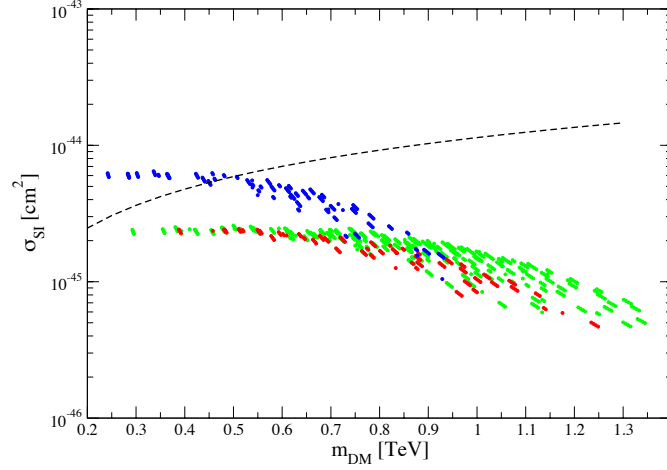


図 4.4 $m_{\text{DM}}-\sigma_{\text{SI}}$ プロット. 黒破線は直接観測実験 LUX の上限値 [211] であり, この線より上は除外されている. $N_f = 2, N_c = 5$ (赤), $N_f = 2, N_c = 8$ (緑), $N_f = 3, N_c = 6$ (青) の場合についてプロットした.

- 粒子の質量: $m_h = 125 \text{ GeV}$
- Higgs 場の真空期待値: $v_h = 246 \text{ GeV}$
- 暗黒物質の残存量: $\Omega \hat{h}^2 \simeq 0.12$

である. 残存量 $\Omega \hat{h}^2$ は Planck の観測結果 [12] と 2σ レベルで合うようにしている. 3 つの入力パラメータを満たすようなパラメータ領域を求める.

その領域でのスピン独立な弾性断面積 σ_{SI} [208] を評価する:

$$\sigma_{\text{SI}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\kappa_t \hat{r} m_N^2}{m_{\text{DM}} m_h^2} \right)^2 \left(\frac{m_{\text{DM}}}{m_N + m_{\text{DM}}} \right)^2. \quad (4.87)$$

この断面積は暗黒物質の核子との散乱を評価したものであり, 暗黒物質の直接検出で用いられる. ここで, κ_t は (4.76) で求められるもので, $m_N \simeq 1 \text{ GeV}$ は核子の質量である. $\hat{r}$ は核子の行列要素であり, 一般に格子ゲージ理論によって評価される量である. ここでは $\hat{r} \sim 0.3$ を用いる [209].^{*12}

具体的な例をここで示す. 自由パラメータを次のように決める:^{*13}

$$\Lambda_H = 0.501, \lambda_S = 1.20, \lambda'_S = 5.38, \lambda_{HS} = 0.0525, \lambda_H = 0.130, N_f = 2, N_c = 5. \quad (4.88)$$

このパラメータの下で, 物理量はそれぞれ,

$$f_0 = 0.0749 \text{ TeV}, M_0 = 1.08 \text{ TeV}, m_{\text{DM}} = 0.801 \text{ TeV}, m_\sigma = 1.98 \text{ TeV} \quad (4.89)$$

となる. また, Higgs の質量は $m_h = 126 \text{ GeV}$, 残存量は $\Omega \hat{h}^2 = 0.121$, 有効結合定数は $\kappa_s = 0.3988$, $\kappa_t = 0.3089$ となる. このとき, スピン独立な弾性断面積は $\sigma_{\text{SI}} = 1.68 \times 10^{-45} \text{ cm}^2$ となる.

^{*12} 最近の改善された場合での格子シミュレーションによる結果 [210] を用いると断面積の結果は約 20% ほど小さくなる. しかし, 今の近似の範囲ではその差は大きな影響を与えないため, 問題視しない.

^{*13} 実際の解析では, $\Lambda_H = 1$ とし, 結合定数を適当に与える. そのときの Higgs 場の真空期待値 v_h と得られるべき値 0.246 TeV との比 $f := 0.246/v_h$ を定義する. この量が $\Lambda_H = f \text{ TeV}$ と定義すると, その他の次元のある量は $\Lambda_H = 1$ のときに得られた値に f をかけることで得られる.

7つのパラメータを振り, 3つの入力パラメータを満たす領域における暗黒物質とスピン独立な弾性断面積を評価すると図4.4のようになる. 将来, 暗黒物質の直接検出 [212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 211, 220, 221] でこの領域内の暗黒物質が検出されれば, この模型における ϕ^a はその候補となりうる事がわかる.

4.6 電弱 1 次相転移

次に有限温度における電弱相転移, すなわち, 有限温度効果による電弱対称性の回復を議論する [222]. 特に, 強い電弱 1 次相転移 ($v_h/T_c \gtrsim 1$) は電弱バリオン数生成に重要な役割を果たす [223, 224, 225, 226]. それは Sakharov の三条件 [227]

- バリオン数を破る相互作用がある
- C および CP 対称性の破れ
- 熱平衡からの離脱

の内, 3つ目の条件に相当する. 我々の模型ではバリオン数を破る相互作用や C と CP 対称性を破る相互作用は入っていないため, このままではバリオン数生成を説明することはできない. しかしながら, バリオン数生成を説明する模型への拡張や Higgs・ポテンシャルの実験的観測において電弱相転移現象を調べておくことは重要である.

4.6.1 有限温度有効ポテンシャル

有限温度における有効ポテンシャルは次のように与えられる [228, 229, 230, 231]:

$$V_{\text{eff}}(f, h, T) = V_{\text{MFA}}(f, h) + V_{\text{CW}}(h) + V_{\text{FT}}(f, h, T) + V_{\text{RING}}(h, T). \quad (4.90)$$

以下ではこれらの導出について [229] を参考に議論していく.

ゼロ温度の寄与

量子効果においてゼロ温度の寄与は $V_{\text{MFA}}(f, h)$ と $V_{\text{CW}}(h)$ である. 前者はスカラー場 S のループ効果であり, 付録 G の (G.4) 式を用いると (4.39) において, スカラー場 S のループ効果は最後の項に対応している. したがって, 有効ポテンシャル $V_{\text{MFA}}(f, h)$ は

$$V_{\text{MFA}}(f, h) = M^2(S_i^\dagger S_i) + \lambda_H(H^\dagger H)^2 - N_f(N_f \lambda_S + \lambda'_S) f^2 + \frac{N_c N_f}{32\pi^2} M^4 \log \frac{M^2}{\Lambda_H^2} \quad (4.91)$$

となって (4.53) 式と同じものを得る. このとき $\langle S_i^a \rangle = 0$ となるような真空が選ばれるとして $S_i^a = 0$ とおいた. また, Higgs 場は H は $h/\sqrt{2}$ とした.

後者は標準模型の粒子のループ効果に対応する Coleman–Weinberg ポテンシャル $V_{\text{CW}}(h)$ の寄与である. このポテンシャルは

$$V_{\text{CW}}(h = v_h) = 0, \quad \left. \frac{dV_{\text{CW}}(h)}{dh} \right|_{h=v_h} = 0 \quad (4.92)$$

を満たすように規格化されているとする. ただし, $v_h = \langle h \rangle|_{T=0} = 246 \text{ GeV}$ とする.

ゲージ場に対するゲージ固定は R_ξ ゲージを用いて

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a - \xi M_2 \chi^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu B_\mu - \xi M_1 \chi^2)^2 \quad (4.93)$$

と与える. ただし, $M_2 := g_2 v_h/2$, $M_1 := g_1 v_h/2$, χ^a は Higgs 場の NG ボソンである. R_ξ ゲージの下で, Higgs の NG ボソン, ゲージ場とゴーストの運動項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{R_\xi} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a{}^2 + \frac{1}{2} M_2^2 A_\mu^a{}^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu a})^2 + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \chi)^2 - \xi M_2^2 \chi^2] + \bar{c}(\partial^2 + \xi M_2^2)c \\ & - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2} M_1^2 B_\mu^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu B^\mu)^2 + \frac{1}{2} [(\partial_\mu \chi)^2 - \xi M_1^2 \chi^2] + \bar{c}(\partial^2 + \xi M_1^2)c \end{aligned} \quad (4.94)$$

となる. 以下の計算では Landau ゲージ $\xi = 0$ を用いる. このとき, NG ボソンの質量, ゴーストの質量はゼロになる. NG ボソンはポテンシャルの最小値で質量ゼロになるが, その寄与をここでは無視する.

各粒子のゼロ温度でのループ効果は付録 G の (G.4) 式と (G.10) 式を評価し, (4.92) の条件を満たすようくりこみを行えばポテンシャルを求めることができる. 結果として

$$\begin{aligned} V_{\text{CW}}(h) = & C_0(h^4 - v_h^4) + \frac{1}{64\pi^2} \left[6\tilde{m}_W^4 \log\left(\frac{\tilde{m}_W^2}{m_W^2}\right) + 3\tilde{m}_Z^4 \log\left(\frac{\tilde{m}_Z^2}{m_Z^2}\right) \right. \\ & \left. + \tilde{m}_h^4 \log\left(\frac{\tilde{m}_h^2}{m_h^2}\right) - 12\tilde{m}_t^4 \log\left(\frac{\tilde{m}_t^2}{m_t^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.95)$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned} C_0 \simeq & -\frac{1}{64\pi^2 v_h^4} (3m_W^4 + (3/2)m_Z^4 + (3/4)m_h^4 - 6m_t^4), \\ \tilde{m}_W^2 = & (m_W/v_h)^2 h^2, \quad \tilde{m}_Z^2 = (m_Z/v_h)^2 h^2, \quad \tilde{m}_t^2 = (m_t/v_h)^2 h^2, \\ \tilde{m}_h^2 = & 3\lambda_H h^2 + \frac{\lambda_{HS}}{64\pi^2} \left\{ 7N_c N_f \lambda_{HS} h^2 - 4f N_c N_f (N_f \lambda_S + \lambda'_S) \right. \\ & \left. - 2N_c N_f [-3\lambda_{HS} h^2 + 4f(N_f \lambda_S + \lambda'_S)] \log \frac{4f(N_f \lambda_S + \lambda'_S) - \lambda_{HS} h^2}{2\Lambda_H^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.97)$$

と定義した.

ゼロ温度では Higgs 場の質量 $\tilde{m}_h^2$ は (4.91) の V_{MFA} だけでなく, この標準模型の量子補正に対応する V_{CW} から得られる:

$$\delta m_h^2 \simeq -16C_0 v_h^2. \quad (4.98)$$

これは V_{MFA} から得られる m_h に対して約 7% の寄与を与える.

有限温度効果

ループ効果からくる有限温度効果は付録 G にまとめる. は付録 G に示してある. ボソンに対しては (G.5) 式で与えられ, フェルミオンに対しては (G.11) で与えられる. したがって, 今の模型では

$$\begin{aligned} V_{\text{FT}}^1(f, h, T) = & \frac{T^4}{2\pi^2} \left(2N_c N_f J_B(M^2/T^2) + J_B(m_h^2/T^2) \right. \\ & \left. + 6J_B(m_W^2/T^2) + 3J_B(m_Z^2/T^2) - 12J_F(m_t^2/T^2) \right) \end{aligned} \quad (4.99)$$

となる.

リング・ダイアグラムの効果

有限温度の系では粒子は温度効果による質量 $\Pi(\omega_n, \vec{p})$ を持つ。まず、スカラー場を例にリング・ダイアグラムからくる寄与を説明する。スカラー場の場合、熱質量 $\Pi^1(\omega_n, \vec{p})$ は次のように1ループを評価することで得られる:

$$\Pi^1(\omega_n, \vec{p}) = \Pi^1(0) = 3\lambda T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \mu^2} = \frac{\lambda}{4} T^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right). \quad (4.100)$$

この熱質量を含めた場合の質量 $\Pi(\omega_n, \vec{p})$ は

$$\Pi(\omega_n, \vec{p}) = \Pi(0) = 3\lambda T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + \mu^2 + \Pi^1(0)} = \frac{\lambda}{4} T^2 \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\mu}{T}\right)\right) \quad (4.101)$$

となって、 $\Pi(0) \simeq \lambda T^2/4$ を得る。この寄与を含めて有効ポテンシャルを評価すると

$$\begin{aligned} V(\mu, T) &= \frac{1}{2} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \log(\beta^2[\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \mu^2 + \Pi(0)]) \\ &= \frac{1}{2} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \log(\beta^2[\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \mu^2]) \\ &\quad + \frac{1}{2} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \log\left(1 + \frac{\Pi(0)}{\beta^2[\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \mu^2]}\right) \\ &=: V^1(\mu^2, T) + V_{\text{RING}}(\mu^2, T). \end{aligned} \quad (4.102)$$

V^1 は前節で評価した V_{MFA} と V_{FT} の寄与に他ならない。 V_{RING} の項はリング・ダイアグラムからの寄与と呼ばれ、

$$\begin{aligned} V_{\text{RING}}(\mu, T) &= \frac{1}{2} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \log\left(1 + \frac{\Pi(0)}{\beta^2[\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \mu^2]}\right) \\ &= -\frac{1}{2} T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(-\frac{\Pi(0)}{\beta^2[\omega_n^2 + \vec{p}^2 + \mu^2]}\right)^N \end{aligned} \quad (4.103)$$

から、

$$V_{\text{RING}}(\mu, T) = -\frac{T}{12\pi} \left[(\mu^2 + \Pi(0))^{3/2} - \mu^3\right] \quad (4.104)$$

と評価される。

標準模型におけるリング・ダイアグラムの寄与をここで示す。Higgs 場と結合する粒子によるループ効果からくる Higgs の熱質量は

$$\Pi_h(0) = \Pi_h^{A_\mu^a}(0) + \Pi_h^{B_\mu}(0) + \Pi_h^\phi(0) + \Pi_h^\psi(0) + \Pi_h^S(0) \quad (4.105)$$

となる。それぞれ、

$$\Pi_h^{A_\mu^a}(0) = \frac{3}{16} g_2^2 T^2, \quad \Pi_h^{B_\mu}(0) = \frac{1}{16} g_1^2 T^2, \quad \Pi_h^h(0) = \frac{1}{2} \lambda T^2, \quad \Pi_h^\psi(0) = \frac{1}{4} y_t^2 T^2 \quad (4.106)$$

と計算される. 以上をまとめると Higgs 場に対するリング・ダイアグラムからの寄与は

$$\begin{aligned} V_{\text{RING}}^h(h, f, T) &= -\frac{1}{2}T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(-\frac{\Pi_h(0)}{\beta^2[\omega_n^2 + \vec{p}^2 + m_h^2]} \right)^N \\ &= -\frac{T}{12\pi} \left[(m_h^2 + \Pi_h(0))^{3/2} - m_h^3 \right] \end{aligned} \quad (4.107)$$

で与えられる.

同様にスカラー場 S に対しても同様に計算すると, スカラー場の熱質量は

$$\begin{aligned} \Pi_S(0) &= \Pi_S^S(0) + \Pi_S^h(0) \\ &= \frac{T^2}{6} \left((N_c N_f + 1)\lambda_S + (N_f + N_c)\lambda'_S - \lambda_{HS} \right) \end{aligned} \quad (4.108)$$

となり, スカラー場 S に対するリング・ダイアグラムからの寄与は

$$V_{\text{RING}}^S(h, f, T) = -\frac{1}{2}T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(-\frac{\Pi_S(0)}{\beta^2[\omega_n^2 + \vec{p}^2 + M^2]} \right)^N \quad (4.109)$$

となる.

(4.102) 式のように V_{FT} と V_{RING} の和は質量を $\mu^2 \rightarrow \mu^2 + \Pi(0)$ と変更したループを評価したものに対応する. したがって, (4.99) 式で与えた有限温度効果を持つポテンシャルと (4.107), (4.109) 式のポテンシャルを足したものを V_{FT} とする. すなわち,

$$\begin{aligned} V_{\text{FT}}(f, h, T) &:= V_{\text{FT}}^1(f, h, T) + V_{\text{RING}}^h(f, h, T) + V_{\text{RING}}^S(f, h, T) \\ &= \frac{T^4}{2\pi^2} \left(2N_c N_f J_B \left(\tilde{M}^2(T)/T^2 \right) + J_B(\tilde{m}_h^2(T)/T^2) \right. \\ &\quad \left. + 6J_B(\tilde{m}_W^2/T^2) + 3J_B(\tilde{m}_Z^2/T^2) - 12J_F(\tilde{m}_t^2/T^2) \right) \end{aligned} \quad (4.110)$$

とする. ここで, 有限温度の効果によって補正された質量を

$$\tilde{M}^2(T) = M^2 + \frac{T^2}{6} \left((N_c N_f + 1)\lambda_S + (N_f + N_c)\lambda'_S - \lambda_{HS} \right), \quad (4.111)$$

$$\tilde{m}_h^2(T) = \tilde{m}_h^2 + \frac{T^2}{12} \left(\frac{9}{4}g^2 + \frac{3}{4}g'^2 + 3y_t^2 + 6\lambda_H - N_c N_f \lambda_{HS} \right) \quad (4.112)$$

と定義した. ^{*14}

次に, ゲージ場に対するリング・ダイアグラムからの寄与を評価する. $\text{SU}(2)_L$ ゲージ場 A_μ^a と $\text{U}(1)_Y$ ゲージ場 B_μ に対する熱質量は

$$\Pi_{A_\mu}(0) = \Pi_{A_\mu}^{A_\mu}(0) + \Pi_{A_\mu}^h(0) + \Pi_{A_\mu}^\psi(0), \quad \Pi_{B_\mu}(0) = \Pi_{B_\mu}^{B_\mu}(0) + \Pi_{B_\mu}^\psi(0). \quad (4.113)$$

ここで, それぞれ,

$$\Pi_{A_\mu}^{A_\mu}(0) = \frac{2}{3}g_2^2 T^2, \quad \Pi_{A_\mu}^h(0) = \frac{1}{6}g_2^2 T^2, \quad \Pi_{A_\mu}^\psi(0) = g_2^2 T^2, \quad (4.114)$$

$$\Pi_{B_\mu}^{B_\mu}(0) = \frac{1}{6}g_1^2 T^2, \quad \Pi_{B_\mu}^\psi(0) = \frac{5}{3}g_1^2 T^2 \quad (4.115)$$

^{*14} 以下の計算では $g_2 = 0.65$, $g_1 = 0.36$, $y_t = 1.0$ を用いる. ただし, それぞれ $\text{SU}(2)_L$, $\text{U}(1)_Y$ のゲージ結合定数とトップ・クォークの Yukawa 結合定数である.

と計算される。したがって、ゲージ場のリング・ダイアグラムの寄与は

$$V_{\text{RING}} = -\frac{i}{2}T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \left(-i\Pi_{AB}^{\mu\nu}(0) i\mathcal{D}_{\nu\rho}^{AB}(k) \right)^N \quad (4.116)$$

で与えられる。ただし、 $A_\mu^A := (A_\mu^a, B_\mu)$ と定義し、その基底での質量行列 m_{gf}^2 は

$$m_{\text{gf}}^2 = \begin{pmatrix} g_2^2 v_h^2/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2^2 v_h^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^2 v_h^2/4 & -g_2 g_1 v_h^2/4 \\ 0 & 0 & -g_2 g_1 v_h^2/4 & g_1^2 v_h^2/4 \end{pmatrix} \quad (4.117)$$

で与える。また、 $\Pi_{AB}^{\mu\nu}(0)$ はゲージ場の偏光テンソルで、

$$\Pi_{AB}^{\mu\nu}(0) = \Pi_{TAB}(0) P_T^{\mu\nu} + \Pi_{LAB}(0) P_L^{\mu\nu} \quad (4.118)$$

と定義される。射影演算子 $P_T^{\mu\nu}$, $P_L^{\mu\nu}$ は

$$P_T^{00} = 0, \quad P_T^{0i} = P_T^{i0} = 0, \quad P_T^{ij} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad P_L^{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} - P_T^{\mu\nu} \quad (4.119)$$

である。赤外極限では

$$P_T^{00} = 0, \quad P_L^{00} = -1, \quad P_{T_i}^i = -2, \quad P_{L_i}^i = 0 \quad (4.120)$$

となるので、偏光テンソル (4.118) は

$$\Pi_{AB}^{\mu\nu}(0) = -P_L^{\mu\nu} \Pi_{00AB}(0) \quad (4.121)$$

とできる。 $m_W/T, m_z/T \ll 1$ の極限で

$$\Pi_{00}(0) = \begin{pmatrix} \Pi_{A_\mu}(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{A_\mu}(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{A_\mu}(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{B_\mu}(0) \end{pmatrix} \quad (4.122)$$

と与えられる。また、プロパゲータを

$$i\mathcal{D}_{\mu\nu}^{AB}(k) = -i \left(\frac{g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}}{k^2 - m_{\text{gf}}^2 + i\epsilon} \right) \stackrel{\xi=0}{=} - (P_T^{\mu\nu} + P_L^{\mu\nu}) \left(\frac{1}{k^2 - m_{\text{gf}}^2 + i\epsilon} \right)^{AB} \quad (4.123)$$

とする。これらを代入して N の和を計算すると

$$V_{\text{RING}} = -\frac{T}{12\pi} \text{Tr} \left[(m_{\text{gf}}^2 + \Pi_{00}(0))^{3/2} - m_{\text{gf}}^3 \right] \quad (4.124)$$

となる。^{*15} Tr は A_μ^A における添え字 A の空間におけるトレースである。(4.124) 式を書き換えると

$$V_{\text{RING}} = -\frac{T}{12\pi} \left(2a_g^{3/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(a_g + c_g - [(a_g - c_g)^2 + 4b_g^2]^{1/2} \right)^{3/2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(a_g + c_g + [(a_g - c_g)^2 + 4b_g^2]^{1/2} \right)^{3/2} - \frac{1}{4} [g^2 h^2]^{3/2} - \frac{1}{8} [(g^2 + g'^2) h^2]^{3/2} \right) \quad (4.125)$$

^{*15} $P_{T\mu\nu} P_{T\rho}^\nu = -P_{T\mu\rho}$, $P_{L\mu\nu} P_{L\rho}^\nu = -P_{L\mu\rho}$, $P_{T\mu\nu} P_{L\rho}^\nu = 0$ を用いた。

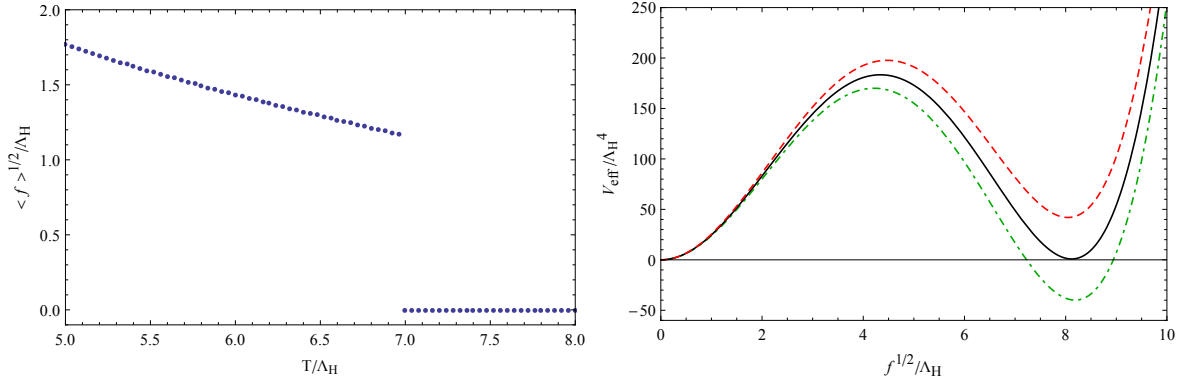


図 4.5 左: スカラー凝縮 $f = \langle S^\dagger S \rangle$ の温度依存性. 右: 無次元化されたポテンシャル $V_{\text{eff}}/\Lambda_H^4$ の $f^{1/2}/\Lambda_H$ を変数とするプロット. 赤線, 黒線, 緑線はそれぞれ無次元温度 T_S/Λ_H が 6.9, 7.0, 7.1 に対応する.

となる. ただし,

$$a_g = \frac{1}{4}g_2^2 h^2 + \frac{11}{6}g_2^2 T^2, \quad b_g = -\frac{1}{4}g_2 g_1 h^2, \quad c_g = \frac{1}{4}g_1^2 h^2 + \frac{11}{6}g_1^2 T^2 \quad (4.126)$$

と定義した.

Higgs 場の質量は真空期待値 v_h に比例しているので, リング・ダイアグラムは v_h^3 の効果を負でポテンシャルに与えることがわかる. このことは標準模型において電弱相転移が 1 次相転移となるのに重要な役割を果たしている. しかしながら, 標準模型のみの寄与では強い 1 次相転移を実現することはできない.

4.6.2 相転移点

前節で導出した有効ポテンシャルを基にスケール対称性と電弱対称性の相転移温度を調べる. その方法としてまず, ゼロ温度において $v_h = 246 \text{ GeV}$, $m_h = 125 \text{ GeV}$ を満たすようなパラメータを設定する. 暗黒物質候補を含む場合はその残存量 $\Omega_{\tilde{h}} \simeq 0.12$ も考慮に入れる. そのような条件の下, 温度パラメータを大きくしていき, $\langle S^\dagger S \rangle = 0$ となる温度を T_S (スケール相転移温度) とし, $v_h = 0$ となる温度を T_{EW} (電弱相転移温度) とする. 一般に, スケール相転移温度 T_S と電弱相転移温度 T_{EW} は異なる. また,

$$\frac{\langle S^\dagger S \rangle}{T_S} \gtrsim 1, \quad \frac{v_h}{T_{\text{EW}}} \gtrsim 1 \quad (4.127)$$

となる場合を強い 1 次相転移と呼ぶ. ここでは 3 つのパラメータの組みについて相転移の振る舞いについて調べる.

1. $\lambda_{HS} = 0$ かつ $N_f = 1$, $N_c = 6$ の場合

ここではスケール相転移がどのような振る舞いになるかについて調べる. 標準模型と隠れたセクターが脱結合している場合 $\lambda_{HS} = 0$ を考える. 次のようなパラメータを設定する:

$$N_f = 1, \quad N_c = 6, \quad \lambda_S + \lambda'_S = 2.083. \quad (4.128)$$

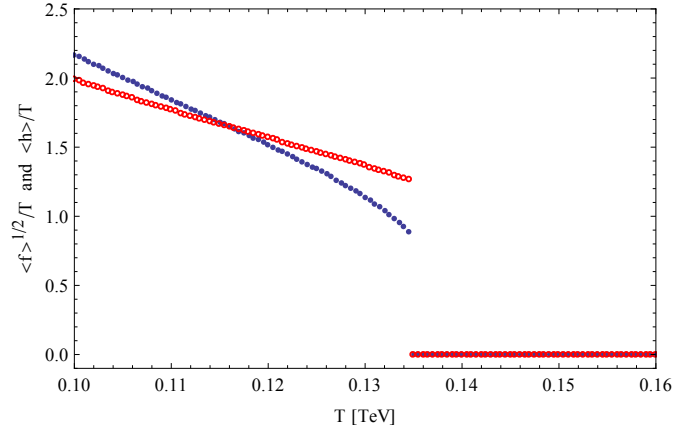


図 4.6 条件 1 の場合でのスカラー凝縮 $f = \langle S^\dagger S \rangle$ (赤点) と電弱真空 v_h (青点) の温度依存性

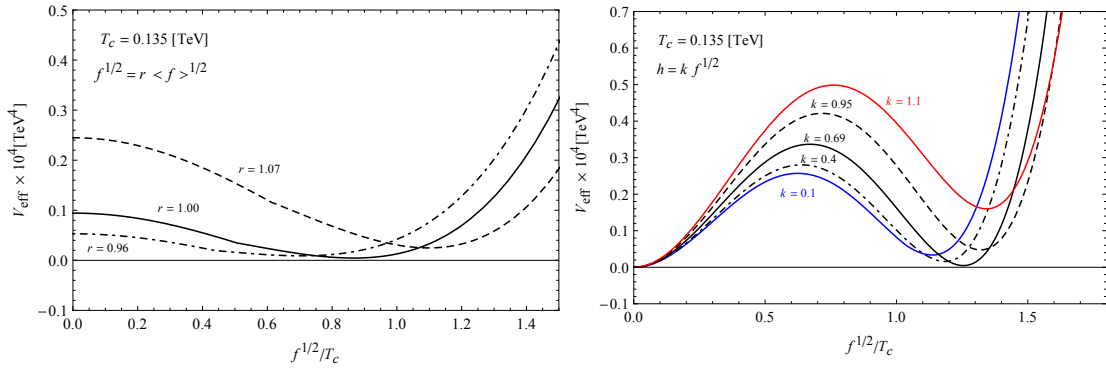


図 4.7 $T = T_c$ の場合のポテンシャル V_{eff} の振る舞い. 原点 $(h, f) = (0, 0)$ で $V_{\text{eff}} = 0$ となるようにプロットした. 左図: $f^{1/2} = r \langle f \rangle^{1/2}$ と固定したときの $h/T_c - V_{\text{eff}}$ プロット. 右図: $h = k f^{1/2}$ としたときの $f^{1/2}/T_c - V_{\text{eff}}$ のプロット.

図 4.5 の左側に温度変化に対する $\langle f \rangle^{1/2}/T$ の変化を示す. この図から以下のことがわかる.

- スケール相転移温度は $T_S/\Lambda_H \simeq 7.0$
- 強い 1 次相転移 $\langle S^\dagger S \rangle \geq 1$ が実現されている.

図 4.5 の右図にはポテンシャル V_{eff}/Λ_H の振る舞いを $T_S/\Lambda_H = 7.1$ (赤破線), 7.0 (黒実線), 6.9 (緑点破線) のときについてプロットした.*16

2. 暗黒物質がない場合 ($N_f = 1$) でのスケール相転移と電弱相転移

標準模型と隠れたセクターが結合する場合を調べる. ここでは隠れたセクターのパラメータを (4.128) と同じものを使い, Higgs・ポータル結合定数と Higgs の 4 点結合定数をそれぞれ

$$\lambda_{HS} = 0.296, \quad \lambda_H = 0.208 \quad (4.129)$$

*16 有限温度におけるスケール相転移は [201, 202, 232] で議論された. ここでの解析では常に $\langle S_i^a \rangle = 0$ であることを仮定したが, 有限温度で終点解 $\langle S_i^a \rangle \neq 0$ が選ばれず, $\langle f \rangle = \langle S_i^a \rangle = 0$ が選ばれる理由はない. しかしながら, $T > T_S$ で $SU(N_c)$ が破れないとすると $\langle f \rangle = \langle S_i^a \rangle = 0$ が解となると考えられる.

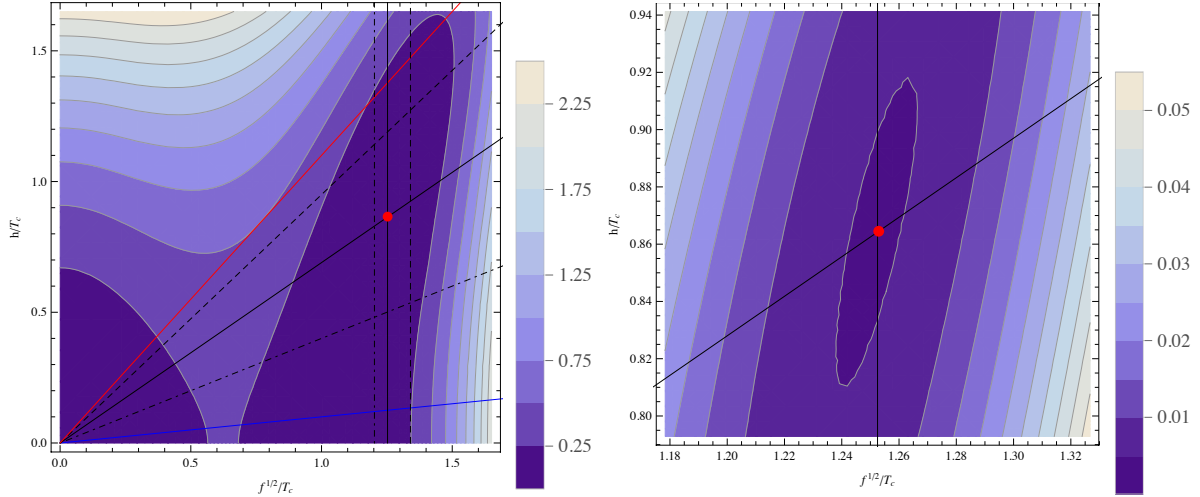


図 4.8 ポテンシャル V_{eff} の $f^{1/2}/T_c$ - h/T_c 平面での等高図. 左図における傾きのある直線は $h = kf^{1/2}$ に対応し, 縦線は $f = r\langle f \rangle^{1/2}$ に対応する. 赤点は (4.7) でポテンシャルが最小値をとる時の k と r に対応する線が交わる点である. 右図は赤点周りを拡大した図である.

と選ぶ. これらのパラメータ ((4.128) と (4.129)) の下, ゼロ温度では

$$M = 0.410 \text{ TeV}, \quad m_\sigma = 0.796 \text{ TeV}, \quad \Lambda_H = 0.019 \text{ TeV}, \quad m_h = 0.125 \text{ TeV} \quad (4.130)$$

を得る. ^{*17}

図 4.6 に $\langle f \rangle^{1/2}/T$ (赤線), $\langle h \rangle/T$ (青線) の T 依存性を示す. 以下のことが読み取れる.

- スケール相転移温度 T_{Sc} と電弱相転移温度 T_{EWc} は同時に起こっており, $T_c \simeq 0.135 \text{ TeV}$ である.
- この相転移温度とくりこみスケールの比は $T_{\text{Sc}}/\Lambda_H \simeq 7.0$ であり, 隠れたセクターのパラメータを条件 1 のときと同じものになっている. すなわち, 隠れたセクターは標準模型の影響をあまり受けていないことがわかる.

ここで得られた結果を詳しく検証するために相転移温度 $T_c = 0.135 \text{ TeV}$ においてポテンシャルの最小値がどこに存在するかを調べる. 図 4.7 の左側に

$$0 = h - kf^{1/2} \quad (4.131)$$

を満たす V_{eff} の断面をそれぞれ, $k = 1.1$ (赤実線), $k = 0.95$ (黒破線), $k = 0.69$ (黒実線), $k = 0.4$ (黒点破線), $k = 0.1$ (青実線), の場合についてプロットした. また, 図 4.7 の右側に

$$f^{1/2} = r\langle f \rangle^{1/2} \quad (4.132)$$

を満たす V_{eff} の断面をそれぞれ $r = 0.96$, $r = 1.00$, $r = 1.07$ の場合についてプロットした. これらのグラフから読み取れることは $k = 0.69$ と $r = 1.00$ のときにポテンシャルの最小値が原点 $f^{1/2}/T_c = 0$ と $f^{1/2}/T_c \neq 0$ に存在することがわかる.

^{*17} λ_{HS} が大きくなると σ と Higgs の混合が大きくなる. その混合角は ~ 0.2 となり, LHC による制限に対して 95% の信頼水準で無矛盾である [233]. λ_{HS} は質量 m_h を小さくするように働くので, 観測値を満たすことを要請すると, λ_H は標準模型の場合 ($\lambda_H \simeq 0.13$) よりも大きくなる.

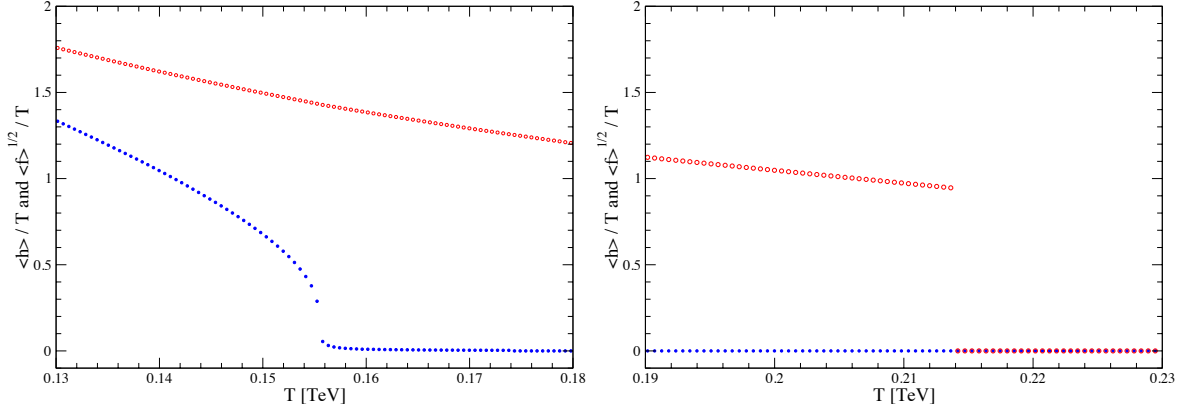


図 4.9 条件 3 の場合でのスカラー凝縮 $f = \langle S^\dagger S \rangle$ (赤点) と電弱真空 v_h (青点) の温度依存性

ポテンシャルの等高図を $f^{1/2}/T_c - h/T_c$ 平面で図 4.8 に示す。左側の図において、傾きのある線は (4.131) 式に対応する線であり、線はそれぞれ、図 4.7 の右側のものと同じである。 $k = 0.69$ と $r = 1.00$ の交点に赤点を記した。このときポテンシャルの最小値になっていると考えられ、実際、図 4.8 の右側は交点の周りを拡大したプロットであり、ポテンシャルの深いところで交わっていることがわかる。これらの解析からわかることは相転移点 T_c においてポテンシャルの最小値は原点および $\langle f \rangle^{1/2} \simeq 0.169$ TeV, $\langle h \rangle \simeq 0.117$ TeV に存在するということである。

ここで解析した領域以外に $0 < f^{1/2}/T_c < 15$, $0 < h/T_c < 15$ を調べたが最小値となる点は見つからなかった。したがって、相転移温度が同時に起こることは正しいと思われる。

3. 暗黒物質がある場合 ($N_f > 1$) でのスケール相転移と電弱相転移

暗黒物質がある場合について次のようにパラメータを設定し解析する:

$$N_f = 2, \quad N_c = 6, \quad \lambda_S = 0.165, \quad \lambda'_S = 2.295, \quad \lambda_{HS} = 0.086, \quad \lambda_H = 0.155. \quad (4.133)$$

これらのパラメータのとき、ゼロ温度において

$$\begin{aligned} M &= 0.533 \text{ TeV}, & m_\sigma &= 0.989 \text{ TeV}, & \Lambda_H &= 0.055 \text{ TeV}, \\ m_{\text{DM}} &= 0.676 \text{ TeV}, & \Omega \hat{h}^2 &= 0.119, & \sigma_{SI} &= 5.76 \times 10^{-45} \text{ cm}^2 \end{aligned} \quad (4.134)$$

を得る。図 4.9 に $\langle f \rangle^{1/2}/T$ (赤) と $\langle h \rangle/T$ (青) の T 依存性を示す。図の左側と右側はそれぞれ $0.13 \text{ TeV} \leq T \leq 0.18 \text{ TeV}$ と $0.19 \text{ TeV} \leq T \leq 0.23 \text{ TeV}$ の温度領域をプロットしたものである。読み取れることは

- スケールと電弱の相転移温度はそれぞれ $T_{\text{EW}} \simeq 0.155 \text{ TeV}$ and $T_S \simeq 0.214 \text{ TeV}$ となって異なる相転移温度になっている。
- スケール相転移は強い 1 次相転移であるが、電弱相転移は弱い 1 次相転移となっている。

以上の解析において、暗黒物質がある場合とない場合の相転移の振る舞いの違いについて考察する。隠れたセクターにおけるスケール相転移はいずれの場合でも強い 1 次相転移が起こっている。このスケール相転移が標準模型に伝わることで電弱相転移が強い 1 次相転移になると考えられる。隠れたセクターと標準模型をつないでいるのは Higgs・ポータル結合 $\lambda_{HS} S^\dagger S H^\dagger H$ である。つまり、Higgs・ポータル結合定数 λ_{HS} が大きいとスケール相転移が電弱相転移を誘因すると考えられる。しかし、一方で暗

黒物質は Higgs・ポータル結合を通じて Higgs 粒子に対消滅するため、 λ_{HS} が大きいと暗黒物質が対消滅しすぎてしまうため、その残存量 $\Omega\hat{h} \simeq 0.12$ を満たせなくなってしまう。よって、暗黒物質の残存量 $\Omega\hat{h} \simeq 0.12$ と強い電弱 1 次相転移を同時に実現することが困難であることがわかる。

しかしながら、ここでの解析は有効模型に平均場近似を適用したものであり、両立が不可能であることを証明したことにはならない。(4.29) 式の理論を格子場シミュレーションによる第 1 原理計算することで両立が可能になりうるかもしれない。これは将来的に行っていくべき研究である。

4.7 章のまとめ

この章では電弱対称性の破れの起源と階層性問題に着目し、古典的スケール不変性に基づく標準模型の拡張を行った。隠れたセクターに新たなスカラー場 S と強いゲージ相互作用を導入し、そこで力学的にスケール対称性が破れることで Higgs 場に質量項を与え、電弱対称性が破れるという機構である。つまり、力学的スケール対称性の破れの秩序変数は $\langle S^\dagger S \rangle$ となり、Higgs・ポータル結合が Higgs 場の負の質量 $-\lambda_{HS}\langle S^\dagger S \rangle$ となる。

模型からの予言を解析的に調べるためにスケール対称性の力学的破れを記述する有効模型を構築した。以下の事実が得られた。

- スカラー場 S_i がフレーバーの自由度を持つ場合、真空 $\langle S^\dagger S \rangle$ からの励起粒子として σ と ϕ^α が存在する。
 - － フレーバー対称性が破れないことを仮定すると ϕ^α は安定な粒子として存在でき、暗黒物質の候補となれる。
 - － その残存量は現在の暗黒物質の直接探索実験で除外されていない領域に許される領域を持つことがわかった。
- 有限温度においてスケールと電弱対称性は回復する。
 - － スケール相転移は一般に強い 1 次相転移 ($\langle S^\dagger S \rangle/T_{\text{Sc}} \gtrsim 1$) を実現する。
 - － 暗黒物質が存在しない場合 ($N_f = 1$)、強い電弱 1 次相転移を実現できるパラメータ領域があることがわかった。そのとき、スケール相転移と電弱相転移は同じ温度で起こる。
 - － 暗黒物質が存在する場合、現在の暗黒物質の残存量 $\Omega\hat{h} \simeq 0.12$ を満たすことを課すと、強い電弱 1 次相転移を実現できるようなパラメータは見つからなかった。

今後の研究として、より詳細な模型の解析が行われるべきであり、暗黒物質とバリオン数生成を説明できる模型への構築が望まれる。

第 5 章

漸近的に安全な量子重力

重力場はテンソル (計量) 場として与えられ, その運動方程式はアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

で記述される. この方程式から予言される物理現象として光の湾曲や水星の近日点移動などが挙げられ, いずれも観測によって確かめられている. したがって, アインシュタイン重力は我々のマクロな世界の重力を記述する正しい理論であると信じられる. アインシュタイン重力が予言しているが, まだ観測には至っていない重力波の検証は非常に重要であり, 現在, 重力波を観測を目指す実験 (KAGURA) が始まりつつある [234].

しかしながら, ミクロな世界での重力理論, すなわち量子重力はまだ完成に至っていない. アインシュタイン重力を記述する作用はアインシュタイン–ヒルベルト作用

$$S_{\text{EH}} = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R - 2\Lambda] \quad (5.2)$$

で与えられる. 実際, この作用を $g_{\mu\nu}$ で変分するとエネルギー・運動量テンソルがゼロ ($T_{\mu\nu} = 0$) の場合での (5.1) 式を得ることができる. アインシュタイン–ヒルベルト作用の経路積分によって重力場の量子化ができるとし, 摂動論に基づく計算を行うとくりこみ不可能な理論になってしまう, つまり, 紫外発散を取り除くためには無限個の相殺項が必要になる. したがって, 理論にはカットオフを導入せざるを得ず, 高エネルギー領域での予言能力を失ってしまう.

量子重力理論の候補として超弦理論 [235, 236] やループ重力理論 [237, 238], Hořava–Lifshitz 理論 [239] などが提案されてきた. これまでの場の量子論に基づく量子重力は量子論で扱うことは不可能なのであろうか. 実は非摂動的な取り扱いをすることで量子重力はくりこみ可能な理論になりうる可能性がある. これは Weinberg によって提案された漸近的安全性と呼ばれる理論の性質をアインシュタイン重力が持つことを要求する [240]. Weinberg は ϵ 展開の方法を用いて $2 + \epsilon$ 次元量子重力を解析し, $\epsilon > 0$ に対して理論が漸近的安全になりうることを示した [240]. その後, Reuter [60] によって非摂動くりこみ群による解析が行われて以来, 理論の近似の改善やカットオフとゲージ依存性などの評価が行われてきた. 例えば, 文献 [241] ではトランケーションとして R^{34} までの演算子を解析し, 非自明な固定点の存在と UV 臨界面の次元が安定して 3 次元になっていることを示した. これらの解析は量子重力が漸近的安全性を持つことを示唆している. また, 標準模型に漸近的に安全な量子重力が結合している場合の解析 [242] では, Higgs の質量が 125 GeV 付近にあることを予言している.

物質場と結合する場合での可能性も調べられている。物質の効果は重力の漸近的安全性を損なう。これは多フレーバーにおいて QCD のゲージ結合定数の漸近的自由性が損われることと同じである。このようなことから、漸近的に安全な量子重力理論を仮定として物質場に制限を与える試みもなされている。漸近的に安全な量子重力のこれまでの研究はレビュー [243, 244, 245, 246, 247, 248]などを参照せよ。

*1

この章では量子重力の1つ候補である漸近的に安全な量子重力の可能性について議論し、物質場と結合する系を非摂動くりこみ群によって解析する。特にここでは重力場と非最小結合する Higgs–Yukawa 模型を扱う。この模型は Higgs・インフレーションを記述する模型の簡略されたものに対応する。Higgs・インフレーションのシナリオでは非最小結合 $\xi H^\dagger H R$ が非常に重要な役割を果たす [309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320]。しかし、Higgs によるインフレーションを実現するためには非最小結合は大きな値をとる必要がある。提案された当初 [309, 310] では、 10^4 – 10^5 の ξ が必要とされていたが、近年、 $\xi \sim 10$ でも実現できることが指摘された [313, 314]。何れにせよ、非最小結合が大きな値をとる必要があるのは確かである。このようなことが漸近的に安全な量子重力の下では可能であるかどうかを調べるのが目的である。漸近的に安全な量子重力の下での Higgs・インフレーションの現象論的研究は [321, 322] がある。*2

5.1 漸近的安全性とは

漸近的安全性の基本的な考え方について幾分一般的に説明する。系を記述する有効作用が次のように与えられるとする：

$$\Gamma_\Lambda = \int d^D x \sum_i^\infty \frac{g_{i,\Lambda}}{\Lambda^{D_{\mathcal{O}_i}-D}} \mathcal{O}_i. \quad (5.3)$$

ここで、 $g_{i,\Lambda}$ は無次元化された結合定数、 $\mathcal{O}_i$ は演算子基底、 $D_{\mathcal{O}_i}$ は $\mathcal{O}_i$ の次元とする。この系のくりこみ群方程式が結合定数 $g_{i,\Lambda}$ に対して

$$-\Lambda \frac{\partial g_{i,\Lambda}}{\partial \Lambda} = \beta_i(g_\Lambda) \quad (5.4)$$

*1 これまでの解析として以下のような研究がある：

- アインシュタイン–ヒルベルト・トランケーションの下、4次元量子重力が非自明な固定点が存在し、くりこみ可能になることを議論している研究は [249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262]
- ゲージやカットオフ・スキームの依存性は [263, 264, 265] で議論されている。
- 微分同相写像に対するゴースト場の場のくりこみや結合を議論しているものは [266, 267, 268]
- 物質場との結合を議論しているものとして、漸近的に安全な量子重力からの物質場への制限を与えている文献は [269, 270, 271]、スカラー理論との結合を議論しているものは [272, 273, 274, 275, 271, 276]、Higgs–Yukawa 模型の解析は [277, 278] で行なわれている。ゲージ理論との結合がある場合では [279, 280, 281]、4体フェルミ相互作用に対する重力の効果は [282] で議論されている。双計量による物質場の議論は [283]。
- $f(R)$ 重力の解析は [284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 241, 298, 271, 299] がある。
- ワイル・テンソルやガウス・ボンネ項を含めた場合の解析は [288, 300]。
- 四脚場形式での解析は [301, 302]
- 新しいトランケーション・スキームでの解析は [303, 304, 305, 306] で議論されている。また、そのスキームでの物質場と結合している系の解析は [307, 308] がある。

*2 漸近的に安全な量子重力の下での Starobinsky R^2 インフレーション模型の場合は [323, 324] がある。漸近的に安全なインフレーションと呼ばれる模型もある [325, 326, 327, 328, 329, 330]。

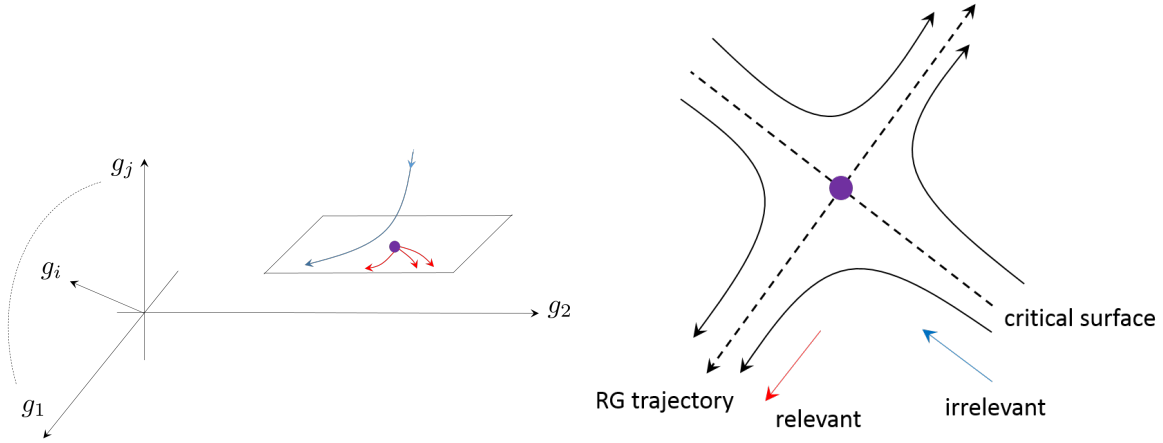


図 5.1 左図: 理論空間内の固定点とそこで定義される UV 臨界面の周りのフロー. 右図: 固定点周りのフローとフローの定義.

のように与えられる. $\beta_i(g_\Lambda)$ は $\beta_i(g_{1,\Lambda}, g_{2,\Lambda}, \dots)$ の意味で書いた. 固定点 g^* はベータ関数がゼロになるような点として定義される, すなわち,

$$\beta_i(g^*) = 0. \quad (5.5)$$

である. 特に 自明な (Gaussian) 固定点が $g_i^* = 0$ が存在する.

今, ある固定点 g_j^* に対して, その周りの低エネルギー (IR) へのくりこみ群フローを考えたとき, 固定点から離れてくフローを relevant, 近づくフローを irrelevant として固定点から動かないフローを marginal という. relevant なフローを高エネルギー (UV) へ追うと, 固定点 g_j^* に近づくことになる. したがって, この固定点 g_j^* を紫外 (UV) 固定点と呼ぶことにする. また, その固定点 g_j^* 周りで relevant な演算子によって張られる部分理論空間を UV 臨界面と呼び, irrelevant な演算子によって張られる部分理論空間を IR 超平面と呼ぶことにする. 一般に UV 臨界面の次元は有限であり, IR 超平面は無次元である.

(5.4) 式を解いて得られるフローの概略図を図 5.1 に示す. UV で任意の点 (UV で与えられた理論) から始まるくりこみ群フローは IR に行くときくりこみ軌跡 (Renormalized trajectory) に乗っていく. つまり, 低エネルギーでは relevant な演算子がマクロの物理を記述しており, irrelevant な演算子は relevant な演算子にコントロールされて流れていく. 逆に IR で固定した理論から UV へのフローを考えると, UV 固定点に無限の時間をかけて近づいていくフローが存在する. 言い換えると, くりこみ変換が無限回必要, つまり UV カットオフ $\Lambda_0 \rightarrow \infty$ とできるということであり, 連続極限がとれることを意味する. このフローはちょうど無限の時間をかけて UV 固定点に近づいていくフローである. このような UV で発散がないフローの行き先は UV 完全な理論であり, それは UV 臨界面で与えられる理論である. さらに, UV 臨界面の次元, つまり relevant な演算子の数が有限であればくりこみ可能な理論となる. なぜなら, UV 臨界面を張る relevant な演算子が自由パラメータであるからで, これを決めれば低エネルギーでの理論が決まることになるからである. このように, UV 固定点が理論に存在すればその理論は漸近的に安全な理論になることができる [331, 332, 333, 334, 335]. UV 固定点が自明な固定点 $g_{i,\Lambda}^* = 0$ であれば摂動論が有効であるが, 非自明な場合は非摂動的な手法が必要となる.

ここで Weinberg がこの考えに基づいて議論したことを簡単に説明する. $2 + \epsilon$ 次元での量子重力

を ϵ 展開の方法で解析するとカットオフで無次元化したニュートン定数 $\tilde{G} := G\Lambda^\epsilon$ が非自明な固定点 $\tilde{G}^* = 3\epsilon/38$ を持つ。もし、 $\epsilon > 0$ であれば、次元のあるニュートン定数 G は固定点周りにおいて $\Lambda \rightarrow \infty$ でゼロになる:

$$G \simeq \frac{\tilde{G}^*}{\Lambda^\epsilon} \rightarrow 0, \quad \text{for } \epsilon > 0, \Lambda \rightarrow \infty. \quad (5.6)$$

すなわち、量子重力は漸近的自由な理論になることを意味している [240, 336].

くりこみ可能性を調べる方法を述べる。それには relevant な演算子の数を調べればよく、固定点 $g_{i,\Lambda}^*$ 周りのくりこみ群フローに対する臨界指数 θ_i を評価することでわかる。(5.4) 式を $g_{i,\Lambda}^*$ 周りで線形化し、くりこみ群方程式を解くと

$$g_{i,\Lambda} = g_{i,\Lambda}^* + \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{ij} \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^{\theta_j} \quad (5.7)$$

となる。ただし、 Λ_0 は UV カットオフである。この導出方法は 5.5 節で示す。UV から IR へのフロー ($\Lambda \rightarrow 0$) を考えると、 $\text{Re}(\theta_i) > 0$ のとき $g_{i,\Lambda}$ は $g_{i,\Lambda}^*$ から離れていき、 $\text{Re}(\theta_i) < 0$ のとき $g_{i,\Lambda}$ は $g_{i,\Lambda}^*$ に近づいていく。フローの定義から、 $\text{Re}(\theta_i) > 0$ となる演算子 $\mathcal{O}_i$ が relevant, $\text{Re}(\theta_i) < 0$ となる演算子 $\mathcal{O}_i$ が irrelevant である。^{*3} したがって、 $\text{Re}(\theta_i) > 0$ となる臨界指数の数が UV 臨界面の次元となる。

例として $\mathcal{O}_1$ で張られる UV 臨界面があるような場合を考えてみる。次元のあるパラメータ $G_{1,\Lambda}$ と無次元化されたパラメータ $g_{1,\Lambda}$ の関係は $g_{1,\Lambda} = \Lambda^{D_{\mathcal{O}_1} - D} G_{1,\Lambda}$ となり、特に固定点近傍

$$g_{1,\Lambda}^* = \Lambda^{D_{\mathcal{O}_1} - D} G_{1,\Lambda} \quad (5.8)$$

において、 $D_{\mathcal{O}_1} - D > 0$ のとき次元のあるパラメータ $G_{1,\Lambda}$ は UV 極限 $\Lambda \rightarrow \infty$ でゼロになる。すなわち、漸近的自由となる。また、 $D_{\mathcal{O}_1} = D$ ならば、 $G_{1,\Lambda}$ は無次元なので理論は漸近的非自由になり、特に固定点 $g_{1,\Lambda}^*$ が自明である場合 ($g_{1,\Lambda}^* = 0$)、 $G_{1,\Lambda}$ は UV 極限で漸近的自由になる。この典型例は QCD である。以上のことから漸近的安全性は漸近的自由性の一般化といえる。 $\text{Re}(\theta_1) > 0$ となる演算子 $\mathcal{O}_1$ の結合定数 $\zeta_{1j} = g_{1,\Lambda} \delta_{1j}$ が自由パラメータであり、他の負の臨界指数を持つ演算子は irrelevant となり、低エネルギーでは relevant な $\mathcal{O}_1$ にコントロールされてフローする。我々が解析する模型における固定点構造と臨界指数は 5.5 節で議論する。

ベータ関数の固定点構造と演算子の有効次元について述べておく。 $g_{1,\Lambda}$ のベータ関数は典型的に^{*4}

$$\beta_{g_{1,\Lambda}} = -(D_{\mathcal{O}_1} - D) g_{1,\Lambda} + L g_{1,\Lambda}^2, \quad (5.9)$$

で与えられる。ただし、 L はループ因子であり、他の演算子からの寄与は無視した。^{*5} 自明な固定点 $g_{1,\Lambda}^* = 0$ の周りでは (5.9) 式の第 1 項目 (正準スケーリング) が支配的になる。係数 $-(D_{\mathcal{O}_1} - D)$ は $g_{1,\Lambda}$ の次元であり、演算子の次元は $D_{\mathcal{O}_1}$ となる。一方、非自明な固定点 $g_{1,\Lambda}^* = (D_{\mathcal{O}_1} - D)/L$ の周りで (5.9) 式は

$$\beta_{g_{1,\Lambda}} = (D_{\mathcal{O}_1} - D) (g_{1,\Lambda} - g_{1,\Lambda}^*) + L (g_{1,\Lambda} - g_{1,\Lambda}^*)^2 \quad (5.10)$$

^{*3} 臨界指数の虚部はフローの中で演算子同士の混合を意味していると解釈できる。

^{*4} 非摂動くりこみ群は 1-loop exact な定式化であるから $\mathcal{O}(g_{1,\Lambda}^3)$ は現れない。

^{*5} 場のくりこみからくる異常次元もあるが、LPA を適用したとする。

と書き換えられる。したがって、非自明な固定点の周りでは (5.10) 式の第1項目が支配的で、このときの演算子の (有効) 次元は $2D - D_{\mathcal{O}_1}$ であると思える。例えば、 $D = 4$ の重力理論の場合、すなわち、 $\mathcal{O}_1 = R$ でその結合定数を $g_{1,\Lambda} = 1/16\pi G$ とすると、それぞれの正準次元は $D_{\mathcal{O}_1} = 2$ と $-(D_{\mathcal{O}_1} - D) = 2$ となる。これが自明な固定点周りでの演算子と結合定数の次元である。非自明な固定点では、演算子の次元は $2D - D_{\mathcal{O}_1} = 6$ で、結合定数は -2 となる。次元が量子効果による異常次元によってずれることを意味している。また、 -2 はまさに臨界指数に他ならないので、臨界指数は異常次元によってずれたあとの次元であると解釈できる。

フラクタル次元と呼ばれる量を調べることで漸近的に安全な量子重力の可能性を調べる試みもある。

*6

また、漸近的安全性の議論は重力理論だけでなく、余剰次元模型 [348, 349, 350, 351] や平らな空間における Higgs–Yukawa 模型の UV 完全性の議論 [352, 353, 354, 355, 356] などにも適用されている。

5.2 重力場の量子化

重力場 $g_{\mu\nu}$ に対する微分同相写像 (一般座標変換) はリー微分を用いて

$$\begin{aligned}\delta g_{\mu\nu} &= \mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = v^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \partial_\nu v^\rho + g_{\rho\nu} \partial_\mu v^\rho \\ &= \nabla_\mu v_\nu + \nabla_\nu v_\mu\end{aligned}\quad (5.11)$$

と与えられる。ただし、 ∇_μ は重力場に対する共変微分である。^{*7} (ユークリッド化された) アインシュタイン–ヒルベルト作用

$$S_{\text{EH}} = 2\kappa^2 \int d^4x \sqrt{g} [-R + 2\Lambda] \quad (5.12)$$

は微分同相写像に対して不変な作用になっている。ここで、 $\kappa = (1/32\pi G)^{1/2}$ とおいた。

計量を固定された背景場とその周りのゆらぎで展開する:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (5.13)$$

$\bar{g}_{\mu\nu}$ は背景場で、添え字の上げ下げはこの計量を用いてなされる。このとき微分同相写像は

$$\mathcal{L}_v g_{\mu\nu} = \delta h_{\mu\nu}, \quad (5.14)$$

$$\delta \bar{g}_{\mu\nu} = 0 \quad (5.15)$$

となる。

今、この作用から経路積分法に基づいて重力場の量子化を行うことを考える。このとき、微分同相写像に対するゲージ固定およびゴースト場の導入が必要となる。そこで BRST 対称性に基づいてそれらを与える。その手続きはゲージ場の場合と同様である。^{*8} ゴースト場 C_μ を計量場 $h_{\mu\nu}$ に対する BRST 変

*6 くりこみ群による解析は [337, 338, 339, 247, 340], 格子シミュレーションによる解析は [341, 342] や [343, 344, 345, 346, 347] を参照せよ。

*7 一般相対性理論と曲がった空間における場の理論に関しては付録 C にまとめた。

*8 ゲージ場 A_μ^a の場合の BRST 変換は

$$\delta_{\mathbf{B}} A_\mu^a(x) = D_\mu c^a(x), \quad \delta_{\mathbf{B}} c^a(x) = \frac{1}{2} g f_{abc} c^b(x) c^c(x), \quad \delta_{\mathbf{B}} \bar{c}^a(x) = iB^a(x), \quad \delta_{\mathbf{B}} B^a(x) = 0 \quad (5.16)$$

と与えられる。

換の中で導入する:

$$\begin{aligned}\delta_{\mathbf{B}} h_{\mu\nu} &= \kappa^{-2} \mathcal{L}_C g_{\mu\nu} = \kappa^{-2} (C^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu C^\rho g_{\rho\nu} + \partial_\nu C^\rho g_{\mu\rho}) \\ &= \nabla_\mu C_\nu + \nabla_\nu C_\mu.\end{aligned}\quad (5.17)$$

$\delta_{\mathbf{B}}$ がグラスマン奇の BRST 変換を表す. ベキ零性 ($\delta_{\mathbf{B}}^2 = 0$) を要請し, 他の場に対する BRST 変換を与える:

$$\delta_{\mathbf{B}} \bar{g}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.18)$$

$$\delta_{\mathbf{B}} C^\mu = \kappa^{-2} C^\nu \partial_\nu C^\mu, \quad (5.19)$$

$$\delta_{\mathbf{B}} \bar{C}^\mu = B^\mu, \quad (5.20)$$

$$\delta_{\mathbf{B}} B^\mu = 0. \quad (5.21)$$

ここで, $\bar{C}^\mu$, B_μ はそれぞれ反ゴースト場, Nakanishi–Lautrup(NL) 場である.

ゴースト場とゲージ固定のラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{gh}}$, $\mathcal{L}_{\text{gf}}$ を与えよう. 2つの和は BRST 変換を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gh}} + \mathcal{L}_{\text{gf}} &= \kappa \delta_{\mathbf{B}} (\bar{C}_\mu F^\mu) \\ &= \kappa (\delta_{\mathbf{B}} \bar{C}_\mu) F^\mu + \kappa \bar{C}_\mu \delta_{\mathbf{B}} F^\mu\end{aligned}\quad (5.22)$$

と書ける. ただし, F_μ はゲージ固定関数で, ここでは特に

$$F^\mu = \Sigma^\mu + \frac{\alpha\kappa}{2} B^\mu, \quad (5.23)$$

$$\Sigma_\mu = \sqrt{2}\kappa \mathcal{F}_\mu^{\rho\sigma} [\bar{g}] h_{\rho\sigma} \quad (5.24)$$

と選ぶ. $\mathcal{F}_\mu^{\rho\sigma} [\bar{g}]$ は調和座標条件をとると

$$\mathcal{F}_\mu^{\rho\sigma} [\bar{g}] = \bar{g}_\mu^\rho \bar{g}^{\sigma\alpha} \bar{\nabla}_\alpha - \frac{2(\beta+1)}{d} \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{\nabla}_\mu \quad (5.25)$$

となる. ただし, $\bar{D}_\mu$ は背景場 $\bar{g}_{\mu\nu}$ で書かれた共変微分である. このとき, ゲージ固定関数は

$$\Sigma_\mu = \bar{g}^{\nu\rho} \left(\bar{\nabla}_\nu h_{\rho\mu} - \frac{2(\beta+1)}{d} \bar{\nabla}_\mu h_{\nu\rho} \right) \quad (5.26)$$

となる. ゲージ固定パラメータを $\alpha = 0$, $\beta = 1$ をとるゲージを de-Donder ゲージと呼ぶ.

ゴースト場とゲージ固定のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = \kappa B_\mu \left(\Sigma^\mu + \frac{\alpha\kappa}{2} B^\mu \right), \quad (5.27)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gh}} = -\kappa \bar{C}_\mu (\delta_{\mathbf{B}} F^\mu) \quad (5.28)$$

となる.

以上の作用に対する経路積分は

$$\begin{aligned}Z &= \exp(W[J; \bar{g}]) \\ &= \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \mathcal{D}B_\mu \exp(-S_{\text{EH}}[\bar{g} + h] - S_{\text{gf}}[h, B; \bar{g}] - S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}, B; \bar{g}] - S_{\text{source}}) \\ &= \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \exp(-S_{\text{EH}}[\bar{g} + h] - S_{\text{gf}}[h; \bar{g}] - S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] - S_{\text{source}})\end{aligned}\quad (5.29)$$

と与えられる. NL 場 B_μ を積分した後の作用は

$$S_{\text{gf}}[h; \bar{g}] = \frac{1}{2\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \Sigma_\mu \Sigma_\nu, \quad (5.30)$$

$$S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] = -\sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \mathcal{M}[\bar{g} + h; \bar{g}]^\mu_\nu C^\nu \quad (5.31)$$

となる. ただし,

$$\mathcal{M}[\bar{g} + h; \bar{g}]^\mu_\nu = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{g}^{\sigma\alpha} \bar{\nabla}_\alpha (g_{\rho\nu} \nabla_\sigma + g_{\sigma\nu} \nabla_\rho) - (1 + \beta) \bar{g}^{\rho\sigma} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{\nabla}_\alpha g_{\sigma\nu} \nabla_\rho \quad (5.32)$$

である. また, ソース項は

$$S_{\text{source}} = - \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (t^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \sigma_\mu C^\mu + \bar{\sigma}^\mu \bar{C}_\mu + \kappa^2 \beta^{\mu\nu} \delta_{\mathbf{B}} h_{\mu\nu} + \kappa^2 \tau_\mu \delta_{\mathbf{B}} C^\mu) \quad (5.33)$$

と与える.

5.2.1 くりこみ群の重力理論への適用

重力理論をくりこみ群を適用する際の微分同相写像不変性についてコメントしておく. 経路積分は

$$\begin{aligned} & \exp(W_\Lambda[t^{\mu\nu}, \sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu; \beta^{\mu\nu}, \tau^\mu; \bar{g}]) \\ &= \int \mathcal{D}h_{\mu\nu} \mathcal{D}C^\mu \mathcal{D}\bar{C}_\mu \exp(-S_{\text{EH}}[\bar{g} + h] - S_{\text{gf}}[h; \bar{g}] - S_{\text{gh}}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] - S_{\text{source}} - \Delta S_\Lambda) \end{aligned} \quad (5.34)$$

であり, 有効作用は

$$\begin{aligned} \Gamma_\Lambda[\bar{h}^{\mu\nu}, \xi^\mu, \bar{\xi}^\mu; \beta^{\mu\nu}, \tau^\mu; \bar{g}] &= \int d^d x \sqrt{\bar{g}} [t^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} + \sigma_\mu \bar{\xi}^\mu + \bar{\sigma}_\mu \xi^\mu] \\ &\quad - W_\Lambda[t^{\mu\nu}, \sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu; \beta^{\mu\nu}, \tau^\mu; \bar{g}] - \Delta S_\Lambda \end{aligned} \quad (5.35)$$

で与えられる. 有効作用は

$$\begin{aligned} \Gamma_\Lambda[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}, \xi^\mu, \bar{\xi}^\mu; \beta^{\mu\nu}, \tau^\mu] &:= \Gamma_\Lambda[\bar{h}^{\mu\nu}, \xi^\mu, \bar{\xi}^\mu; \beta^{\mu\nu}, \tau^\mu; \bar{g}] \\ &= \bar{\Gamma}_\Lambda[g_{\mu\nu}] + \hat{\Gamma}_\Lambda[g_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu}] \\ &\quad + S_{\text{gf}}[h_{\mu\nu}; \bar{g}_{\mu\nu}] + S_{\text{gh}}[h_{\mu\nu}, \xi_\mu, \bar{\xi}_\mu; \bar{g}_{\mu\nu}] \\ &\quad - \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \{ \beta^{\mu\nu} \mathcal{L}_\mu g_{\mu\nu} + \tau_\mu \xi^\nu \partial_\nu \xi^\mu \} \end{aligned} \quad (5.36)$$

のように分解されるとする. 2.2.1 節で議論したように BRST 対称性の帰結として Slavnov–Taylor 恒等式が得られる. 重力理論の場合, 恒等式は

$$\int d^d x \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \left\{ \frac{\delta \Gamma'_\Lambda}{\delta \bar{h}_{\mu\nu}} \frac{\delta \Gamma'_\Lambda}{\delta \beta^{\mu a}} + \frac{\delta \Gamma'_\Lambda}{\delta \xi^\mu} \frac{\delta \Gamma'_\Lambda}{\delta \tau_\mu} \right\} = Y_\Lambda \quad (5.37)$$

となる. ただし,

$$\Gamma'_\Lambda := \Gamma_\Lambda - S_{\text{gf}}[\bar{h}; \bar{g}] \quad (5.38)$$

である. 左辺を計算すると

$$- \int d^d x \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} \frac{\delta \hat{\Gamma}[g; \bar{g}]}{\delta g_{\mu\nu}} = Y_\Lambda \quad (5.39)$$

を得る. 近似として $\hat{\Gamma}_\Lambda = 0$ を採用することで微分同相写像に対して不変なフローを評価できる [60].

5.3 非最小結合を伴う Higgs–Yukawa 模型

ここで考える模型は実スカラー場 $\hat{\phi}$ と N_f フレーバーのフェルミオン $\hat{\psi}$ が重力場と非最小結合している Higgs–Yukawa 模型である [357]. 計量場を $\hat{g}_{\mu\nu}$ とし, 体積要素は $\sqrt{\hat{g}}$ と書く. 背景場の方法を用いて解析を行うことを考える. 場 $\hat{g}_{\mu\nu}$ と $\hat{\phi}, \hat{\psi}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \\ \hat{\phi} &= \phi + \varphi, \\ \hat{\psi} &= \psi + \chi\end{aligned}\tag{5.40}$$

と分解する. $g_{\mu\nu}, \phi, \psi$ は背景場で, 経路積分における積分測度は $\hat{g}_{\mu\nu}, \hat{\phi}, \hat{\psi}$ から $h_{\mu\nu}, \varphi, \chi$ に変わる. インフレーションのシナリオを念頭に置いているので, 背景計量場 $g_{\mu\nu}$ は de-Sitter 計量であるとする.*9 すなわち, リーマン・テンソルが

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{D(D-1)}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R,\tag{5.41}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{D}g_{\mu\nu}R\tag{5.42}$$

を満たすとする.

今, 4 次元ユークリッド空間における有効作用

$$\begin{aligned}\Gamma_\Lambda[g_{\mu\nu}, \phi, \psi; h_{\mu\nu}, \varphi, \chi] &= \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left\{ V_\Lambda(\hat{\phi}^2) - F_\Lambda(\hat{\phi}^2) \hat{R} + \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{\phi} \partial_\nu \hat{\phi} + \bar{\hat{\psi}} \hat{\nabla} \hat{\psi} + y_\Lambda \hat{\phi} \bar{\hat{\psi}} \hat{\psi} \right\} \\ &\quad + S_{\text{gf}} + S_{\text{gh}},\end{aligned}\tag{5.43}$$

を考える. ただし, ∇_μ はスピノール場の共変微分であり,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - \frac{i}{4} \omega_{\mu ab} \sigma^{ab} \psi, \\ \nabla_\mu \bar{\psi} &= \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{i}{4} \omega_{\mu ab} \bar{\psi} \sigma^{ab}\end{aligned}\tag{5.44}$$

かつ $\sigma^{ab} = \frac{i}{2}[\gamma^a, \gamma^b]$, $\omega_{\mu ab}$ はスピン接続である. S_{gf} と S_{gh} はそれぞれこの系の微分同相写像に対するゲージ固定作用とゴーストの作用であり, de-Sitter 計量の下では 5.2 節で与えた手続きを用いて

$$S_{\text{gf}} = \frac{1}{2\alpha} \int d^4x \sqrt{g} F(\phi^2) g^{\mu\nu} \Sigma_\mu \Sigma_\nu,\tag{5.45}$$

$$S_{\text{gh}} = \int d^4x \sqrt{g} \bar{C}_\mu \left[-g^{\mu\rho} \partial^2 - \frac{1-\beta}{2} \partial^\mu \partial^\rho + R^{\mu\rho} \right] C_\rho,\tag{5.46}$$

と与えられる [60, 272, 274, 275]. ただし, C_μ と $\bar{C}_\mu$ はそれぞれ微分同相写像に対するゴースト場と反ゴースト場, α と β ゲージ固定パラメータ, そして,

$$\Sigma_\mu := \partial^\nu h_{\nu\mu} - \frac{\beta+1}{4} \partial_\mu h, \quad h := g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}\tag{5.47}$$

*9 de-Sitter 空間のレビューは例えば文献 [358] を見よ.

と定義した。^{*10} 尚, この節では重力場に対する共変微分を ∇ ではなく, ∂ と書くことにする.

この作用には Z_2 対称性: $\hat{\phi} \rightarrow -\hat{\phi}$ と $\hat{\psi} \rightarrow \gamma_5 \hat{\psi}$ を課している. もし, 背景場 $\phi \neq 0$ をとると Z_2 対称性が破れる. 本論では対称相 $\phi = 0$ のみを考える. したがって, ポテンシャルと非最小結合ポテンシャルを $\hat{\phi}$ で展開すると

$$V_\Lambda(\hat{\phi}^2) = \hat{\lambda}_0(\Lambda) + \hat{\lambda}_2(\Lambda) \hat{\phi}^2 + \hat{\lambda}_4(\Lambda) \hat{\phi}^4 + \dots, \quad (5.48)$$

$$F_\Lambda(\hat{\phi}^2) = \hat{\xi}_0(\Lambda) + \hat{\xi}_2(\Lambda) \hat{\phi}^2 + \hat{\xi}_4(\Lambda) \hat{\phi}^4 + \dots \quad (5.49)$$

となる. ここで, $\hat{\lambda}_0$ は宇宙定数, $\hat{\lambda}_2 = m^2/2$ はスカラー場の質量, $\hat{\xi}_0 = 1/16\pi G$ はニュートン定数である. 特に, $\hat{\xi}_2$ を非最小結合定数と呼び, Higgs・インフレーションのシナリオ [309, 322] では重要な役割をする.

5.3.1 2点関数

くりこみ群方程式 (2.42) を用いて計算するには 2 点関数 $\Gamma_\Lambda^{(2)}$ を求める必要がある. ここで有効作用 (5.43) の 2 点関数を示す. そのために背景場とゆらぎを超場でそれぞれ, $\Phi := (g_{\mu\nu}, \phi, \psi)$ と $\Upsilon := (h_{\mu\nu}, \varphi, \chi, C_\mu, \bar{C}_\mu)$ と書くと有効作用は $\Gamma_\Lambda[\Phi; \Upsilon]$ と両者に依存した形になっている. 今, Υ のベキで展開すると

$$\Gamma_\Lambda[\Phi; \Upsilon] = \Gamma_\Lambda[\Phi] + \Gamma_\Lambda^{(1)}[\Phi; \Upsilon] + \Gamma_\Lambda^{(2)}[\Phi; \Upsilon] + \mathcal{O}(\Upsilon^3) \quad (5.50)$$

となる. ただし, $\Gamma_\Lambda^{(n)}[\Phi; \Upsilon]$ は Υ^n を持つ項とする. $\Gamma_\Lambda^{(2)}$ はゆらぎ Υ の 2 次の項であり,

$$\begin{aligned} \Gamma_\Lambda^{(2)}[\Phi; \Upsilon] = & \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left[-\frac{1}{2} F(\phi^2) h^{\mu\nu} \partial^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} F(\phi^2) h \partial^2 h - F(\phi^2) h \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} + F(\phi^2) h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\rho h^\rho{}_\nu \right. \\ & + \left(\frac{1}{4} h^2 - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \right) (V(\phi^2) + y \phi \bar{\psi} \psi - F(\phi^2) R) \\ & + F(\phi^2) h h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - F(\phi^2) h_\rho{}^\nu h^{\mu\rho} R_{\mu\nu} - F(\phi^2) h^{\mu\nu} R_{\rho\mu\sigma\nu} h^{\rho\sigma} \\ & \left. - \frac{1}{16} h_\rho{}^\mu \partial_\nu h_{\sigma\mu} \bar{\psi} \gamma^\nu [\gamma^\rho, \gamma^\sigma] \psi \right] \\ & + \int d^4x \sqrt{g} \varphi \left[-2\phi F'(\phi^2) \{ \partial_\mu \partial_\nu - \partial^2 g_{\mu\nu} \} h^{\mu\nu} \right. \\ & \left. + h \left\{ \phi V'(\phi^2) + \frac{1}{2} y \bar{\psi} \psi - \phi F'(\phi^2) R \right\} + h^{\mu\nu} \{ 2\phi F'(\phi^2) + R_{\mu\nu} \} \right] \\ & + \int d^4x \sqrt{g} h \left[\frac{1}{2} y \phi (\bar{\psi} \chi + \bar{\chi} \psi) \right] \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \varphi \left[\{ -\partial^2 + 2V'(\phi^2) + 4\phi^2 V''(\phi^2) \} - R \{ 2F'(\phi^2) + 4\phi^2 F''(\phi^2) \} \right] \varphi \\ & + \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{4} (-\partial_\mu h + \partial_\nu h^\nu{}_\mu) (\bar{\psi} \gamma^\mu \chi - \bar{\chi} \gamma^\mu \psi) \right] \\ & + \int d^4x \sqrt{g} \varphi \left[y (\bar{\psi} \chi + \bar{\chi} \psi) \right] + \int d^4x \sqrt{g} \bar{\chi} \left[\not{\partial} + y \phi \right] \chi + S_{\text{GF}} + S_{\text{gh}} \end{aligned} \quad (5.51)$$

^{*10} 以下では記号への付いていない量は $g_{\mu\nu}$ によって添え字の上げ下げを行うとする. また, R や ∇ などは $g_{\mu\nu}$ と背景場の四脚場 e_μ^a で記述されているとする.

と計算できる。^{*11} S_{gf} と S_{gh} は (5.45) 式と (5.46) で与えられている。ここで、プライム'は ϕ^2 による微分を表しているとする。つまり、

$$\begin{aligned} V_\phi &= 2\phi V', & V_{\phi\phi} &= 2V' + 4\phi^2 V'', \\ F_\phi &= 2\phi F', & F_{\phi\phi} &= 2F' + 4\phi^2 F'' \end{aligned} \quad (5.52)$$

とする。

5.3.2 York 分解

重力場 $h_{\mu\nu}$ をスピンの自由度ごとに分解する。York 分解 [360] と呼ばれ、

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^\perp + \partial_\mu \tilde{\xi}_\nu + \partial_\nu \tilde{\xi}_\mu + \left(\partial_\mu \partial_\nu - \frac{1}{D} g_{\mu\nu} \partial^2 \right) \tilde{\sigma} + \frac{1}{D} g_{\mu\nu} h, \quad (5.53)$$

と与えられる。スピンの自由度ごとにプロパゲータを対角化できる。ここで、 $\partial^2 := g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ と定義した。それぞれの場は

- $h_{\mu\nu}^\perp$: スピン 2 の横波かつトレースレス ($\partial^\nu h_{\mu\nu}^\perp = 0$, $g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^\perp = 0$) のテンソル場
- $\tilde{\xi}_\mu$: スピン 1 の横波 ($\partial^\mu \tilde{\xi}_\mu = 0$) ベクトル場
- $\tilde{\sigma}, h := g^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$: スピン 0 のスカラー場

また、ゴースト場に関しても

$$C_\mu = C_\mu^\perp + \partial_\mu \tilde{C}, \quad \bar{C}_\mu = \bar{C}_\mu^\perp + \partial_\mu \bar{C} \quad (5.54)$$

と分解される。 $\tilde{C}, \bar{C}$ はスピン 0 のスカラー場、 $C_\mu^\perp$ と $\bar{C}_\mu^\perp$ はスピン 1 の縦波ベクトル場で $\partial^\mu C_\mu^\perp = \partial^\mu \bar{C}_\mu^\perp = 0$ を満たす。

この分解を行うと経路積分の測度に影響を与えてしまう。そこで場を次のように再定義し直す [248]:

$$\xi_\mu = \sqrt{-\partial^2 - \frac{R}{D}} \tilde{\xi}_\mu, \quad \sigma = \sqrt{-\partial^2 - \frac{R}{D-1}} \sqrt{-\partial^2} \tilde{\sigma}, \quad C = \sqrt{-\partial^2} \tilde{C}. \quad (5.55)$$

この再定義による測度のヤコビアンと York 分解で生じるヤコビアン同士が打ち消しあうことで取り扱いが便利になる。その他の場は再定義しなくてよい [248]。

5.3.3 York 分解後の 2 点関数

York 分解を用いると 2 点関数はそれぞれの場ごとに書くことができる。まず、ボソンに対して、

$$\Gamma_{\text{BB}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{h_{\mu\nu}^\perp h_{\rho\sigma}^\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{\xi_\mu \xi_\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{\text{SS}} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

^{*11} $\sqrt{g}$ とリッチ・スカラー R に対する変分は文献 [359] を参照せよ。また、スピノルの微分 ∇ の変分は文献 [282] を参照せよ。

となる。ただし,

$$\Gamma_{h_{\mu\nu}^\perp h_{\rho\sigma}^\perp} = (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})_{\text{sym}} \left[\frac{F}{2} \left(p^2 + \frac{2R}{3} \right) - \frac{V+Y}{2} \right] + (\text{spin connection term}), \quad (5.57)$$

$$\Gamma_{\xi_\mu \xi_\nu} = g^{\mu\nu} \left[\frac{F}{\alpha} \left(p^2 + \frac{2\alpha-1}{4} R \right) - V - Y \right] + (\text{spin connection term}), \quad (5.58)$$

$$\Gamma_{\text{SS}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\sigma\sigma} & \Gamma_{\sigma h} & \Gamma_{\sigma\phi} \\ \Gamma_{h\sigma} & \Gamma_{hh} & \Gamma_{h\phi} \\ \Gamma_{\phi\sigma} & \Gamma_{\phi h} & \Gamma_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & \sigma & h & \varphi \\ \sigma & \left[\frac{3F}{16} \left(\frac{3-\alpha}{\alpha} p^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha} R \right) - \frac{3(V+Y)}{8} \right] & \frac{3F}{16} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \sqrt{p^2 - \frac{R}{3}} \sqrt{p^2} & -\frac{3F_\varphi}{4} \sqrt{p^2 - \frac{R}{3}} \sqrt{p^2} \\ h & \frac{3F}{16} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} \sqrt{p^2 - \frac{R}{3}} \sqrt{p^2} & -\frac{F}{16} \frac{3\alpha-\beta^2}{\alpha} p^2 + \frac{V+Y}{8} & -\frac{3F_\varphi}{4} \left(p^2 + \frac{R}{3} \right) + \frac{V_\varphi}{2} + \frac{Y_\varphi}{2} \\ \varphi & -\frac{3F_\varphi}{4} \sqrt{p^2 - \frac{R}{3}} \sqrt{p^2} & -\frac{3F_\varphi}{4} \left(p^2 + \frac{R}{3} \right) + \frac{V_\varphi}{2} + \frac{Y_\varphi}{2} & p^2 + V_{\varphi\varphi} - RF_{\varphi\varphi} \end{matrix} \quad (5.59)$$

と与えられる。ただし, $(g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})_{\text{sym}} = \frac{1}{4} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$ とした。また, ド・ジッター空間におけるダランベルシアンを $p^2 := -\partial^2$, 微分の上の左矢印 $\overleftarrow{}$ は左微分, $Y := y\phi\bar{\psi}\psi$ は Yukawa 項で $Y_\phi := y\bar{\psi}\psi$ はその ϕ による微分である。(5.57) 式と (5.58) 式にある “spin connection term” はスピン接続を計量場で微分した項を意味する。ここで評価するのはポテンシャル V , 非最小ポテンシャル F , Yukawa 結合定数 y に対するくりこみ群方程式であり, “spin connection term” はこれらには寄与しない。なぜなら,

$$\begin{aligned} (\text{spin connection term})_{h_{\mu\nu}^\perp h_{\rho\sigma}^\perp} &= -\frac{1}{32} h_{\mu}^{\perp\lambda} \partial_\rho h_{\lambda\nu}^\perp \bar{\psi} \{ \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho \} \psi, \\ (\text{spin connection term})_{\xi_\mu \xi_\nu} &= \frac{1}{32} \xi_\mu \partial_\rho \partial^2 \xi_\nu \bar{\psi} \{ \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\rho \} \psi \end{aligned} \quad (5.60)$$

となり, この項から V や F , Yukawa 結合定数 Y への補正は与えられない。したがって, 以下の計算では無視する。

次に, フェルミオンのプロパゲータは

$$\Gamma_{\text{FF}}^{\text{phys}} = \begin{matrix} & \chi & \bar{\chi}^T \\ \chi^T & \left[\begin{array}{cc} 0 & -\left(\overleftarrow{\nabla}^T + y\phi \right) \\ \overleftarrow{\nabla} + y\phi & 0 \end{array} \right] \\ \bar{\chi} & \end{matrix} \quad (5.61)$$

$$\Gamma_{\text{FF}}^{\text{ghost}} = \begin{matrix} & C_\nu^\perp & \bar{C}_\nu^\perp & C & \bar{C} \\ C_\mu^\perp & \left[\begin{array}{cccc} 0 & -g^{\mu\nu} \left(p^2 - \frac{R}{4} \right) & 0 & 0 \\ \bar{C}_\mu^\perp & g^{\mu\nu} \left(p^2 - \frac{R}{4} \right) & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & -\left[\left(2 - \frac{1+\beta}{2} \right) p^2 - \frac{R}{2} \right] \\ \bar{C} & 0 & 0 & \left(2 - \frac{1+\beta}{2} \right) p^2 - \frac{R}{2} \end{array} \right] \\ \bar{C}_\mu^\perp & & & & \\ C & & & & \\ \bar{C} & & & & \end{matrix} \quad (5.62)$$

となる。

ボソンとフェルミオンを含むバーテックスを以下に示す:

$$\Gamma_{\text{BF}} = \begin{matrix} & \chi & \bar{\chi}^T \\ \begin{matrix} h_{\mu\nu}^\perp \\ \xi_\mu \\ \sigma \\ h \\ \varphi \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}\sqrt{p^2}(\bar{\psi}\gamma^\mu) & -\frac{1}{4}\sqrt{p^2}(\gamma^\mu\psi)^T \\ -\frac{3}{16}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu\right)(\bar{\psi}\gamma^\mu) & -\frac{3}{16}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu\right)(\gamma^\mu\psi)^T \\ \frac{y}{2}\phi\bar{\psi} - \frac{3}{16}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu\right)(\bar{\psi}\gamma^\mu) & -\frac{y}{2}\phi\psi^T - \frac{3}{16}\left(\overleftarrow{\partial}_\mu\right)(\gamma^\mu\psi)^T \\ y\bar{\psi} & -y\psi^T \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (5.63)$$

$$\Gamma_{\text{FB}} = \begin{matrix} & h_{\mu\nu}^\perp & \xi_\mu & \sigma & h & \varphi \\ \begin{matrix} \chi^T \\ \bar{\chi} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4}(\bar{\psi}\gamma^\mu)^T\sqrt{p^2} & \frac{3}{16}(\bar{\psi}\gamma^\mu)^T\partial_\mu & -\frac{y}{2}\phi\bar{\psi}^T + \frac{3}{16}(\bar{\psi}\gamma^\mu)^T\partial_\mu & -y\bar{\psi}^T \\ 0 & \frac{1}{4}(\gamma^\mu\psi)\sqrt{p^2} & \frac{3}{16}(\gamma^\mu\psi)\partial_\mu & \frac{y}{2}\phi\psi + \frac{3}{16}(\gamma^\mu\psi)\partial_\mu & y\psi \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (5.64)$$

$$\Gamma_{\text{FF}} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\text{FF}}^{\text{phys}} & 0 \\ 0 & \Gamma_{\text{FF}}^{\text{ghost}} \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

ここで^Tはスピノル空間に対する転置を意味する.

さらに, くりこみ群を適用するためにカットオフ関数を書いておく. ボソンは自由度ごとにプロパゲータが対角であるから

$$R_{\text{BB}} = \begin{bmatrix} R_{h_{\mu\nu}^\perp h_{\rho\sigma}^\perp} & 0 & 0 \\ 0 & R_{\xi_\mu \xi_\nu} & 0 \\ 0 & 0 & R_{\text{SS}} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

となる. このときそれぞれは

$$R_{h_{\mu\nu}^\perp h_{\rho\sigma}^\perp} = (g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})_{\text{sym}} \frac{F}{2} R_\Lambda(p^2), \quad (5.67)$$

$$R_{\xi_\mu \xi_\nu} = g^{\mu\nu} \frac{F}{\alpha} R_\Lambda(p^2), \quad (5.68)$$

$$R_{\text{SS}} = \begin{matrix} & \sigma & h & \varphi \\ \begin{matrix} \sigma \\ h \\ \varphi \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{3F}{16} \frac{3-\alpha}{\alpha} R_\Lambda(p^2) & \frac{3F}{16} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} K_\Lambda(p^2) & -\frac{3F_\phi}{4} K_\Lambda(p^2) \\ \frac{3F}{16} \frac{\beta-\alpha}{\alpha} K_\Lambda(p^2) & -\frac{F}{16} \frac{3\alpha-\beta^2}{\alpha} R_\Lambda(p^2) & -\frac{3F_\phi}{4} R_\Lambda(p^2) \\ -\frac{3F_\phi}{4} K_\Lambda(p^2) & -\frac{3F_\phi}{4} R_\Lambda(p^2) & R_\Lambda(p^2) \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.69)$$

と与え, ここで $R_\Lambda(p^2)$ と $K_\Lambda(p^2)$ として

$$R_\Lambda(p^2) := (\Lambda^2 - p^2) \theta(\Lambda^2 - p^2), \quad (5.70)$$

$$K_\Lambda(p^2) := \sqrt{p^2 + R_\Lambda(p^2) - \frac{R}{3}} \sqrt{p^2 + R_\Lambda(p^2)} - \sqrt{p^2 - \frac{R}{3}} \sqrt{p^2} \quad (5.71)$$

とする. ^{*12} このようにカットオフ関数を与え, 微分演算子 p^2 の固有値に対する積分を行うと, 2点関数にある p^2 がすべて Λ^2 に置き換わる.

^{*12} $R_\Lambda(p^2)$ に最適化カットオフ関数 [34] を与えた.

くりこみ群方程式に $\partial R_\Lambda / \partial \Lambda$ の項があるので、カットオフ関数の微分を示しておく：

$$\frac{\partial R_\Lambda(p^2)}{\partial \Lambda} = 2\Lambda \theta(\Lambda^2 - p^2), \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial K_\Lambda(p^2)}{\partial \Lambda} = \frac{\Lambda \left(2\Lambda^2 - \frac{R}{3}\right) \theta(\Lambda^2 - p^2)}{\sqrt{p^2 + (\Lambda^2 - p^2) \theta(\Lambda^2 - p^2)} \sqrt{p^2 - \frac{R}{3} + (\Lambda^2 - p^2) \theta(\Lambda^2 - p^2)}}. \quad (5.73)$$

ステップ関数を用いずに陽に書くと

$$R_\Lambda(p^2) = \begin{cases} \Lambda^2 - p^2 \\ 0, \end{cases} \quad \frac{\partial R_\Lambda(p^2)}{\partial \Lambda} = \begin{cases} 2\Lambda & \text{for } p^2 < \Lambda^2 \\ 0 & \text{for } p^2 \geq \Lambda^2, \end{cases} \quad (5.74)$$

$$K_\Lambda(p^2) = \begin{cases} \sqrt{\Lambda^2 - \frac{R}{3}} \sqrt{\Lambda^2} - \sqrt{p^2 - \frac{R}{3}} \sqrt{p^2} \\ 0, \end{cases} \quad \frac{\partial K_\Lambda(p^2)}{\partial \Lambda} = \begin{cases} \frac{2\Lambda^2 - \frac{R}{3}}{\sqrt{\Lambda^2 - \frac{R}{3}}} & \text{for } p^2 < \Lambda^2 \\ 0 & \text{for } p^2 \geq \Lambda^2. \end{cases} \quad (5.75)$$

フェルミオン対しても同様にして

$$R_{\text{FF}} = \begin{bmatrix} R_{\text{physical}} & 0 \\ 0 & R_{\text{ghost}} \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

とし、

$$R_{\text{physical}} = \begin{matrix} & \chi & & \bar{\chi}^T \\ \chi^T & \begin{bmatrix} 0 & -\overleftarrow{\nabla}^T \left(\sqrt{1 + \frac{R_\Lambda(p^2 + \frac{R}{4})}{p^2 + \frac{R}{4}}} - 1 \right) \end{bmatrix} \\ \bar{\chi} & \begin{bmatrix} \left(\sqrt{\frac{p^2 + \frac{R}{4} + R_\Lambda(p^2 + \frac{R}{4})}{p^2 + \frac{R}{4}}} - 1 \right) \nabla & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (5.77)$$

$$R_{\text{ghost}} = \begin{matrix} & C_\nu^\perp & \bar{C}_\nu^\perp & C & \bar{C} \\ C_\mu^\perp & \begin{bmatrix} 0 & -g^{\mu\nu} R_\Lambda(p^2) & 0 & 0 \\ g^{\mu\nu} R_\Lambda(p^2) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{C}_\mu^\perp & & & & \\ C & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\left(2 - \frac{1+\beta}{2}\right) R_\Lambda(p^2) \end{bmatrix} \\ \bar{C} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(2 - \frac{1+\beta}{2}\right) R_\Lambda(p^2) & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.78)$$

と与える．ここで、 R_{physical} に対してタイプ II と呼ばれるカットオフを採用した．カットオフの種類として

- タイプ I

$$R_\Lambda(p^2) = (\Lambda^2 - p^2) \theta(\Lambda^2 - p^2) \quad (5.79)$$

- タイプ II

$$R_\Lambda(p^2 + aR) = (\Lambda^2 - (p^2 + aR)) \theta(\Lambda^2 - (p^2 + aR)) \quad (5.80)$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma_\Lambda^{(2)} + \mathcal{R}_\Lambda)_{h^\perp h^\perp} &= \text{diagram with 8 loops and a central dot}^{-1} & (\Gamma_\Lambda^{(2)} + \mathcal{R}_\Lambda)_{\xi\xi} &= \text{diagram with 2 loops and a central dot}^{-1} \\
(\Gamma_\Lambda^{(2)} + \mathcal{R}_\Lambda)_{SS} &= \left(\begin{array}{ccc} \text{diagram 1} & \text{diagram 2} & \text{diagram 3} \\ \text{diagram 4} & \text{diagram 5} & \text{diagram 6} \\ \text{diagram 7} & \text{diagram 8} & \text{diagram 9} \end{array} \right)^{-1} \\
(\Gamma_\Lambda^{(2)} + \mathcal{R}_\Lambda)_{\bar{C}^\perp C^\perp} &= \text{diagram with 1 loop and a central dot}^{-1} & (\Gamma_\Lambda^{(2)} + \mathcal{R}_\Lambda)_{\bar{C}C} &= \text{diagram with 1 loop and a central dot}^{-1} \\
(\Gamma_\Lambda^{(2)} + \mathcal{R}_\Lambda)_{\bar{\chi}\chi} &= \text{diagram with 1 loop and a central dot}^{-1}
\end{aligned}$$

図 5.2 プロパゲータのダイアグラム

- タイプ III

$$R_\Lambda(p^2 + aR + bE) = (\Lambda^2 - (p^2 + aR + bE))\theta(\Lambda^2 - (p^2 + aR + bE)) \quad (5.81)$$

と分類されている. a, b は定数, R はリッスカラー, E は任意の外場である. 非最小ポテンシャル $F(\phi^2)$ にフェルミオンの量子効果の符号が正しくなるためにはタイプ II カットオフを採用すべきであることが報告されている [302]. 図 5.2 にプロパゲータのダイアグラム, 図 5.3 に Γ_{FB} と Γ_{BF} のダイアグラムを示す.

5.4 くりこみ群方程式

Wetterich 方程式は場ごとに分解され, 次のようになる.

$$\begin{aligned}
\partial_t \Gamma_\Lambda &= \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{h^\perp h^\perp} + \frac{1}{2} \text{Tr}' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \text{Tr}'' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{SS} \\
&\quad - \text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\bar{\chi}\chi} - \text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\bar{C}^\perp C^\perp} - \text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\bar{C}C}. \quad (5.82)
\end{aligned}$$

ここで

$$\partial_t := -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \quad (5.83)$$

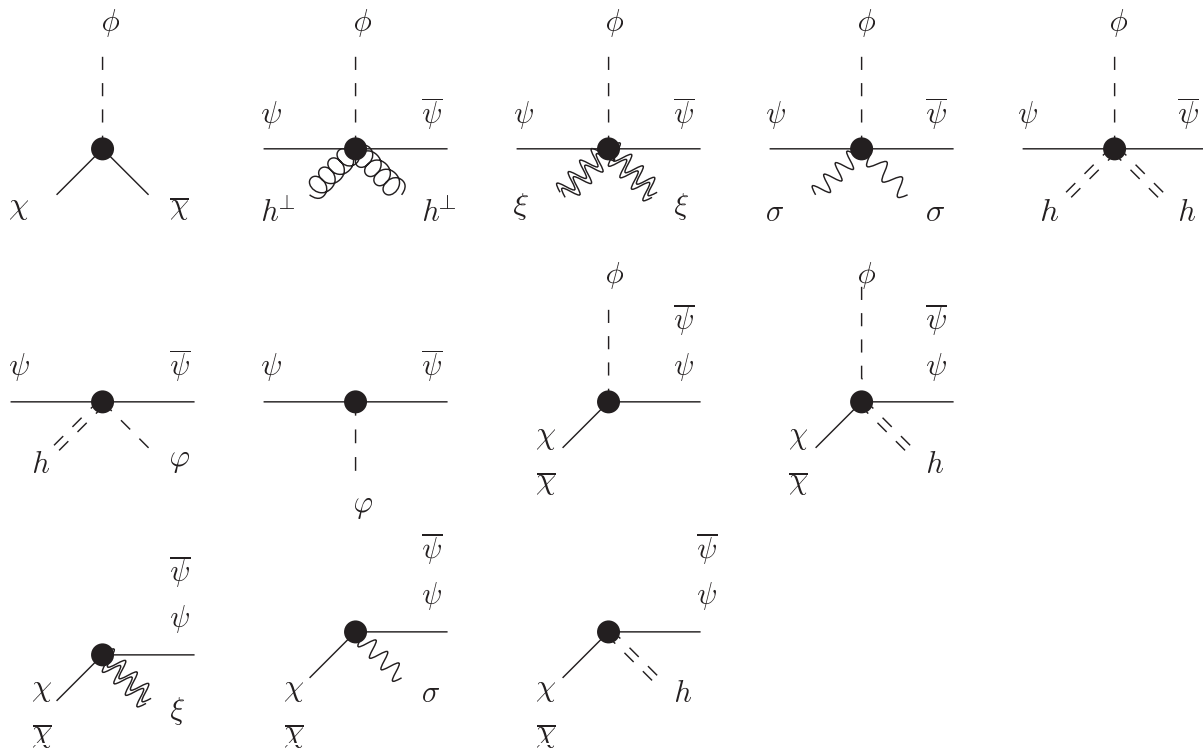


図 5.3 フェルミオンが含まれるバーテックスのダイアグラム

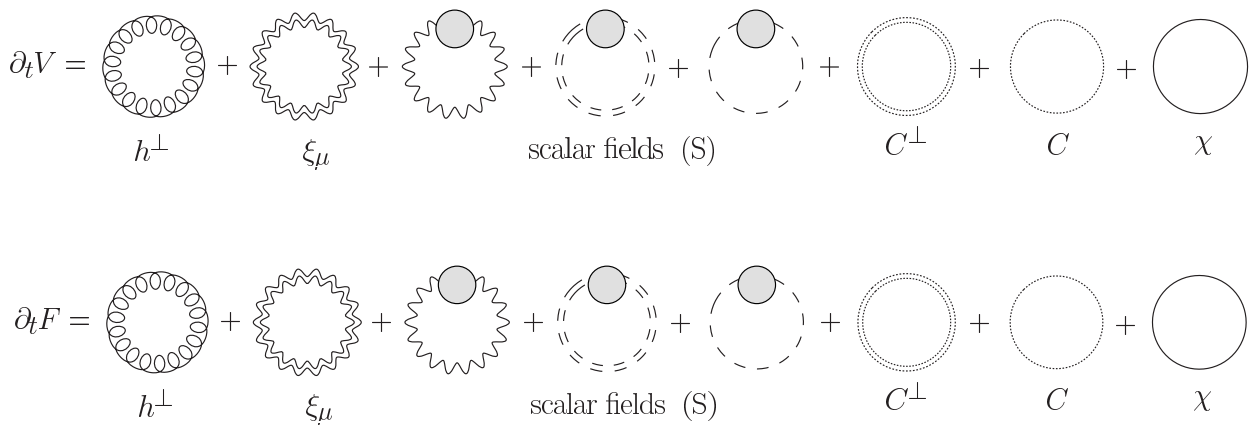


図 5.4 V と F に寄与する 1 ループ・ダイアグラム. 灰色の円はスピンの場同士の混合を表す.

と定義した. トレースについてのプライム'は微分演算子の固有値の中, 負のものを引き算することを意味する. ^{*13} (5.82) 式の各項は図 5.4 の個々のダイアグラムと対応している.

5.4.1 V と F に対するくりこみ群方程式

ベーター関数の導出過程は付録 F.2 に示した. くりこみ群方程式は次のように求められる:

$$\begin{aligned}
 \partial_t V &= \frac{\Lambda^4}{192\pi^2} \left[-6 - \frac{30V}{\Psi} - \frac{6(\Lambda^2\Psi + 24\phi^2\Lambda^2 F'\Psi' + F\Lambda^2\Sigma_1)}{\Delta} \right. \\
 &\quad \left. + \partial_t F \left(\frac{4}{F} + \frac{5\Lambda^2}{\Psi} + \frac{\Lambda^2\Sigma_1}{\Delta} \right) + \partial_t F' \frac{24\phi^2\Lambda^2\Psi'}{\Delta} \right] + \frac{N_f}{8\pi^2} \frac{\Lambda^6}{\Sigma_3}, \\
 \partial_t F &= -\frac{\Lambda^2}{2304\pi^2} \left\{ 150 + \frac{120\Lambda^2 F(3\Lambda^2 F - V)}{\Psi^2} \right. \\
 &\quad - \frac{24}{\Delta} (\Lambda^2\Psi + 24\phi^2\Lambda^2 F'\Psi' + F\Lambda^2\Sigma_1) \\
 &\quad - \frac{36}{\Delta^2} \left[-4\phi^2(6\Lambda^4 F'^2 + \Psi'^2)\Delta \right. \\
 &\quad \left. + 4\phi^2\Psi\Psi' (7\Lambda^2 F' - V') (\Sigma_1 - \Lambda^2) \right. \\
 &\quad \left. + 4\phi^2\Sigma_1 (7\Lambda^2 F' - V') (2\Psi V' - V\Psi') + (2\Lambda^4\Psi^2 + 48\Lambda^4 F'\phi^2\Psi\Psi' - 24\Lambda^4 F\phi^2\Psi'^2)\Sigma_2 \right] \\
 &\quad + \frac{\partial_t F}{F} \left[30 - \frac{10\Lambda^2 F(7\Psi + 4V)}{\Psi^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{6}{\Delta^2} (\Lambda^2 F\Sigma_1\Delta + 4\phi^2 V'\Psi'\Delta - 24\Lambda^4 F\phi^2\Psi'^2\Sigma_2 - 4\phi^2\Lambda^2 F\Psi'\Sigma_1 (7\Lambda^2 F' - V')) \right] \\
 &\quad \left. - \partial_t F' \frac{24\Lambda^2\phi^2}{\Delta^2} ((\Lambda^2 F' + 5V')\Delta - 2(7F'\Lambda^2 - V')\Psi\Sigma_1 - 12\Lambda^2\Psi\Psi'\Sigma_2) \right\} \\
 &\quad + \frac{N_f}{48\pi^2} \frac{\Lambda^4}{\Sigma_3}.
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
 \Psi &:= F\Lambda^2 - V, \\
 \Sigma_1 &:= \Lambda^2 + 2V' + 4\phi^2 V'', \\
 \Sigma_2 &:= 2F' + 4\phi^2 F'', \\
 \Sigma_3 &:= \Lambda^2 + y^2\phi^2, \\
 \Delta &:= 12\phi^2\Psi'^2 + \Psi\Sigma_1
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

と定義した. $N_f = 0$ とすると (5.84) 式と (5.85) は [274] に与えられている結果と一致する.

ここで, $V(\phi^2)$ と $F(\phi^2)$ を ϕ^2 のベキで展開

$$V(\phi^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\lambda}_{2n} \phi^{2n}, \quad F(\phi^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\xi}_{2n} \phi^{2n} \tag{5.87}$$

^{*13} 負の固有値は R^2 のオーダーで現れる. したがって, ここでは無視する. 詳細は [248] を参照せよ.

を考える．以下で固定点構造を調べるためにカットオフ Λ で無次元化した結合定数

$$\lambda_{2n} := \hat{\lambda}_{2n} \Lambda^{2n-4}, \quad \xi_{2n} := \hat{\xi}_{2n} \Lambda^{2n-2} \quad (5.88)$$

を定義する．^{*14} ここで定義した結合定数 λ_{2n}, ξ_{2n} に対するくりこみ群方程式を評価することで固定点構造を調べる．このくりこみ群方程式は一般に

$$\partial_t \lambda_{2n} = -(2n-4) \lambda_{2n} + \text{fluctuations}, \quad \partial_t \xi_{2n} = -(2n-2) \xi_{2n} + \text{fluctuations} \quad (5.89)$$

という形をとる．“fluctuations” は量子補正項である．第1項目は正準スケーリングであり，結合定数の運動量次元を表している．

結合定数のくりこみ群方程式

ここで，(5.84) 式と (5.85) 式に展開 (5.87) と無次元化 (5.88) を用いた場合のくりこみ群方程式を陽に示す．このとき $V(\phi^2)$ と $F(\phi^2)$ をそれぞれ $\hat{\lambda}_4$ と $\hat{\xi}_2$ までのオーダーで対称相 ($\phi=0$) 周りで展開した場合を示す． $\xi_0, \lambda_0, \xi_2, \lambda_2, \lambda_4$ に対して以下のようにくりこみ群方程式を得る．

$$\begin{aligned} \partial_t \xi_0 = & 2\xi_0 - \frac{1}{384\pi^2} \left[25 - \frac{4}{1+2\lambda_2} - \frac{24\xi_2}{(1+2\lambda_2)^2} + \frac{8\xi_0(7\xi_0-2\lambda_0)}{(\xi_0-\lambda_0)^2} \right] \\ & + \frac{1}{1152\pi^2} \frac{\partial_t \xi_0 - 2\xi_0}{\xi_0} \frac{17\xi_0^2 + 18\lambda_0\xi_0 - 15\lambda_0^2}{(\xi_0-\lambda_0)^2} + \frac{N_f}{48\pi^2}, \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\partial_t \lambda_0 = 4\lambda_0 - \frac{1}{32\pi^2} \left[2 + \frac{1}{1+2\lambda_2} + \frac{6\lambda_0}{\xi_0-\lambda_0} \right] + \frac{\partial_t \xi_0 - 2\xi_0}{96\pi^2\xi_0} \frac{5\xi_0-2\lambda_0}{\xi_0-\lambda_0} + \frac{N_f}{8\pi^2}, \quad (5.91)$$

^{*14} もし，場のくりこみを考慮する場合はそのくりこみ因子 Z_Λ の逆数をかけて定義する．しかし，ここでは LPA を採用しているので $Z_\Lambda = 1$ となる．また，そのスケールによる微分，すなわち，異常次元は $\eta = -\partial_t Z_\Lambda / Z_\Lambda = 0$ となつてくりこみ群方程式に影響を与えない．

$$\begin{aligned}
\partial_t \xi_2 = & -\frac{1}{576\pi^2} \left[\frac{1+2\lambda_2}{\xi_0 - \lambda_0} \left(9 + \frac{39\xi_0}{\xi_0 - \lambda_0} + \frac{60\xi_0^2}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} \right) + \frac{3(3+32\xi_2)}{\xi_0 - \lambda_0} - \frac{6\xi_0(11+2\xi_2)}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} \right. \\
& - \frac{60\xi_0^2(1+2\xi_2)}{(\xi_0 - \lambda_0)^3} + \frac{216\xi_2(1+2\xi_2)^2}{(1+2\lambda_2)^3(\xi_0 - \lambda_0)} + \frac{9[\lambda_0(5-2\xi_2) - 2\xi_0(1+2\xi_2)](1+2\xi_2)}{(1+2\lambda_2)(\xi_0 - \lambda_0)^2} \\
& + \frac{27(1+2\xi_2)(1-10\xi_2-16\xi_2^2)}{(1+2\lambda_2)^2(\xi_0 - \lambda_0)} + \frac{108\xi_0\xi_2(1+2\xi_2)^2}{(1+2\lambda_2)^2(\xi_0 - \lambda_0)^2} + \frac{72\lambda_4}{(1+2\lambda_2)^2} \frac{1+12\xi_2+2\lambda_2}{1+2\lambda_2} \Big] \\
& + \frac{\partial_t \xi_0 - 2\xi_0}{1152\pi^2 \xi_0} \left[\frac{1+2\lambda_2}{\xi_0 - \lambda_0} \left(3 + \frac{18\xi_0}{\xi_0 - \lambda_0} + \frac{20\xi_0^2}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} \right) + \frac{15\xi_2}{\xi_0} - \frac{6(1+\xi_2)}{\xi_0 - \lambda_0} - \frac{10\xi_0(3+4\xi_2)}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} \right. \\
& - \frac{20\xi_0^2(1+2\xi_2)}{(\xi_0 - \lambda_0)^3} - \frac{3[\lambda_0 - \xi_0(5-4\xi_2)](1+2\xi_2)}{(1+2\lambda_2)(\xi_0 - \lambda_0)^2} + \frac{36\xi_0\xi_2(1+2\xi_2)^2}{(1+2\lambda_2)^2(\xi_0 - \lambda_0)^2} \Big] \\
& + \frac{\partial_t \xi_2}{1152\pi^2 \xi_0} \left[-15 + \frac{54\xi_0}{\xi_0 - \lambda_0} + \frac{20\xi_0^2}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} - \frac{6\xi_0(7+2\xi_2)}{(1+2\lambda_2)(\xi_0 - \lambda_0)} - \frac{144\xi_0\xi_2(1+2\xi_2)}{(1+2\lambda_2)(\xi_0 - \lambda_0)} \right] \\
& - \frac{N_f y^2}{48\pi^2}, \tag{5.92}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \lambda_2 = & 2\lambda_2 - \frac{1}{48\pi^2} \left[\frac{9\lambda_0(1+2\xi_2)}{2(\xi_0 - \lambda_0)^2} - \frac{9(2\lambda_0 - \xi_0)(1+2\xi_2)^2}{2(1+2\lambda_2)(\xi_0 - \lambda_0)^2} - \frac{9(1+2\xi_2)^2}{2(1+2\lambda_2)^2(\xi_0 - \lambda_0)} - \frac{18\lambda_4}{(1+2\lambda_2)^2} \right] \\
& + \frac{\partial_t \xi_0 - 2\xi_0}{96\pi^2 \xi_0} \left[-\frac{2\xi_2}{\xi_0} + \frac{3\xi_0(1+2\xi_2)}{2(\xi_0 - \lambda_0)^2} - \frac{3\xi_0(1+2\xi_2)^2}{2(1+2\lambda_2)(\xi_0 - \lambda_0)^2} \right] \\
& + \frac{1}{96\pi^2} \frac{\partial_t \xi_2}{\xi_0} \left[2 - \frac{3\xi_0}{\xi_0 - \lambda_0} + \frac{6\xi_0(1+2\xi_2)}{(1+2\lambda_2)(\xi_0 - \lambda_0)} \right] - \frac{N_f y^2}{8\pi^2}, \tag{5.93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \lambda_4 = & -\frac{1}{48\pi^2} \left[\frac{9}{4(\xi_0 - \lambda_0)^2} \left(5(1+2\lambda_2)(1+4\xi_2) - (1+2\xi_2)(21+62\xi_2) + \frac{33(1+2\xi_2)^3}{1+2\lambda_2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{(1+2\xi_2)^3(23+24\xi_2)}{(1+2\lambda_2)^2} + \frac{6(1+2\xi_2)^4}{(1+2\lambda_2)^3} \right) \right. \\
& + \frac{9\xi_0(\xi_2 - \lambda_2)^2}{(\xi_0 - \lambda_0)^3} \left(6\frac{(1+2\xi_2)^2}{(1+2\lambda_2)^2} - 10\frac{1+2\xi_2}{1+2\lambda_2} + 5 \right) - \frac{72\lambda_2\lambda_4(1+2\xi_2)(1-4\lambda_2+6\xi_2)}{(\xi_0 - \lambda_0)(1+2\lambda_2)^3} \\
& + \frac{9\xi_0\lambda_4}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} \left(6\frac{(1+2\xi_2)^2}{(1+2\lambda_2)^2} - 8\frac{1+2\xi_2}{1+2\lambda_2} + 3 \right) + \frac{216\lambda_4^2}{(1+2\lambda_2)^3} \Big] \\
& + \frac{\partial_t \xi_0 - 2\xi_0}{96\pi^2 \xi_0} \left[\frac{2\xi_2^2}{\xi_0^2} + \frac{3\xi_0(\xi_2 - \lambda_2)^2}{(\xi_0 - \lambda_0)^3} \left(6\frac{(1+2\xi_2)^2}{(1+2\lambda_2)^2} - 10\frac{1+2\xi_2}{1+2\lambda_2} + 5 \right) \right. \\
& \left. + \frac{3\xi_0\lambda_4}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} \left(6\frac{(1+2\xi_2)^2}{(1+2\lambda_2)^2} - 8\frac{1+2\xi_2}{1+2\lambda_2} + 3 \right) \right] \\
& + \frac{1}{96\pi^2} \frac{\partial_t \xi_2}{\xi_0} \left[-\frac{2\xi_2}{\xi_0} - \frac{24\xi_0\lambda_4(1-4\lambda_2+6\xi_2)}{(1+2\lambda_2)^2(\xi_0 - \lambda_0)} \right. \\
& \left. - \frac{3\xi_0(\xi_2 - \lambda_2)}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} \left(12\frac{(1+2\xi_2)^2}{(1+2\lambda_2)^2} - 21\frac{1+2\xi_2}{1+2\lambda_2} + 10 \right) \right] + \frac{N_f y^4}{8\pi^2}. \tag{5.94}
\end{aligned}$$

各方程式の最後の項はフェルミオンの寄与である。 $N_f = 0$ とするとその寄与は脱結合する。 $N_f \neq 0$ かつ $y = 0$ とすると ξ_0, λ_0 にのみフェルミオンの寄与が与えられることになる。

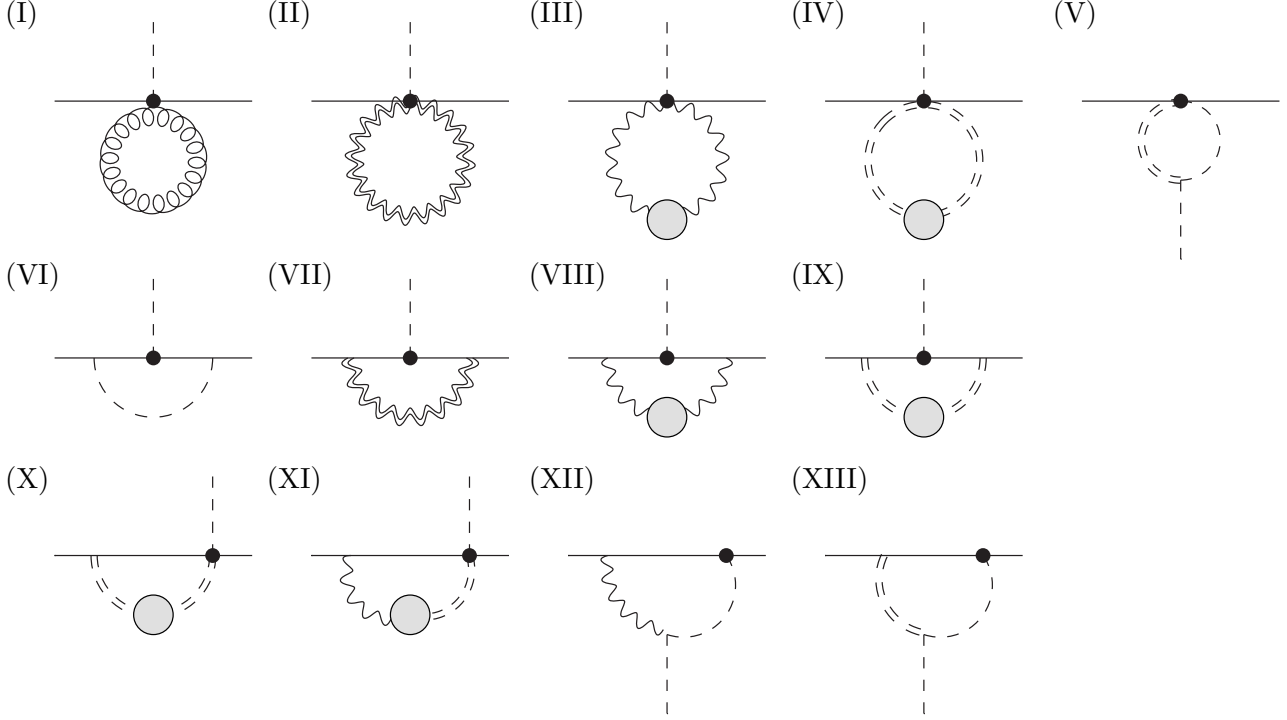


図 5.5 Yukawa 結合定数に対して補正を与えるダイアグラム．黒丸は Yukawa 結合定数 y を表し，グレーの円はスピン 1 のスカラー場の混合を表す．

5.4.2 Yukawa 結合定数に対するくりこみ群方程式

Yukawa 結合定数に対して $\phi = 0$ の周りでのくりこみ群方程式を与えると

$$\begin{aligned}
 \partial_t y = & \frac{5y\Lambda^6}{32\pi^2} \left(\frac{\partial_t \hat{\xi}_0}{6} - \hat{\xi}_0 \right) I[2, 0, 0] \\
 & + \frac{y\Lambda^6}{32\pi^2} \left[24 \left(\hat{\xi}_2 - \frac{\partial_t \hat{\xi}_2}{6} \right) I[1, 1, 0] - \left(\hat{\xi}_0 - \frac{\partial_t \hat{\xi}_0}{6} \right) I[2, 0, 0] - 12C \left(\hat{\xi}_0 - \frac{\partial_t \hat{\xi}_0}{6} \right) I[2, 1, 0] \right. \\
 & \quad \left. - 12CI[1, 2, 0] \right] \\
 & - \frac{y^3\Lambda^6}{16\pi^2} (I[0, 1, 2] + I[0, 2, 1]) - \frac{y\Lambda^8}{128\pi^2} \left[I[1, 0, 2] + \left(\hat{\xi}_0 - \frac{\partial_t \hat{\xi}_0}{8} \right) I[2, 0, 1] \right] \\
 & + \frac{3y\Lambda^8}{40\pi^2} \left[I[1, 0, 2] + \left(\hat{\xi}_0 - \frac{\partial_t \hat{\xi}_0}{7} \right) I[2, 0, 1] - \frac{1}{2\Lambda^2} I[1, 0, 1] \right] \\
 & - \frac{3y\Lambda^8}{20\pi^2} \left[- \left(\hat{\xi}_0 - \frac{\partial_t \hat{\xi}_0}{7} \right) CI[2, 1, 1] + \left(\hat{\xi}_2 - \frac{\partial_t \hat{\xi}_2}{7} \right) I[1, 1, 1] \right. \\
 & \quad \left. - C \left(I[1, 2, 1] + I[1, 1, 2] - \frac{1}{2\Lambda^2} I[1, 1, 1] \right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

となる. ここで, $C = \hat{\xi}_2 \Lambda^2 - \hat{\lambda}_2$ と

$$I[n_g, n_b, n_f] := \frac{1}{\Psi^{n_g} \Sigma_1^{n_b} \Sigma_3^{n_f}} \Big|_{\phi=0} = \frac{1}{(\hat{\xi}_0 \Lambda^2 - \hat{\lambda}_0)^{n_g} (\Lambda^2 + 2\hat{\lambda}_2)^{n_b} (\Lambda^2)^{n_f}} \quad (5.96)$$

のように定義した. (5.95) の各項と図 5.5 のダイアグラムの対応は以下の通りである. 第 1 項目は (I), 第 2 項目は (III), (IV), (V), y^3 に比例している項は (VI), 第 4 項目は (VIII), (IX), 第 5 項目は (X), (XI), 最後の項は (XII) と (XIII) と対応する.

無次元化は (5.88) 式で与えた λ_{2n} , ξ_{2n} で定義する:

$$\partial_t \hat{\lambda}_{2n} = \frac{1}{\Lambda^{2n-4}} [\partial_t \lambda_{2n} + (2n-4) \lambda_{2n}], \quad \partial_t \hat{\xi}_{2n} = \frac{1}{\Lambda^{2n-2}} [\partial_t \xi_{2n} + (2n-2) \xi_{2n}]. \quad (5.97)$$

ここで, $\partial_t \hat{\xi}_0 = \Lambda^2 (\lambda_0 = \xi_2) = 0$ の場合での Yukawa 結合定数のくりこみ群方程式を示しておく. まず, $\partial_t \xi_0 - 2\xi_0 = 0$ のとき,

$$\dot{y} := -\beta_y = \frac{y^3(1+\lambda_2)}{8\pi^2(1+2\lambda_2)^2} + \tilde{G}y \frac{29-4\lambda_2(1-5\lambda_2)}{20\pi(1+2\lambda_2)^2} \quad (5.98)$$

となる. ^{*15} 次に, $\partial_t \xi_0 \rightarrow 0$ とすると

$$\dot{y} := -\beta_y = \frac{y^3(1+\lambda_2)}{8\pi^2(1+2\lambda_2)^2} + \tilde{G}y \frac{2395+4\lambda_2(347+315\lambda_2)}{1120\pi(1+2\lambda_2)^2} + \mathcal{O}(\tilde{G}^2) \quad (5.99)$$

となる.

5.5 数値計算

5.5.1 固定点構造

固定点の定義は $\beta_i(g^*) = 0$ と与えられる. すなわち, その点ではくりこみ群はフローしない. 固定点 g^* の周りのくりこみ群のフローを解析するために, その周りで線形化されたくりこみ群方程式を考える. 今, 理論空間の次元を N とし, g^* の周りでくりこみ群方程式を展開すると

$$\beta_i(g) = \beta_i(g^*) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \Big|_{g=g^*} (g_j - g_j^*) + \cdots \quad (5.100)$$

となる. $\beta_i(g^*) = 0$ なので第 1 項目は消える. $v := g - g^*$ の 1 次項を残し, 高次項は無視すると

$$\partial_t v_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \Big|_{g=g^*} v_j \quad (5.101)$$

のように線形化されたくりこみ群方程式を得る. 行列

$$M_{ij} := \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \Big|_{g=g^*} \quad (5.102)$$

^{*15} この結果と [277] の (6) 式で与えられている結果を比べると, 第 1 項目 (これは図 5.5 の (VI) に対応) は一致しているが, 第 2 項目は合っていない.

を定数行列 V で対角化すると

$$\sum_{i,j=1}^N (V^{-1})_{li} \left. \frac{\partial \beta_i}{\partial g_j} \right|_{g=g^*} V_{jk} = \theta_k \delta_{lk} \quad (5.103)$$

となる. このとき k は和をとらない. M の k 番目の固有値が θ_k で, $V^{(k)} = (V_{jk})_{j=1,\dots,N}$ が固有ベクトルになる. すなわち,

$$MV^{(k)} = \theta_k V^{(k)} \quad (5.104)$$

である. したがって, (5.101) 式は

$$\partial_t \kappa_i = \theta_i \kappa_i \quad (5.105)$$

となる. ここでも i は和をとらない. また, $v_i = \sum_{j=1}^N V_{ij} \kappa_j$ とした. (5.105) 式は解くことができ

$$\kappa_i(t) = C_i e^{\theta_i t} \quad (5.106)$$

と得る. ただし, C_i は定数である. この方程式を元の結合定数 g_i で書き直すと

$$g_i(t) = g_i^* + \sum_{j=1}^N V_{ij} C_j \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^{\theta_j} \quad (5.107)$$

となる. $\zeta_{ij} = C_j V_{ij}$ とすると (5.7) 式になる. この方程式からわかることを以下にまとめる.

- $\text{Im}(\theta_i) \neq 0$ のとき, 結合定数 g_i が振動解となり, UV から IR へのフローで他の結合定数と混合することを意味している.
- $\text{Re}(\theta_i) > 0$ のとき, UV から IR へ ($\Lambda \rightarrow 0$) のフローで g_i は固定点 g_i^* から離れて大きくなる. したがって, $\text{Re}(\theta_i) > 0$ を持つ g_i は relevant な演算子に対する結合となり, C_i は物理的な自由パラメータになる. すなわち, C_i が IR の物理を決める.
- $\text{Re}(\theta_i) = 0$ のとき, 解 (5.106) は $\text{Im}(\theta_i) \neq 0$ であれば振幅が一定の振動解になる. これは marginal である.
- $\text{Re}(\theta_i) < 0$ のとき, フローは UV 固定点 g_i^* へと近づくフローになる. したがって irrelevant な結合定数となる.

$\text{Re}(\theta_i) > 0$ となる臨界指数の数が UV 臨界面の次元となる. この数が有限であれば UV 完全かつくりこみ可能な理論となる. 以下では重力理論に対してこのような固定点構造を調べていく.

5.5.2 アインシュタイン–ヒルベルト・トランケーション

ここでは重力理論に対してのレビューを行う. ここでの結果は [272, 274, 275] で示されたものである. トランケーションとしてアインシュタイン–ヒルベルト・トランケーションと呼ばれる近似を採用する. これは有効作用として

$$\Gamma_\Lambda[g_{\mu\nu}; h_{\mu\nu}] = \int d^4x \sqrt{\hat{g}} \left\{ \lambda_0 - \xi_0 \hat{R} \right\} + S_{\text{GF}} + S_{\text{gh}}, \quad (5.108)$$

とする．無次元のニュートン定数 ξ_0 と宇宙定数 λ_0 は

$$\beta_{\xi_0} = 2\xi_0 - \frac{1}{384\pi^2} \left[21 + \frac{8\xi_0(7\xi_0 - 2\lambda_0)}{(\xi_0 - \lambda_0)^2} \right] + \frac{\partial_t \xi_0 - 2\xi_0}{1152\pi^2 \xi_0} \frac{17\xi_0^2 + 18\xi_0\lambda_0 - 15\lambda_0^2}{(\xi_0 - \lambda_0)^2}, \quad (5.109)$$

$$\beta_{\lambda_0} = 4\lambda_0 - \frac{1}{32\pi^2} \left[3 + \frac{6\lambda_0}{\xi_0 - \lambda_0} \right] + \frac{\partial_t \xi_0 - 2\xi_0}{96\pi^2 \xi_0} \frac{5\xi_0 - 2\lambda_0}{\xi_0 - \lambda_0} \quad (5.110)$$

となる．固定点は連立方程式 $\beta_{\xi_0} = 0, \beta_{\lambda_0} = 0$ を解くことで求められ、数値的に求めると

$$\xi_0^* = 2.38 \times 10^{-2}, \quad \lambda_0^* = 8.62 \times 10^{-3} \quad (5.111)$$

となって、非自明な固定点を得る．この固定点の周りにおける行列 (5.102) は

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{\xi_0}}{\partial \xi_0} & \frac{\partial \beta_{\xi_0}}{\partial \lambda_0} \\ \frac{\partial \beta_{\lambda_0}}{\partial \xi_0} & \frac{\partial \beta_{\lambda_0}}{\partial \lambda_0} \end{pmatrix} \bigg|_{\substack{\xi_0 = \xi_0^* \\ \lambda_0 = \lambda_0^*}} = \begin{pmatrix} 4.79429 & -6.42602 \\ 2.33613 & -0.505996 \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

となる．この行列の固有値は $\theta_{1,2} = 2.14414 \pm 2.82644i$ となる．したがって、 ξ_0 and λ_0 は relevant な結合定数になることがわかる．また、固有ベクトルは

$$V^{(1)}, V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.856378 \\ 0.353177 \pm 0.376673i \end{pmatrix} \quad (5.113)$$

となり、固定点周りのフローは

$$\xi_0(t) = \xi_0^* + 0.856378 \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^{2.14414} \left[A \cos \left(\ln \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^{2.82644} \right) + B \sin \left(\ln \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^{2.82644} \right) \right], \quad (5.114)$$

$$\lambda_0(t) = \lambda_0^* + \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^{2.14414} \left[(0.353177A + 0.376673B) \cos \left(\ln \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^{2.82644} \right) + (-0.376673A + 0.353177B) \sin \left(\ln \left(\frac{\Lambda_0}{\Lambda} \right)^{2.82644} \right) \right] \quad (5.115)$$

と求められる．ここで、 $A := C_1 + C_2, B := i(C_1 - C_2)$ は実数の定数で自由パラメータとなる．

5.5.3 スカラー・重力理論

次に中性スカラー場と重力が結合している系へと拡張する [272, 274, 275]．今、理論空間として $g_i = \{\xi_0, \lambda_0, \xi_2, \lambda_2, \lambda_4\}$ を考える．数値的に求めると

$$\xi_0^* = 2.38 \times 10^{-2}, \quad \lambda_0^* = 8.62 \times 10^{-3}, \quad \xi_2^* = 0, \quad \lambda_2^* = 0, \quad \lambda_4^* = 0 \quad (5.116)$$

を得る．重力の結合定数は非自明な固定点であるが、物質場に対する結合定数は自明な (Gaussian) 固定点となっている．したがって、固定点 (5.116) はガウシアン物質固定点 (Gaussian-matter fixed point)

と呼ばれる。^{*16} 固定点 (5.116) の周りでは行列 (5.102) は

$$M = \begin{pmatrix} 4.85544 & -6.51993 & 0.00766245 & -0.00262748 & 0 \\ 2.40051 & -0.570309 & 0.00234951 & 0.0055494 & 0 \\ 0 & 0 & 2.85544 & -6.51993 & -0.0157649 \\ 0 & 0 & 2.40051 & -2.57031 & 0.0332964 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.62692 \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

となり、この行列の固有値と固有ベクトルは

$$\theta_{1,2} = 2.143 \pm 2.879i, \quad V^{(1)}, V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8549 \\ 0.3557 \pm 0.3776i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.118)$$

$$\theta_{3,4} = 0.143 \pm 2.879i, \quad V^{(3)}, V^{(4)} = \begin{pmatrix} (-1.8059 \pm 0.731i) \times 10^{-3} \\ (3.0723 \pm 1.0763i) \times 10^{-3} \\ 0.3557 \pm 0.3776i \\ 0.8549 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.119)$$

$$\theta_5 = -2.627, \quad V^{(5)} = \begin{pmatrix} 2.0687 \times 10^{-5} \\ 2.7445 \times 10^{-5} \\ -1.3805 \times 10^{-2} \\ -1.3542 \times 10^{-2} \\ 0.999813 \end{pmatrix} \quad (5.120)$$

と与えられる。これからわかることは次の通りである。

- 固有ベクトル $V^{(1)}$ と $V^{(2)}$ を見ると、第 1,2 列のみに値がある。したがって、これは ξ_0 と λ_0 の混合を意味している。そして、対応する固有値、すなわち、臨界指数は $\text{Re } \theta_1 > 0$, $\text{Re } \theta_2 > 0$ なので relevant である。(5.113) の結果と比べるとほとんど値が変わっていないので、スカラー場の影響はあまり受けていない。
- $V^{(3)}$ と $V^{(4)}$ は ξ_0 , λ_0 , ξ_2 , λ_2 からの寄与があるが、 ξ_0 と λ_0 からの寄与は ξ_2 と λ_2 からのものよりも小さい。 $\text{Re } \theta_3 > 0$ かつ $\text{Re } \theta_4 > 0$ であるから、これに対応する結合定数は relevant である。非最小結合 ξ_2 は自明な固定点 $g^* = 0$ 周りではその正準次元がゼロなので marginal になると思われるが、重力の効果によって relevant になっている。

^{*16} 微分を含む自己相互作用項、例えば、

$$\rho \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi$$

のような項を理論空間に含めて解析すると、結合定数 ρ のベータ関数は ρ に依らない項が現れる:

$$\beta_\rho = c_1 g^2 f(\lambda) + \dots$$

のようになる。ここで、 c は定数、 g と λ はそれぞれ重力の結合定数とスカラー場の 4 点結合定数である。すなわち、このような相互作用が重力の量子効果によって生成されることを示しており、 $\rho = 0$ は $\beta_\rho = 0$ を満たさず、固定点にならない。一方、スカラー場の 4 点結合定数 λ のベータ関数は

$$\beta_\lambda = c_2 \rho^2 + \dots$$

のような λ 自身に依らず、 ρ に依る項が現れる。 $\rho = 0$ が固定点ではないので、 $\lambda = 0$ も固定点にならない。以上のベータ関数の構造は、初期作用が $\lambda = \rho = 0$ であっても、重力のゆらぎ g があると ρ や λ が生成されることを意味している。このような場合はガウシアン物質固定点は現れない [361]。

- スカラー場の4点結合定数 λ_4 は臨界指数が $\text{Re } \theta_5 < 0$ となっているので irrelevant である. 重力との結合がない場合, 自明な固定点周りで λ_4 は marginal であるが, 重力の効果によって irrelevant になっていることがわかる.

以上から, ここで与えた理論空間において, relevant なものは $\xi_0, \lambda_0, \xi_2, \lambda_2$ の4つで, これらによって UV 臨界面が張られることになり, 自由パラメータになる [272, 274].

5.5.4 フェルミオンの効果

理論空間を $\{g_i\}_{i=1,\dots,6} = \{\xi_0, \lambda_0, \xi_2, \lambda_2, \lambda_4, y\}$ と拡張し, $N_f = 1$ としてフェルミオンの効果を取り入れる. (5.90) 式–(5.94) 式に対する連立方程式 $\beta_{g_i} = 0$ を解くと, ガウシアン物質固定点を得る:

$$\xi_0^* = 1.63 \times 10^{-2}, \quad \lambda_0^* = 3.72 \times 10^{-3}, \quad \xi_2^* = 0, \quad \lambda_2^* = 0, \quad \lambda_4^* = 0, \quad y^* = 0. \quad (5.121)$$

この固定点の周りで, 行列 (5.102) は

$$M = \begin{pmatrix} 3.6814 & -5.39674 & 0.00776027 & -0.00258676 & 0 & 0 \\ 1.99718 & -0.663341 & 0.00295698 & 0.00534691 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6814 & -5.39674 & -0.0155205 & 0 \\ 0 & 0 & 1.99718 & -2.66334 & 0.0320815 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.60696 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.46426 \end{pmatrix} \quad (5.122)$$

となる. この行列の固有値 θ_i と固有ベクトル $V^{(i)}$ は

$$\theta_{1,2} = 1.50903 \pm 2.46151i, \quad V^{(1)}, V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.854336 \\ 0.343899 \pm 0.389672i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.123)$$

$$\theta_{3,4} = -0.490968 \pm 2.46151i, \quad V^{(3)}, V^{(4)} = \begin{pmatrix} (-3.11425 \mp 1.27885i) \times 10^{-3} \\ (-1.92736 \pm 0.618506i) \times 10^{-3} \\ 0.854329 \\ 0.343897 \mp 0.389669i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.124)$$

$$\theta_5 = -2.60696, \quad V^{(5)} = \begin{pmatrix} 3.88533 \times 10^{-5} \\ 2.91974 \times 10^{-5} \\ -1.65107 \times 10^{-2} \\ -1.59949 \times 10^{-2} \\ 0.999736 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.125)$$

$$\theta_6 = -1.46426, \quad V^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.126)$$

を得る. 以下のことがわかった.

- 行列 (5.122) を見ると Yukawa 結合定数は他の結合定数との混合がないことがわかる. $\text{Re}(\theta_6) < 0$ なので, Yukawa 相互作用は irrelevant になることがわかる.
- ニュートン定数と宇宙定数に対応する臨界指数 $\text{Re} \theta_{1,2}$ は正であるから relevant である. しかし, フェルミオンの効果によってその値はフェルミオンの効果が入っていないときに比べて小さくなっている.
- (5.92) 式–(5.94) 式において $y = 0$ とすると非最小結合定数 $g_3 (= \xi_2)$, スカラー質量項 $g_4 (= \lambda_2)$, スカラーの4点結合定数 $g_5 (= \lambda_4)$ は 5.5.3 節で与えた式と変わらないが, フェルミオンの量子効果が $g_{1,2}$ にのみ寄与する. その結果として臨界指数 $\text{Re} \theta_{3,4}$ が負になっている. すなわち, 非最小結合定数 g_3 とスカラー質量項 g_4 が irrelevant になり, UV 臨界面を張る演算子にならないことを意味する.

今の場合, 物質場の結合定数は自明な固定点しか持たないため, その周りでは行列 M には寄与は与えない. したがって, λ_2 と ξ_2 が irrelevant になったのは重力の結合定数 ξ_0 と λ_0 の固定点がフェルミオンの効果によって, フェルミオンがない場合に比べて小さくなったためである. これはフェルミオンの寄与が ξ_0 と λ_0 のくりこみ群方程式 (5.90) と (5.91) を見ると, スカラー場とはグラスマン数奇のために逆になることによる. 実際, $N_f = 0$ として, (5.121) の固定点周りで M を計算し, その固有値を求めると $\text{Re} \theta_{3,4} = -0.508$ となる. 逆に, $N_f = 1$ として, (5.116) の場合では $\text{Re} \theta_{3,4} = 0.144$ となつて, $N_f = 0$ の場合 $\text{Re} \theta_{3,4} = 0.143$ とほぼ変わらない. つまり, 固有値の値が $\text{Re} \theta_{3,4}$ の符号を変えたことになる.

5.6 漸近安全な量子重力と階層性問題

前節での解析で得られた結果によると, フェルミオンの量子効果によってスカラー場の質量 m^2 と非最小結合 ξ は irrelevant になることがわかった. この結果を受けて, 漸近的に安全な理論の下での Higgs・インフレーションと階層性問題に関して議論する.

Higgs・インフレーションでは非最小結合 ξ が重要な役割を担う. Higgs・インフレーションが観測結果を説明するには ξ は少なくとも $\mathcal{O}(10)$ の大きな値をとる必要がある [309, 313]. 漸近的に安全な理論の下で自由にとれる結合定数になるためには relevant になる必要がある. フェルミオンがない場合, 5.5.3 節で見たように, ξ は relevant な結合定数である. したがって, 自由パラメータであり, 原理的には $\mathcal{O}(10)$ の値をとってもよい. しかし, フェルミオンの量子効果があるような場合, 5.5.4 節で得られた結果は ξ が irrelevant な結合定数になるということである. ξ はもはや自由パラメータではなく, 低エネルギーでは relevant な結合定数によって生成される定数となる.^{*17} $\mathcal{O}(10)$ を説明できるであろうか? それは今の状況では難しいと思われる. ξ のベータ関数 (5.92) を見ると量子効果として relevant となる結合定数を含んでいるので低エネルギーで生成されるが, ξ の正準次元はゼロであるから低エネルギーにおいても大きな値にはならないと考えられる.

次に, 階層性問題について考える. 4章で議論したように階層性問題はスカラー場の質量に対する問題である. ここで, 非摂動くりこみ群方程式の枠組みでの階層性を見てみよう. 簡単のために重力との結合は考えず, スカラーの4点結合を無視して相互作用として Yukawa 相互作用のみを考える. このとき, 低

^{*17} 今の模型で relevant な結合定数は宇宙定数 λ_0 とニュートン定数 ξ_0 である.

エネルギーでのスカラー場の質量に対するの解は

$$m^2(\Lambda) \Big|_{\Lambda \rightarrow 0} = m_0^2 - \frac{N_f y^2 \Lambda_0^2}{8\pi^2} \quad (5.127)$$

と得られる。 $\mathcal{O}(10^{19})$ GeV の裸の質量 m_0 と量子効果 (第2項目) が打ち消して $\mathcal{O}(10^2)$ GeV のくりこまれた質量 $m^2(0)$ を得なければいけない。これが階層性問題 (あるいは微調整問題) であった。^{*18}

我々は m^2 が irrelevant になる場合を示した。すなわち、 $m_0^2 = 0$ である。これは一見、階層性問題を解決しているように見える。しかしながら、そうではない。 m^2 も ξ の場合同様、低エネルギーでは relevant な相互作用によって生成される。しかし、 ξ の正準次元はゼロであるのに対し、 m^2 の正準次元は2であり、低エネルギーへのフローで指数的に増大する。したがって、 $\mathcal{O}(10^2)$ GeV の質量を得るためにはやはり微調整が必要である。ただし、この微調整は質量の微調整ではなく、relevant な結合定数に対するものであることに注意すべきである。今の場合、プランク質量と宇宙定数を調整し、低エネルギーで観測量を再現せよということであり、これはいい意味で言い換えれば予言力が上がったということでもある。

以上の議論から、低エネルギーで望まれる状況 $\xi \gg 1$, $m^2 \ll \Lambda_0^2$ に対して、全く逆の状況 $\xi \ll 1$, $m^2 \gg \Lambda_0^2$ であることがわかる。しかし、今の議論は単純化したモデルでの議論であり、ゲージ場の効果を取り入れていない。標準模型の場合へと拡張することは将来の研究として重要である。また、ゲージ固定として de-Donder ゲージを採用しているが、他のゲージ固定をした場合を調べ、我々が得た結果がゲージ固定やカットオフ・スキームに依らずに m^2 や ξ が irrelevant になるかどうかを示すことも必要である。

5.7 章のまとめ

漸近的に安全な量子重力と非最小結合する Higgs-Yukawa モデルを解析を行った。漸近的に安全な理論とは、非自明な UV 固定点を持つことで UV 完全な理論の候補が存在し、その固定点の周りでの臨界面が有限の演算子で張られるような理論のことである。

アインシュタイン-ヒルベルト・トランケーションをした場合、ニュートン定数と宇宙定数に非自明な固定点が存在し、漸近的に安全な理論になりうるを見た。

スカラー場と重力が結合している場合、ガウシアン物質固定点が存在し、その固定点の周りではニュートン定数、宇宙定数、スカラー場の質量、非最小結合は relevant になり、スカラー場の4点結合定数は irrelevant になる。

非最小結合する Higgs-Yukawa モデルの場合、ガウシアン物質固定点固定点が存在し、その固定点の周りではニュートン定数、宇宙定数のみが relevant になり、その他の結合定数は irrelevant になることがわかった。それは Yukawa 相互作用によるものではなく、フェルミオンの量子効果による。

展望と課題

- ここでの解析はフェルミオンのみが取り入れられているが、ゲージ場の効果も取り入れる必要がある。

^{*18} ここで議論している微調整問題とは4章で議論した通り、裸の質量を臨界面の十分近く置くという微調整のことである。

- 近似の改善として $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ や $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ などの演算子を取り入れることも重要な課題であるが、熱核展開による方法では R^2 の演算子と区別がつかないため、どのように演算子を射影すべきかが明確にならない [252, 254, 284].^{*19}
- 高次微分重力は一般にゴースト場のプロパゲータに極が現れるため、ユニタリティが破れてしまう。UV へのフローにおいて、くりこみ群のプロパゲータがゴースト場の極を含まなければその問題はない。しかし、これは理論が自動的にユニタリーになることを意味しない。(ミンコフスキー空間で) すべての量子ゆらぎを足し上げ、真空が安定化することを示す必要がある [243]。ユニタリティを保つ UV での量子重力を構築することが必要である。^{*20}

^{*19} 熱核展開の方法を工夫し、 $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ のような演算子を扱っている文献 [288, 300] もある。

^{*20} ローレンツ空間での解析は文献 [362] を見よ。

付録 A

記法と公式

本論文では単位系として自然単位系 ($\hbar = c = k_B = 1$) を用いてきた.

A.1 ユークリッド化

ミンコフスキー空間からユークリッド空間への変換を次のように定義する.

1. ベクトル ($x_\mu, p_\mu, A_\mu, \dots$, etc.)

$$V^0 \equiv -iV_0, \quad V^i \equiv V_{Ei}. \quad (\text{A.1})$$

2. ガンマ行列

$$\gamma^0 \equiv \gamma_{E0}, \quad \gamma^i \equiv i\gamma_{Ei}. \quad (\text{A.2})$$

ここで”E”はユークリッド空間であることを表す. この notation を用いると

1. スカラー積

$$V^\mu V_\mu = -V_{E\mu} V_{E\mu}, \quad \not{V} = -iV_{E\mu} \gamma_{E\mu}, \quad \not{\partial} = i\partial_{E\mu} \gamma_{E\mu}. \quad (\text{A.3})$$

2. ガンマ行列の反交換関係

$$\{\gamma_{E\mu}, \gamma_{E\nu}\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

3. γ^5

$$\gamma_E^5 = \gamma_{E0} \gamma_{E1} \gamma_{E2} \gamma_{E3} \quad (\text{A.5})$$

4. フーリエ変換

$$\psi(x_E) = \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} e^{ip_E \cdot x_E} \tilde{\psi}(p_E), \quad \tilde{\psi}(p_E) = \int d^4 x_E e^{-ip_E \cdot x_E} \psi(x_E). \quad (\text{A.6})$$

上記のユークリッド化に加えてしばしば $\bar{\psi} \rightarrow i\bar{\psi}_E$ のようなユークリッド化を導入する場合がある. これはによってフェルミオンの運動項は $\bar{\psi}_E i\not{\partial} \psi_E$ と与えられ, エルミートになるためである. しかし, このユークリッド化を導入すると密度項や Yukawa 相互作用項が $i\mu \bar{\psi}_E \gamma_E^0 \psi_E$ や $iy\phi \bar{\psi}_E \psi_E$ のように虚数を伴うため, 本論文ではこの方法は採用しない.

A.2 Clifford 代数

Dirac のガンマ行列は次の代数を満たす.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}_{4 \times 4}, \quad (\text{A.7})$$

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^\mu. \quad (\text{A.8})$$

$\mathbf{1}_{4 \times 4}$ はスピノル空間の単位元である. さらに, 次のような行列とテンソルを定義する.

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (\text{A.10})$$

γ^5 行列は次の代数を満たす.

$$\begin{aligned} (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5, \\ (\gamma^5)^2 &= 1, \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$\sigma_{\mu\nu}$ はスピノル空間のローレンツ変換の生成子 $S_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu}/2$ を与え, ローレンツ代数

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = i(-g_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} + g_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}) \quad (\text{A.12})$$

を満たす.

Dirac 行列の満たす公式を以下に示す:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) &= 4g_{\mu\nu}, & \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) &= 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}), \\ \text{Tr}(\not{A}\not{B}) &= 4AB, & \text{Tr}(\not{A}\not{B}\gamma^5) &= 0, \\ \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma^5) &= 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, & \\ \text{Tr}(\mathbf{1}) &= 4, & \text{Tr}(\gamma^5) &= 0, \\ \text{Tr}(\text{any odd number of } \gamma \text{ matrices}) &= 0, & \\ \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu &= g_{\mu\rho}\gamma_\nu + g_{\rho\nu}\gamma_\mu - g_{\mu\nu}\gamma_\rho - i\epsilon_{\mu\rho\nu\sigma}\gamma_\sigma \gamma^5, & \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4, \\ \gamma_\mu \not{A} \gamma_\mu &= -2\not{A}, & \gamma_\mu \not{A}\not{B} \gamma^\mu &= 4AB, \\ \gamma_\mu \not{A}\not{B}\not{C} \gamma_\mu &= -2\not{C}\not{B}\not{A}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

ここで, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は Levi-Civita テンソルと呼ばれる 4 階反対称テンソルで,

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} := \text{sgn} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \mu & \nu & \rho & \sigma \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

と定義され, $\epsilon_{0123} = 1$ である. Levi-Civita テンソルは以下の関係を満たす.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -4!, \\ \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} \epsilon_{\beta\nu\rho\sigma} &= -3!\delta_{\alpha\beta}, \\ \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} &= -2!(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}), \\ \epsilon_{\alpha\beta\gamma\mu} \epsilon_{\rho\sigma\tau\mu} &= -1!(\delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\tau} - \delta_{\alpha\rho}\delta_{\beta\tau}\delta_{\gamma\sigma} + \delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\sigma} + \delta_{\alpha\tau}\delta_{\beta\sigma}\delta_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\tau}\delta_{\gamma\rho} - \delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\rho}\delta_{\gamma\tau}). \end{aligned}$$

ガンマ行列の陽な表現として Dirac 表現

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

とカイラル表現

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

がある. ただし, $\sigma^\mu := (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^\mu := (1, -\sigma^i)$ である. σ^i は Pauli 行列であり, その表現は

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

である.

4 成分を持つスピノル場は

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_R, \bar{\psi}_L) \quad (\text{A.18})$$

と与えられる. ここで, 演算子

$$P_{L,R} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \quad (\text{A.19})$$

を定義すると, この演算子は次の代数を満たす.

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = 1 \quad (\text{A.20})$$

したがって, 射影演算子となっていて, スピノル場に作用すると,

$$P_L \psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

となり, Dirac フェルミオンの左巻きと右巻きがそれぞれを射影される.

A.3 Fierz 変換

反交換関係を満たす Dirac フェルミオン $\psi, \bar{\psi}$ を用いて $\bar{\psi} \Gamma \psi$ なる表現を考える. ここで Γ はスピノル空間で定義される 4×4 行列である. この表現が双一次形式となるような行列 Γ は 16 通りあり, Dirac 行列を用いて書き表すことができ,

$$\Gamma = 1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, i\gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5 \quad (\text{A.22})$$

である. それぞれ, スカラー (S), ベクトル (V), テンソル (T), 軸性ベクトル (A), 軸性スカラー (P) である. これらの行列は全て独立であり, 完全系を構成する. すなわち,

$$\text{Tr}(\Gamma_a \Gamma_b) = 4g_{ab} \quad (a, b = 1 \sim 16) \quad (\text{A.23})$$

かつ

$$\sum_{a=1}^{16} C_a \Gamma_a = 0 \quad (\text{A.24})$$

を満たすのは任意の a に対して $C_a = 0$ のときのみであるということである。この性質を用いると任意のスピン空間上の行列 Λ は次のように展開できる。

$$\Lambda = \sum_{a=1}^{16} c_a \Gamma_a \quad (c_a = \text{Tr}(\Gamma_a \Lambda)/4) \quad (\text{A.25})$$

この式の (i, j) 成分は

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{4} \sum_a \sum_{l,m} (\Gamma_a)_{ij} (\Gamma_a)_{lm} \Lambda_{ml}$$

Λ の成分のうち、 (k, n) 成分のみが 1 で、他の成分が 0 であるとする

$$\delta_{ik} \delta_{jn} = \frac{1}{4} \sum_a (\Gamma_a)_{ij} (\Gamma_a)_{nk} \quad (\text{A.26})$$

これに任意のフェルミオンと 4×4 の行列で定義された演算子 $\bar{\psi}_{1i}(\Lambda_a \psi_2)_k (\bar{\psi}_3 \Lambda_b)_j \psi_{4n}$ を両辺にかけると Fierz 変換

$$(\bar{\psi}_1 \Lambda_a \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Lambda_b \psi_4) = -\frac{1}{4} \sum_i (\bar{\psi}_1 \Gamma_i \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda_b \Gamma_i \Lambda_a \psi_2) \quad (\text{A.27})$$

を得る。(A.22) の完全系を用いて陽に書けば、

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1 \Lambda_a \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Lambda_b \psi_4) = & -\frac{1}{4} [(\bar{\psi}_1 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda_b \Lambda_a \psi_2) + (\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda_b \gamma_\mu \Lambda_a \psi_2) \\ & + (\bar{\psi}_1 \frac{\sigma_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda_b \frac{\sigma_{\mu\nu}}{\sqrt{2}} \Lambda_a \psi_2) + (\bar{\psi}_1 i\gamma_\mu \gamma^5 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda_b i\gamma_\mu \gamma^5 \Lambda_a \psi_2) \\ & + (\bar{\psi}_1 \gamma^5 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \Lambda_b \gamma^5 \Lambda_a \psi_2)] \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

となる。^{*1} $\Lambda_a = \Lambda_b = 1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}/\sqrt{2}, i\gamma_\mu \gamma^5, \gamma^5$ として代入すると、左辺から右辺への変換は

$$\begin{pmatrix} S' \\ V' \\ T' \\ A' \\ P' \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ V \\ T \\ A \\ P \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

となる。

A.4 リー代数

次のような性質を持つ群元を持つ無限連続群をリー群と呼ぶ:

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a} = 1 + i\alpha^a T^a + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (\text{A.30})$$

ここで、 α^a は無限小パラメータ、 T^a は群の生成子で、次の交換関係を満たす。

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad (\text{A.31})$$

^{*1} $\psi \sim a^s u^s(p) e^{-ip \cdot x}$ と書くと、 a^s がグラスマン数を持つ量で、 $u^s(p)$ がスピノルである。Fierz 変換はスピノルに対する変換であるから、 $u^s(p)$ に対する変換にすると (A.28) 式の左辺のマイナス記号はない。

f^{abc} は構造定数と呼ばれる。この交換関係をリー代数という。生成子は

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0 \quad (\text{A.32})$$

を満たすことを用いると構造定数は Jacobi 恒等式

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0 \quad (\text{A.33})$$

を満たす。

群の生成子に対して次のように規格化を与える。

$$\text{tr}[T^a T^b] = C \delta^{ab} \quad (\text{A.34})$$

$C(r)$ は定数である。このとき、構造定数は

$$f^{abc} = -\frac{i}{C} \text{tr}\{[T^a, T^b] T^c\} \quad (\text{A.35})$$

となって、完全反対称テンソルであることがわかる。

A.4.1 $SU(N)$ 群

特殊ユニタリー群 $SU(N)$ は群元の表現が $N \times N$ ユニタリー行列であり、その行列式が 1 であるような群のことである。すなわち、

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1, \quad \det U = 1 \quad (\text{A.36})$$

を満たす。 $U = e^{iH}$ と書いたとき、 $\det U = \det(e^{iH}) = e^{i \text{tr} H} = 1$ なので生成子は $\text{tr} H = 0$ となる。この条件を満たす $N \times N$ のエルミート行列は $N^2 - 1$ 個存在する。よって $SU(N)$ の群元は

$$U = \exp \left\{ \sum_{a=1}^{N^2-1} \alpha_a H_a \right\} \quad (\text{A.37})$$

と表される。 $N^2 - 1$ 個の生成子の内、 $N - 1$ 個が対角的な表現をとることができる。

表現

以下に生成子の表現を示す。

- 基本表現

$SU(N)$ の基本表現は $N \times N$ 行列で与えられる。

1. $SU(2)$ Pauli 行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.38})$$

2. SU(3) Gell-Mann 行列

$$\begin{aligned}
\lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.39}$$

● 随伴表現

$$(T^b)_{ac} = if^{abc} \tag{A.40}$$

で与えられる. 特に SU(2) のとき,

$$\Sigma^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \Sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.41}$$

である.

Casimir 演算子

生成子 T^a を用いて

$$T^2 = \sum_{a=1}^{N^2-1} T^a T^a \equiv T^a T^a \tag{A.42}$$

なる演算子を定義すると, すべての生成子に対して

$$[T^a, T^2] = 0 \tag{A.43}$$

を満たす. この演算子 T^2 を Casimir 演算子という. この演算子は単位行列に比例する.

$$T^a T^a = C_2 \cdot \mathbf{1} \tag{A.44}$$

特に, 随伴表現をとったとき

$$f^{acd} f^{bcd} = C_2^{\text{ad}} \delta^{ab} \tag{A.45}$$

となる. (A.34) 式における係数 C との関係は

$$C = \frac{d}{d^{\text{ad}}} C_2 \tag{A.46}$$

となる. ここで d は表現の次元であり, d^{ad} は随伴表現の次元である. これらの関係を用いると

$$T^a T^b T^a = \left[C_2 - \frac{1}{2} C_2^{\text{ad}} \right] T^b, \tag{A.47}$$

$$f^{abc} T^b T^c = \frac{1}{2} i C_2^{\text{ad}} T^a \tag{A.48}$$

を得る.

$SU(N)$ 群において, C, C_2 は基本表現, 随伴表現の下でそれぞれ,

$$C^{\text{fand}} = \frac{1}{2}, \quad C_2^{\text{fand}} = \frac{N^2 - 1}{2N}, \quad C^{\text{ad}} = C_2^{\text{ad}} = N \quad (\text{A.49})$$

となる. また, 基本表現において

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} (T^a)_{ij} (T^a)_{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (\text{A.50})$$

の関係がある. これをさらに変形して

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} (T^a)_{ij} (T^a)_{kl} = -\frac{N+1}{4N} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{N-1}{4N} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{A.51})$$

i と k の入れ換えに対して, この第 1 項は反対称であり, 第 2 項は対称である.

付録 B

超行列の演算

くりこみ群方程式は一般にグラスマン数が奇の場合と偶の場合の両方を含む形で定式化されている。Wetterich 方程式 (2.15) において, $\Gamma_\Lambda^{(2)} + R_\Lambda$ は一般に超行列になっている。ここでは超行列の演算方法を述べる。

次のような超行列を考える。

$$M = \begin{bmatrix} M_{BB} & M_{BF} \\ M_{FB} & M_{FF} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

ここで, M_{BB} と M_{FF} はグラスマン数が偶であり, M_{BF} と M_{FB} は奇である。この行列 M の超トレースを次のように定義する。

$$\text{str } M = \text{tr } M_{BB} - \text{tr } M_{FF} \quad (\text{B.2})$$

また, $\text{str}(MN) = \text{str}(NM)$ を満たす。この超トレースの定義を用いて超行列式は

$$\text{sdet } M = \exp(\text{str } \ln M) \quad (\text{B.3})$$

と定義される。これは

$$\text{sdet}(MN) = \text{sdet } M \text{ sdet } N \quad (\text{B.4})$$

を満たす。これらの定義を用いて超行列 M は次のように分解される。

$$\begin{aligned} \text{sdet } M &= \text{sdet} \begin{bmatrix} M_{BB} & 0 \\ M_{FB} & 1 \end{bmatrix} \text{sdet} \begin{bmatrix} 1 & M_{BB}^{-1} M_{BF} \\ 0 & M_{FF} - M_{FB} M_{BB}^{-1} M_{BF} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\det M_{BB}}{\det(M_{FF} - M_{FB} M_{BB}^{-1} M_{BF})}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

あるいは

$$\begin{aligned} \text{sdet } M &= \text{sdet} \begin{bmatrix} M_{BB} - M_{BF} M_{FF}^{-1} M_{FB} & M_{BF} M_{FF}^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{sdet} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ M_{FB} & M_{FF} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\det(M_{BB} - M_{BF} M_{FF}^{-1} M_{FB})}{\det M_{FF}} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

である。これらはすでに Grassman 数が偶の量になっているので,

$$\log(\text{sdet } M) = \log \det M_{BB} - \log \det(M_{FF} - M_{FB} M_{BB}^{-1} M_{BF}) \quad (\text{B.7})$$

$$\log(\text{sdet } M) = \log \det M_{FF} - \log \det(M_{BB} - M_{BF} M_{FF}^{-1} M_{FB}) \quad (\text{B.8})$$

のように書くことができる。

くりこみ群方程式の変形

超行列の演算を定義したので、その定義を用いて Wetterich 方程式を変形していく。Wetterich 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} \Gamma_\Lambda = \frac{1}{2} \text{STr}_{x,y} \left[\left(\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi(x)} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi(y)} + R_\Lambda(x,y) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \Lambda} R_\Lambda(y,x) \right]. \quad (\text{B.9})$$

と与えられる。\$\Phi\$ は超場であり、

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ \bar{\psi}^T \\ A_\mu \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

のように書かれる。今、有効作用から求められる 2 点関数とカットオフ関数 \$R_\Lambda\$ をボソンの部分とフェルミオンの部分に分けて書く：

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{\text{BB}} & \Gamma_{\text{BF}} \\ \Gamma_{\text{FB}} & \Gamma_{\text{FF}} \end{bmatrix} := \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \Phi(x)} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \Phi(y)}, \quad \begin{bmatrix} R_{\text{BB}} & 0 \\ 0 & R_{\text{FF}} \end{bmatrix} := R_\Lambda(x,y). \quad (\text{B.11})$$

今、修正された 2 点関数を定義する：

$$\begin{bmatrix} M_{\text{BB}} & M_{\text{BF}} \\ M_{\text{FB}} & M_{\text{FF}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \Gamma_{\text{BB}} & \Gamma_{\text{BF}} \\ \Gamma_{\text{FB}} & \Gamma_{\text{FF}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{\text{BB}} & 0 \\ 0 & R_{\text{FF}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

これを用いると Wetterich 方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Gamma_\Lambda &= \widetilde{\frac{\partial}{\partial \Lambda}} \frac{1}{2} \text{STr} \left(\ln \begin{bmatrix} M_{\text{BB}} & M_{\text{BF}} \\ M_{\text{FB}} & M_{\text{FF}} \end{bmatrix} \right) \\ &= \widetilde{\frac{\partial}{\partial \Lambda}} \frac{1}{2} \ln \left(\text{SDet} \begin{bmatrix} M_{\text{BB}} & M_{\text{BF}} \\ M_{\text{FB}} & M_{\text{FF}} \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \widetilde{\frac{\partial}{\partial \Lambda}} \left(\ln \left[\text{Det } M_{\text{BB}} \right] - \ln \left[\text{Det} \left(M_{\text{FF}} - M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right) \right] \right) \\ &= \frac{1}{2} \widetilde{\frac{\partial}{\partial \Lambda}} \text{Tr} \left[\ln M_{\text{BB}} \right] - \frac{1}{2} \widetilde{\frac{\partial}{\partial \Lambda}} \text{Tr} \left[\ln \left(M_{\text{FF}} - M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

と変形される。ここで、\$\widetilde{\partial/\partial\Lambda}\$ は \$R_{\text{BB}}\$ と \$R_{\text{FF}}\$ の \$\Lambda\$ 依存性のみに作用する微分演算子で、途中で (B.5) 式を用いた。\$\widetilde{\partial/\partial\Lambda}\$ を演算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \Gamma_\Lambda &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{BB}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{BB}}}{\partial \Lambda} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(M_{\text{FF}} - M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial \Lambda} + M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{BB}}}{\partial \Lambda} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

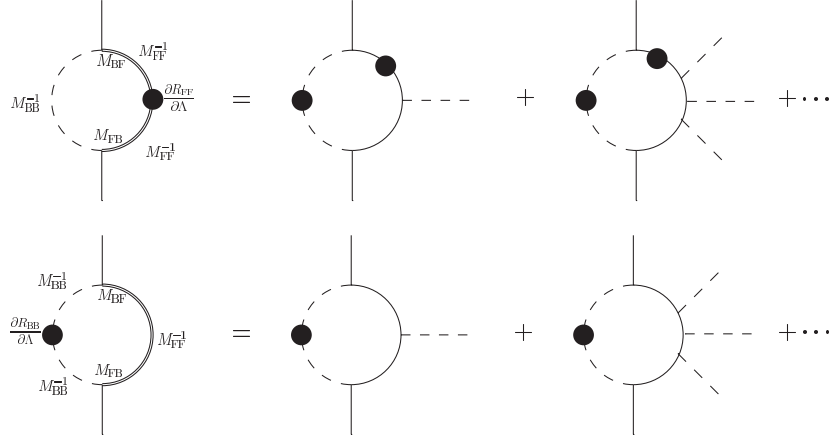


図 B.1 上図: (B.15) 式の第 2 項目. 下図: (B.15) 式の第 3 項目. 黒丸はカットオフ関数の Λ 微分の挿入を表し, 二重線は質量項を持つフェルミオンのプロパゲータを表す.

となる. 第 1 項目はボソンのループに対応することがわかる. 第 2 項目はフェルミオンのループと, フェルミオンとボソンが混合しているようなループの寄与が含まれていることがわかる. 実際, (B.13) 式の第 2 項目を展開してみると

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \text{Tr} \left[\ln \left(M_{\text{FF}} - M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right) \right] &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \text{Tr} \left[\ln M_{\text{FF}} + \ln \left(1 - M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(\text{Tr} \left[\ln M_{\text{FF}} \right] - \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] + \cdots \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial \Lambda} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial \Lambda} M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{BB}}}{\partial \Lambda} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] + \cdots.
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

この第 1 項目はフェルミオンのみのループである. 第 2 項目と第 3 項目はボソンとフェルミオンが混合している寄与で, 前者はカットオフがフェルミオンのプロパゲータに, 後者ではボソンにそれぞれ挿入されていることがわかる.

例えば, ボソンとフェルミオンが Yukawa 相互作用 $\phi \bar{\psi} \psi$ している系,

$$\Gamma_{\Lambda} = \int d^4 x \left[\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{1}{2} \phi \partial^2 \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - y \phi \bar{\psi} \psi \right] \tag{B.16}$$

の場合,

$$\begin{aligned}
 M_{\text{FF}} &= \begin{pmatrix} 0 & \not{p}^{\text{T}} + R_{\Lambda}^{\text{FF}}(p)^{\text{T}} - y\phi \\ \not{p} + R_{\Lambda}^{\text{FF}}(p) - y\phi & 0 \end{pmatrix}, & M_{\text{BB}} &= p^2 + R_{\Lambda}^{\text{BB}}(p^2) - m^2, \\
 M_{\text{FB}} &= \begin{pmatrix} -y\bar{\psi}^{\text{T}} \\ y\psi \end{pmatrix}, & M_{\text{BF}} &= (y\bar{\psi} \quad -y\psi^{\text{T}})
 \end{aligned} \tag{B.17}$$

と与えられる。フェルミオンの粒子・反粒子の自由度分があり、場 $\psi, \bar{\psi}$ の基底で 2 成分を持つ行列であるが、粒子・反粒子を区別がない場合 (ゼロ密度) は同じ寄与を与えるので 1 行に簡約し、(B.15) 式の $1/2$ の因子を消せばよい。このとき、(B.15) 式の演算は

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial \Lambda} M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] \\ &= \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} + R_{\Lambda}^{\text{FF}}(p) - y\phi} \frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial \Lambda} \frac{1}{\not{p} + R_{\Lambda}^{\text{FF}}(p) - y\phi} \cdot y\psi \frac{1}{p^2 + R_{\Lambda}^{\text{BB}}(p^2) - m^2} y\bar{\psi} \right] \\ &= -\text{Tr} \left[\frac{2(y\bar{\psi}) \cdot (y\phi) \cdot (\not{p}) \cdot (\partial_{\Lambda} R_{\Lambda}^{\text{FF}}(p)) \cdot (y\psi)}{\left((p^2 + R_{\Lambda}^{\text{FF}}(p)^2 + y^2 \phi^2) \right)^2 (p^2 + R_{\Lambda}^{\text{BB}}(p^2) - m^2)} \right] + \dots, \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{BB}}}{\partial \Lambda} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] \\ &= \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} + R_{\Lambda}^{\text{FF}}(p) - y\phi} \cdot y\psi \frac{1}{p^2 + R_{\Lambda}^{\text{BB}}(p^2) - m^2} \frac{\partial R_{\text{BB}}}{\partial \Lambda} \frac{1}{p^2 + R_{\Lambda}^{\text{BB}}(p^2) - m^2} y\bar{\psi} \right] \\ &= -\text{Tr} \left[\frac{(y\bar{\psi}) \cdot (y\phi) \cdot (\partial_{\Lambda} R_{\Lambda}^{\text{BB}}(p)) \cdot (y\psi)}{\left((p^2 + R_{\Lambda}^{\text{FF}}(p)^2 + y^2 \phi^2) \right) (p^2 + R_{\Lambda}^{\text{BB}}(p^2) - m^2)^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

と計算される。フェルミオンのプロパゲータに対応する部分の ϕ^2 を展開すれば、 $\phi\bar{\psi}\psi, \phi^3\bar{\psi}\psi, \dots$ のように演算子が得られ、Yukawa 相互作用によるそれらの有効相互作用への補正が読み取れる。また、第 2 項目と第 3 項目をダイアグラムで表すと図 B.1 のようになる。上述した演算とダイアグラムの対応関係が理解できる。^{*1}

^{*1} (B.18) 式の第 1 項目は図 B.1 の上図における右辺の第 1 項目に対応している。(B.18) 式の第 1 項目における 2 の因子は、カットオフ関数の挿入箇所として 2 つのフェルミオン・ラインのどちらかであり、その自由度分として 2 があると理解できる。

付録 C

曲がった空間上の場の理論

重力場も 1 種のゲージ場であり、時空のゆがみとして解釈される。ここでは曲がった空間における場の理論について最小限のレビューを行う。詳細は文献 [363, 364, 365] 等を参照せよ。

C.1 リーマン幾何

一般相対性理論の数学的基礎はリーマン幾何によって与えられている。一般に多様体上の平行移動の概念は存在しないが、リーマン幾何ではアフィン接続という平行移動のルールを与えることで平行移動を定義する。

C.1.1 共変微分

平らな空間において、あるベクトル $V^\mu(x)$ 平行移動の変化量は

$$dV^\mu(x^\mu) = V^\mu(x^\mu + \delta x^\mu) - V^\mu(x^\mu) = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (\text{C.1})$$

で与えられる。

曲がった空間では (C.1) のような座標の変化だけではなく、ベクトル V^μ 自身も変化を受ける。その変化を

$$\delta V^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha dx^\beta \quad (\text{C.2})$$

と書く。したがって、曲がった空間での平行移動の量は

$$DV^\mu := dV^\mu - \delta V^\mu = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu V^\alpha \right) dx^\beta \quad (\text{C.3})$$

となる。これは点 x にあるベクトル V^μ から点 $x + \delta x$ にあるベクトル $\bar{V}^\mu$ への線形写像となっており、アフィン接続と呼ばれる。 $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ はアフィン接続係数またはクリストッフェル記号と呼ばれ、

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\nu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu} \right) \quad (\text{C.4})$$

と与えられる。^{*1} 以上の議論から任意のベクトル V^μ と 1-形式 V_μ に対する共変微分 ∇_μ をそれぞれ次

^{*1} クリストッフェル記号の反対称成分 $T_{\mu\nu}^\rho := \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ とねじれ率 (torsion) という。

のように定義する:

$$\nabla_\mu V^\nu := \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\rho\mu}^\nu V^\rho, \quad (\text{C.5})$$

$$\nabla_\mu V_\nu := \partial_\mu V_\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\rho V_\rho. \quad (\text{C.6})$$

この共変微分は微分同相写像 (一般座標変換; 一般化ローレンツ変換) の下で不変となる.

ベクトルに作用する共変微分の交換関係を考えると

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = R_{\beta\mu\nu}^\alpha V^\beta \quad (\text{C.7})$$

となる.*² ここで現れるテンソル $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ はリーマン・テンソルまたは曲率テンソルと呼ばれ, クリストッフェル記号を用いて

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^\nu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\rho\mu}^\mu \Gamma_{\beta\nu}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\rho \quad (\text{C.8})$$

と与えられる. このテンソルは添え字の入れ替えに対して次のような対称性がある:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (\text{C.9})$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu}, \quad (\text{C.10})$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (\text{C.11})$$

N 次元多様体でのリーマン・テンソルの独立な成分の数は

$$\frac{1}{12}N^2(N^2 - 1) \quad (\text{C.12})$$

個である.

リーマン・テンソルからリッチ・テンソルとスカラー曲率と呼ばれる量を定義する:

$$R_{\alpha\beta} := g^{\mu\nu} R_{\mu\alpha\nu\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu, \quad (\text{C.13})$$

$$R := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (\text{C.14})$$

C.1.2 リー微分とキリング・ベクトル

次に計量テンソルが座標の変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + tV^\mu(x)$ に対してどのように変換されるかを見る. ただし, パラメータ t は微小であるとする. このとき,

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x'^\rho) &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} g^{\alpha\beta}(x^\rho) \simeq \left(\delta_\alpha^\mu + t \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^\nu + t \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\beta} \right) g^{\alpha\beta}(x^\rho) \\ &\simeq g^{\mu\nu}(x^\rho) + t \left(g^{\mu\beta} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\beta} + g^{\alpha\nu} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

*² ゲージ場 A_μ の場合, 共変微分の交換関係は

$$[D_\mu, D_\nu]\psi = F_{\mu\nu}\psi$$

であった.

となる．この左辺の計量テンソルは座標 x' で定義されているので，これを x で与えたい．左辺を次のように展開する：

$$g'^{\mu\nu}(x'^\rho) = g'^{\mu\nu}(x^\rho + tV^\rho) \simeq g'^{\mu\nu}(x^\rho) + tV^\rho \left(\frac{\partial g'^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right). \quad (\text{C.16})$$

この右辺の第 2 項目の $g'^{\mu\nu}$ は V^μ の高次を無視できるとするならば $g^{\mu\nu}$ とできるので，(C.15) 式は

$$\begin{aligned} g'^{\mu\nu}(x^\rho) &= g^{\mu\nu}(x^\rho) - V^\rho \left(\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right) + g^{\mu\beta} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\beta} + g^{\alpha\nu} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} \\ &= g^{\mu\nu}(x^\rho) + t \delta g^{\mu\nu}(x^\rho) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

と書かれる．この計量テンソルの時空の任意のベクトル場 V による変化による一連の操作はリー微分として定義できる：

$$\begin{aligned} \delta g^{\mu\nu}(x) &= \mathcal{L}_V g^{\mu\nu}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g'^{\mu\nu}(x') - g^{\mu\nu}(x)}{t} \\ &= -V^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} g^{\mu\nu} + g^{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\rho} V^\nu + g^{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial x^\rho} V^\mu, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} \delta g_{\mu\nu}(x) &= \mathcal{L}_V g_{\mu\nu}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g'_{\mu\nu}(x') - g_{\mu\nu}(x)}{t} \\ &= V^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho} g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \frac{\partial}{\partial x^\rho} V^\rho + g_{\rho\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\rho. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

これは共変微分を用いて書き直すことができ、

$$\mathcal{L}_V g_{\mu\nu} = \nabla_\mu V_\nu + \nabla_\nu V_\mu \quad (\text{C.20})$$

となる．特に $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$ となるベクトル ξ_μ をキリング・ベクトルと呼び、

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0 \quad (\text{C.21})$$

をキリング方程式という．キリング・ベクトルは $\delta g_{\mu\nu} = 0$ となるようなベクトルであり，時空の構造と密接な関係がある． N 次元の多様体には最大で

$$\frac{N(N+1)}{2} \quad (\text{C.22})$$

のキリング・ベクトルが存在する．最大個数のキリング・ベクトルを持つ多様体は最大対称であるという．

C.2 時空積分の測度

平らな空間における時空積分は

$$\int d^d x' \quad (\text{C.23})$$

である．これが曲がった空間ではどのようなかを見る．

曲がった空間を定義する計量 $g_{\mu\nu}$ は四脚場 $e_\mu^a(x) = \partial x'^a / \partial x^\mu$ (vierbein; tetrad) を用いて

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}, \quad g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab} \quad (\text{C.24})$$

と定義される。ただし, η_{ab}, η^{ab} は平らな空間の計量で,

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

である。 $g^{\mu\nu} = e_a^\mu e_b^\nu \eta^{ab}$ の両辺の行列式は

$$\begin{aligned} g &:= \det g_{\mu\nu} = (\det e_a^\mu) (\det e_b^\nu) (\det \eta^{ab}) \\ &= -(\det e)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

となり, これを解くと

$$\det e = \frac{1}{\sqrt{-g}} \quad (\text{C.27})$$

を得る。これを用いると曲がった空間における積分測度は

$$d^d x = dx^1 \cdots dx^d = (\det e) dx^{1'} \cdots dx^{d'} = \frac{1}{\sqrt{-g}} d^d x' \quad (\text{C.28})$$

のようになるから, 積分測度は

$$d^d x' \rightarrow \sqrt{-g} d^d x \quad (\text{C.29})$$

と変換されることがわかる。

C.3 スカラー場

平らな空間での自由スカラー場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial^a \phi) (\partial^b \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (\text{C.30})$$

である。曲がった空間へは四脚場 $e_\mu^a(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \eta_{ab} e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) (\partial^\mu \phi) (\partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) (\partial^\mu \phi) (\partial^\nu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

となる。前節で求めた作用積分における時空間積分 $d^4 x \rightarrow d^4 x \sqrt{-g}$ からくる。

C.4 スピノル場

平らな空間の場合において, スピノル場 ψ に対するラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\gamma_a \partial^a - m) \psi(x) = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma_a \partial^a \psi - (\partial_a \bar{\psi}) \gamma^a \psi \right) - m \bar{\psi} \psi \quad (\text{C.32})$$

に従う。スピノル空間でのローレンツ変換は

$$S = \exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon^{ab}\sigma_{ab}\right) \simeq 1 - \frac{i}{4}\epsilon^{ab}\sigma_{ab}, \quad \sigma_{ab} = \frac{i}{2}(\gamma_a\gamma_b - \gamma_b\gamma_a) \quad (\text{C.33})$$

で与えられる。ただし、Dirac のガンマ行列は反交換関係

$$\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2\eta_{ab} \quad (\text{C.34})$$

を満たす。これを用いるとラグランジアンはローレンツ変換の下で

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)[i\gamma_a\partial^a - m]\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)S^{-1}(SS^{-1})\left[i\gamma_a(\Lambda^{-1})^a_b\partial^b - m\right]S\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \bar{\psi}\left[i(S^{-1}\gamma_aS)(\Lambda^{-1})^a_b\partial^b - m\right]\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \bar{\psi}\left[i\Lambda^c_a\gamma_c(\Lambda^{-1})^a_b\partial^b - m\right]\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \bar{\psi}[i\gamma_a\partial^a - m]\psi \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

となって不変である。ローレンツベクトルに対するローレンツ変換は

$$\Lambda^a_b = \exp\left(-\frac{i}{4}\epsilon_{cd}\mathcal{J}^{cd}\right) \simeq \delta^a_b - \frac{i}{4}\epsilon_{cd}(\mathcal{J}^{cd})^a_b, \quad (\mathcal{J}^{cd})_{ab} = 2i(\delta^c_a\delta^d_b - \delta^c_b\delta^d_a) \quad (\text{C.36})$$

である。

これを曲がった空間へと拡張する。ところが、曲がった空間ではスピノルの有限次元表現は存在しない。そこで、各時空点に接平面を考え、そこでのローレンツ変換を与えることで定義する。それは四脚場を用いて行なわれる。

曲がった空間でのガンマ行列は四脚場 $e^\mu_a(x)$ を用いて

$$\gamma^\mu(x) = e^\mu_a(x)\gamma^a \quad (\text{C.37})$$

と定義され、^{*3} そのローレンツ変換はベクトル的に変換される：

$$e'^\mu_a(x) = \Lambda^b_a(x)e^\mu_b(x). \quad (\text{C.39})$$

ローレンツ変換の下でラグランジアンが不変になるようにするために

$$\nabla_a\psi(x) \rightarrow (\Lambda^{-1})^b_a(x)S(\nabla_b\psi(x)) \quad (\text{C.40})$$

となるような共変微分を定義する。^{*4} このように定義すると、平らな空間の場合と同様の計算をすると

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)[i\gamma^a e^\mu_a(x)\nabla_\mu - m]\psi(x) &\rightarrow \bar{\psi}(\Lambda^{-1}x)S^{-1}\left[iSS^{-1}\gamma^a S\Lambda^b_a(x)\nabla_b - Sm\right]\psi(\Lambda^{-1}x) \\ &= \bar{\psi}[i\gamma^a\nabla_a - m]\psi \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

^{*3} このガンマ行列が満たす交換関係は

$$\gamma_\mu(x)\gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x)\gamma_\mu(x) = 2g_{\mu\nu}(x) \quad (\text{C.38})$$

となる。

^{*4} ゲージ変換における共変微分は

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x)$$

であった。

となって不変にできる. ∇_μ を陽に書くと

$$\nabla_\mu \psi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{4} \sigma_{ab} \omega_\mu^{ab} \right) \psi \quad (\text{C.42})$$

となる. だし,

$$\omega_\mu^{ab} = e_\nu^a \nabla_\mu e^{b\nu} \quad (\text{C.43})$$

はスピン接続と呼ばれる. したがって, 曲がった空間でのスピノル場のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sqrt{-g} \bar{\psi}(x) [i \gamma^a e_a^\mu \nabla_\mu - m] \psi(x) \\ &= \sqrt{-g} \bar{\psi}(x) [i \not{\nabla} - m] \psi(x) \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

となる. この導出は例えば文献 [366] を見よ.

C.5 ゲージ場

平らな空間でのゲージ場の作用は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{ab} F^{ab}, \quad F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \quad (\text{C.45})$$

と与えられる.

曲がった空間においてローレンツ変換 (微分同相写像) の下で不変になるためには微分 ∂_μ を共変微分 ∇_μ に変えればよい. すなわち,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu \quad (\text{C.46})$$

となる. 非可換ゲージ場の場合も同様にすればよい.

付録 D

熱核展開

一般に、くりこみ群方程式を導出する際に微分演算子の固有値を足しあげる必要がある。曲がりのない平坦な時空間では平面波展開が使える、微分演算子は運動量に変わること、運動量積分を行えば固有値を足しあげることができる。しかし、曲がった時空間では平面波展開が使えないため、別の方法が必要である。その方法の一つが熱核展開の方法である。ここではその方法についてごく簡単にまとめておく。ある任意の関数 $W(p^2)$ とそのトレース $\text{Tr}[W(p^2)]$ が与えられているとする。 $p^2 = -g_{\mu\nu}\partial^\mu\partial^\nu$ は微分演算子である。この関数をラプラス変換すると

$$\text{Tr}[W(p^2)] = \int_{-\infty}^{\infty} ds \tilde{W}(s) \text{Tr}[e^{-s p^2}] \quad (\text{D.1})$$

を得る。右辺のトレース部分を次のように展開する：

$$\text{Tr}[e^{-s p^2}] = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(p^2) s^{-(D-n)/2}. \quad (\text{D.2})$$

ただし、 D は時空間の次元で、また、

$$B_n(p^2) = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \int d^D x \sqrt{g} \text{tr}[\mathbf{b}_n] \quad (\text{D.3})$$

と定義した。係数 $\mathbf{b}_n$ は熱核係数と呼ばれ、 $\mathbf{b}_0 = \mathbf{1}$ 、 $\mathbf{b}_2 = \frac{R}{6} \mathbf{1}$ などと求まる。^{*1} 尚、 $\mathbf{1}$ は場のスピンの表現上の単位元である。この係数の一覧を D.1 に示す。(D.3) を (D.1) に代入すると

$$\text{Tr}[W(p^2)] = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \left\{ Q_{\frac{D}{2}}[W] \int d^D x \sqrt{g} \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}_0] + Q_{\frac{D}{2}-1}[W] \int d^D x \sqrt{g} R \text{tr}[\bar{\mathbf{b}}_2] + \mathcal{O}(R^2) \right\} \quad (\text{D.4})$$

となる。このとき、 $\bar{\mathbf{b}}_0 := \mathbf{1}$ 、 $\bar{\mathbf{b}}_2 := \mathbf{1}/6$ 、また、

$$Q_n[W] := \int_{-\infty}^{\infty} ds (-s)^{-n} \tilde{W}(s), \quad (\text{D.5})$$

と定義した。この関数を Mellin 変換すると

$$\begin{aligned} Q_0[W] &= W(0), \\ Q_n[W] &= \frac{1}{\Gamma[n]} \int_0^\infty dz z^{n-1} W[z], \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

^{*1} 熱核係数の導出は Gilkey の方法 [367, 368] と De Witt の方法 [369] の 2 つがある。

を得る. $\Gamma[n]$ はガンマ関数である. (D.4) と (D.6) を使うと曲がった空間における微分演算子に対するトレースをとることができる. 曲がった空間だけではなく, 任意の背景場がある場合にも適用できる. より詳細な事柄はレビュー [248, 370, 371] を参照せよ.

表 D.1 $D = 4$ での個々の粒子に対する熱核係数

	$h_{\mu\nu}^{\perp}$ (spin 2)	$\xi_{\mu}, C_{\mu}^{\perp}$ (spin 1)	$\psi, \bar{\psi}$ (spin 1/2)	$h, \sigma, \phi, C, \bar{C}$ (spin 0)
$\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}_0] =: b_0$	5	3	2	1
$\text{tr}[\bar{\mathbf{b}}_2] =: b_2$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

付録 E

量子統計

密度行列

$$\hat{\rho} = \exp \left[-\beta(\hat{H} - \mu_i N_i) \right] \quad (\text{E.1})$$

を定義すると, 系の分配関数は

$$Z = \text{Tr } \hat{\rho} \quad (\text{E.2})$$

で与えられる. 分配関数を評価することで, 圧力 P , 数密度 N_i , エントロピー S , 内部エネルギー E はそれぞれ

$$P = \frac{\partial}{\partial V} T \log Z, \quad (\text{E.3})$$

$$N_i = \frac{\partial}{\partial \mu_i} T \log Z, \quad (\text{E.4})$$

$$S = \frac{\partial}{\partial T} T \log Z, \quad (\text{E.5})$$

$$E = -PV + TS + \mu_i N_i \quad (\text{E.6})$$

と求まる. 自由粒子の場合,

$$\log Z = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \log \left(1 \pm e^{-\beta(E-\mu)} \right)^{\pm 1} \quad (\text{E.7})$$

である. スカラー場 $\phi(\vec{x}, \tau)$ と Dirac 場 $\psi(\vec{x}, \tau)$ のフーリエ変換は

$$\phi(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \tilde{\phi}_n(\vec{p}), \quad \omega_n = 2\pi n T, \quad (\text{E.8})$$

$$\psi(\vec{x}, \tau) = \sqrt{\frac{\beta}{V}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\vec{p}} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} + \omega_n \tau)} \tilde{\psi}_n(\vec{p}), \quad \omega_n = (2n+1)\pi T \quad (\text{E.9})$$

となる. ω_n は Matsubara 周波数と呼ばれる.

Matsubara 和を計算する際に便利な公式を以下に示す:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi n)^2 + \theta^2} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^\theta - 1} \right) = \frac{\coth(\theta/2)}{2\theta}, \quad (\text{E.10})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + \theta^2} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1} \right) = \frac{\tanh(\theta/2)}{2\theta}. \quad (\text{E.11})$$

付録 F

ベータ関数の導出

F.1 Nambu–Jona-Lasinio 模型

有限温度・有限密度 NJL 模型の有効作用を

$$\Gamma_\Lambda[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x [\bar{\psi}\not{\partial}\psi - V(\sigma; t)] \quad (\text{F.1})$$

として、有効ポテンシャル $V(\sigma; t)$ に対するくりこみ方程式をスムーズ・カットオフと最適化カットオフのそれぞれの場合について導出する。

F.1.1 シャープ・カットオフの場合

くりこみ群方程式は

$$\frac{\partial \Gamma_\Lambda}{\partial t} = -\frac{1}{2}T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Lambda \delta(|\vec{p}| - \Lambda) \text{tr} \log \left(\frac{\vec{\delta}}{\delta\phi_p^T} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_{-p}} \right) \quad (\text{F.2})$$

となる。ただし、 $\phi_p^T = (\psi^T(-p), \bar{\psi}(p))$ とした。ここで、平均場を導入する：

$$\psi(p) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) \psi, \quad \bar{\psi}(p) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) \bar{\psi}. \quad (\text{F.3})$$

Γ_Λ の $\phi(p)$ による汎関数微分を行うと逆 2 点関数は

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta\phi_p^T} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_{p'}} = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\delta}}{\delta\psi^T} V \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi} & -i(\not{p} - i\mu\gamma_0)^T - \frac{\vec{\delta}}{\delta\psi^T} V \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}^T} \\ -i(\not{p} + i\mu\gamma_0) - \frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}} V \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi} & -\frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}} V \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}^T} \end{pmatrix} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \quad (\text{F.4})$$

となる。ポテンシャルの微分を次のように近似する：

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta\psi^T} V \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi} = 0, \quad \frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}} V \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}^T} = 0, \quad \frac{\vec{\delta}}{\delta\bar{\psi}} V \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi} = \partial_\sigma V, \quad \frac{\vec{\delta}}{\delta\psi^T} V \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}^T} = -\partial_\sigma V. \quad (\text{F.5})$$

これは large- N 近似に対応する。この近似の下で (F.4) は

$$\frac{\vec{\delta}}{\delta\phi_p^T} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_{p'}} \simeq \begin{pmatrix} 0 & -i\not{p}^{-T} + \partial_\sigma V \\ -i\not{p}^+ - \partial_\sigma V & 0 \end{pmatrix} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \quad (\text{F.6})$$

となる. ただし, $p^\pm := p \pm i\mu\gamma_0$ と定義した. 行列の公式 $\text{tr} \log(A) = \log \det(A)$ と $\text{tr} \log(p^\pm \mp i\partial_\sigma V) = 4\frac{1}{2} \log((p^\pm)^2 + (\partial_\sigma V)^2) = 2 \log((p^\pm)^2 + (\partial_\sigma V)^2)$ を使うと (F.2) 式の 3次元運動量積分は次のように計算できる:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \Lambda \delta(|\vec{p}| - \Lambda) \text{tr} \log \left(\frac{\vec{\delta}}{\delta\phi_p^T} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\phi_{-p}} \right) \\
&= \frac{4\pi\Omega\Lambda}{(2\pi)^3} \int d|\vec{p}| \delta(|\vec{p}| - \Lambda) |\vec{p}|^2 \\
&\quad \times \left\{ 2 \log[(p_0 + i\mu)^2 + |\vec{p}|^2 + (\partial_\sigma V)^2] + 2 \log[(p_0 - i\mu)^2 + |\vec{p}|^2 + (\partial_\sigma V)^2] \right\} \\
&= \Omega \frac{\Lambda^3}{\pi^2} [\log[p_0^2 + (E + \mu)^2] + \log[p_0^2 + (E - \mu)^2]] \\
&= \Omega \frac{\Lambda^3}{\pi^2} \left[\int_{T^2}^{(E+\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + p_0^2} + \int_{T^2}^{(E-\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + p_0^2} + C_n \right], \tag{F.7}
\end{aligned}$$

ここで, $E := \sqrt{\Lambda^2 + (\partial_\sigma V)^2}$ とし, $\Omega := (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)$ は時空の体積である. $C_n := 2 \log(T^2 + p_0^2)$ は V に依らない定数なので以後無視する. 次に, フェルミオンに対する Matsubara 和を公式 (E.11) を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
& \Omega \frac{\Lambda^3}{\pi^2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{T^2}^{(E+\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + p_0^2} + \int_{T^2}^{(E-\mu)^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + p_0^2} + C_n \right] \\
&= \Omega \frac{\Lambda^3}{\pi^2} \left[\int_T^{E+\mu} \left(1 - \frac{2}{e^{\beta\theta} + 1} \right) d\theta + \int_T^{E-\mu} \left(1 - \frac{2}{e^{\beta\theta} + 1} \right) d\theta \right] \\
&= \Omega \frac{2\Lambda^3}{\pi^2} \left[E + T \log(1 + e^{-\beta(E-\mu)}) + T \log(1 + e^{-\beta(E+\mu)}) + C \right] \tag{F.8}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $C := -2T + 2T \log(1 + e^{-1})$ は定数なので無視する.

以上の計算と $\partial_t V = -\partial_t \Gamma_\Lambda / \Omega$ であることを用いると

$$\partial_t V(\sigma; t) = \frac{\Lambda^3}{\pi^2} \left[E + T \log(1 + e^{-\beta(E-\mu)}) + T \log(1 + e^{-\beta(E+\mu)}) \right] \tag{F.9}$$

を得る.

ゼロ温度極限では, (F.9) 式の右辺の第 3 項目は明らかにゼロになり, 第 2 項目は,

- $\mu < E$ に対して,

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \log(1 + e^{-\beta(E-\mu)}) = \lim_{T \rightarrow 0} T \log(1 + e^{-\beta|E-\mu|}) = 0 \tag{F.10}$$

- $\mu > E$ に対して,

$$\begin{aligned}
\lim_{T \rightarrow 0} T \log(1 + e^{-\beta(E-\mu)}) &= \lim_{T \rightarrow 0} T \log(e^{\beta|E-\mu|}) (e^{-\beta|E-\mu|} + 1) \\
&= \lim_{T \rightarrow 0} \left[T \log(e^{\beta|E-\mu|}) + T \log(e^{-\beta|E-\mu|} + 1) \right] \\
&= |E - \mu| \tag{F.11}
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\partial_t V(\sigma; t) = \frac{\Lambda^3}{\pi^2} \left[E + (\mu - E) \cdot \theta(\mu - E) \right] \quad (\text{F.12})$$

を得る。

ゼロ温度・ゼロ密度での 4 体フェルミ結合定数に対するくりこみ群方程式は

$$V(\sigma; t) = \frac{G_\Lambda}{2} \sigma^2, \quad M(\sigma; t) = \partial_\sigma V = G_\Lambda \sigma \quad (\text{F.13})$$

として、

$$\partial_t \frac{G_\Lambda}{2} \sigma^2 = \frac{\Lambda^4}{\pi^2} \sqrt{1 + \frac{G_\Lambda^2 \sigma^2}{\Lambda^2}} = \frac{\Lambda^4}{\pi^2} \left(1 + \frac{G_\Lambda^2 \sigma^2}{2\Lambda^2} + \dots \right) \quad (\text{F.14})$$

なので、

$$\partial_t G_\Lambda = \frac{\Lambda^2 G_\Lambda^2}{\pi^2} \quad (\text{F.15})$$

を得る。

F.1.2 最適化カットオフ

Wetterich 方程式

$$\Gamma_\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{str} \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \phi_p} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \phi_{-p}} + R_\Lambda \right]^{-1} \cdot (\partial_t R_\Lambda) \quad (\text{F.16})$$

において、3 次元カットオフを用いる：

$$R_\Lambda(\vec{p}, \vec{p}') = \begin{pmatrix} 0 & i\vec{p}^T r_\Lambda(\vec{p}^2/\Lambda^2) \\ i\vec{p} r_\Lambda(\vec{p}^2/\Lambda^2) & 0 \end{pmatrix} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p'). \quad (\text{F.17})$$

このとき、large- N 近似の下、逆 2 点関数を計算すると

$$\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \phi_p} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \phi_{p'}} + \mathcal{R}_\Lambda(p, p') = \begin{pmatrix} 0 & -i\vec{p}^T + \partial_\sigma V \\ -i\vec{p}^+ - \partial_\sigma V & 0 \end{pmatrix} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p') \quad (\text{F.18})$$

となる。ここで、 $p^\pm := (p_0 \pm i\mu, \vec{p}(1 + r_\Lambda))$ と定義した。3 次元最適化カットオフは

$$r_\Lambda(|\vec{p}|^2/\Lambda^2) = \left(\sqrt{\frac{\Lambda^2}{|\vec{p}|^2}} - 1 \right) \theta \left(1 - \frac{|\vec{p}|^2}{\Lambda^2} \right) \quad (\text{F.19})$$

で与えられる [35]。

Wetterich 方程式を次のように変形する：

$$\Gamma_\Lambda[\psi, \bar{\psi}] = -\frac{1}{2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \tilde{\partial}_t \text{tr} \log \left[\frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \phi_p} \Gamma_\Lambda \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \phi_{-p}} + \mathcal{R}_\Lambda \right]. \quad (\text{F.20})$$

ここで, $\phi^T(p) = (\psi^T(-p), \bar{\psi}(p))$ であり, $\tilde{\partial}_t$ はカットオフ関数 R_Λ のスケール依存性のみに作用する, すなわち, $\tilde{\partial}_t := \frac{\partial R_\Lambda}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial R_\Lambda} = \frac{\partial r_\Lambda}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial r_\Lambda}$ である. あとはスムーズ・カットオフの場合と同様の計算をして

$$\begin{aligned}
(\text{RHS}) &= -\frac{\Omega}{2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \tilde{\partial}_t \left\{ 2 \log [(p_0 + i\mu)^2 + |\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)^2 + (\partial_\sigma V)^2] \right. \\
&\quad \left. + 2 \log [(p_0 - i\mu)^2 + |\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)^2 + (\partial_\sigma V)^2] \right\} \\
&= -\Omega T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\partial r_\Lambda}{\partial t} \left\{ \frac{2|\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)}{(p_0 + i\mu)^2 + |\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)^2 + (\partial_\sigma V)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2|\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)}{(p_0 - i\mu)^2 + |\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)^2 + (\partial_\sigma V)^2} \right\} \\
&= -\frac{\Omega}{2\pi^2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d|\vec{p}| |\vec{p}|^2 \left(-\frac{\Lambda}{|\vec{p}|} \theta(1 - |\vec{p}|^2/\Lambda^2) \right) (2|\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{(p_0 + i\mu)^2 + |\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)^2 + (\partial_\sigma V)^2} + \frac{1}{(p_0 - i\mu)^2 + |\vec{p}|^2(1 + r_\Lambda)^2 + (\partial_\sigma V)^2} \right\} \\
&= \frac{\Omega \Lambda^5}{3\pi^2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(p_0 + i\mu)^2 + E^2} + \frac{1}{(p_0 - i\mu)^2 + E^2} \right\} \\
&= \frac{\Omega \Lambda^5}{3\pi^2} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{E} \left\{ \frac{E + \mu}{p_0^2 + (E + \mu)^2} + \frac{E - \mu}{p_0^2 + (E - \mu)^2} \right\} \\
&= \frac{\Omega \Lambda^5}{6\pi^2 E} \left[\tanh\left(\frac{E + \mu}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu}{2T}\right) \right] \tag{F.21}
\end{aligned}$$

となり, 最適化カットオフの場合のくりこみ群方程式

$$\partial_t V(\sigma; t) = -\frac{\Lambda^5}{6\pi^2 E} \left[\tanh\left(\frac{E + \mu}{2T}\right) + \tanh\left(\frac{E - \mu}{2T}\right) \right] \tag{F.22}$$

を得る.

ゼロ温度極限では,

$$\partial_t V(\sigma; t) = -\frac{\Lambda^5}{6\pi^2 E} [1 - \theta(\mu - E)] \tag{F.23}$$

となる.

4 体フェルミ結合定数のくりこみ群方程式は

$$\partial_t G_\Lambda = \frac{\Lambda^2 G_\Lambda^2}{3\pi^2} \tag{F.24}$$

となる.

F.2 漸近的に安全な量子重力と非最小結合する Higgs–Yukawa 模型

5 章で示したくりこみ群方程式の詳細な導出を示す.

F.2.1 ボソンの寄与

(B.14) 式のボソンのループに対応する部分は

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{BB}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{BB}}}{\partial \Lambda} \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{h^\perp h^\perp} + \frac{1}{2} \text{Tr}' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\xi\xi} + \frac{1}{2} \text{Tr}'' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\text{SS}} \quad (\text{F.25})$$

と与えられる。これらの寄与を個々に評価していく。カットオフ関数は 5.3.1 節で与えた。

スピン 2 の重力場 (横波のモード) の寄与

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{h^\perp h^\perp} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\frac{1}{2} (\partial_t F) R_\Lambda + \frac{1}{2} F (\partial_t R_\Lambda)}{\frac{1}{2} F (P_\Lambda + \frac{2}{3} R) - \frac{1}{2} V - \frac{1}{2} Y} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{F P_\Lambda - V - Y} - \frac{1}{3} \text{Tr} \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{(F P_\Lambda - V - Y)^2} F R + \mathcal{O}(R^2). \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

付録 D で与えた熱核展開を用いて, $\mathcal{O}(R^0)$, $\mathcal{O}(R)$ の項を評価する。

- $\mathcal{O}(R^0)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr}[W_{h^\perp}^1] &:= \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{F P_\Lambda - V - Y} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_0^{h^\perp} Q_2[W_{h^\perp}^1] \int d^4 x \sqrt{g} + b_2^{h^\perp} Q_1[W_{h^\perp}^1] \int d^4 x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(R^2) \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

$$\begin{aligned} Q_2[W_{h^\perp}^1] &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz z W_{h^\perp}^1(z) = \int_0^\infty dz z \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{F P_\Lambda - V - Y} \\ &= \frac{\Lambda^6}{F \Lambda^2 - V} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right] + \frac{\Lambda^6}{(F \Lambda^2 - V)^2} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right] Y + \mathcal{O}(Y^2), \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

$$\begin{aligned} Q_1[W_{h^\perp}^1] &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^\infty dz W_{T1}(z) = \int_0^\infty dz \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{F P_\Lambda - V - Y} \\ &= \frac{\Lambda^4}{F \Lambda^2 - V} \left[\frac{1}{2} (\partial_t F) - 2F \right] + \mathcal{O}(Y). \end{aligned} \quad (\text{F.29})$$

- $\mathcal{O}(R)$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3} \text{Tr}[W_{h^\perp}^2] R &:= -\frac{1}{3} \text{Tr} \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{(F P_\Lambda - V - Y)^2} F R \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_0^{h^\perp} Q_2[W_{h^\perp}^2] \int d^4 x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(Y, R^2), \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

$$\begin{aligned} Q_2[W_{h^\perp}^2] &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz z \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{(F P_\Lambda - V)^2} F \\ &= \frac{\Lambda^6 F}{(F \Lambda^2 - V)^2} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{h^\perp h^\perp} &= \frac{b_0^{h^\perp}}{2(4\pi)^2} \frac{\Lambda^6}{F\Lambda^2 - V} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right] \int d^4x \sqrt{g} \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{b_2^{h^\perp}}{2} \frac{\Lambda^4}{F\Lambda^2 - V} \left[\frac{1}{2} (\partial_t F) - 2F \right] - \frac{b_0^{h^\perp}}{3} \frac{\Lambda^6 F}{(F\Lambda^2 - V)^2} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right] \right\} \\
&\times \int d^4x \sqrt{g} R \\
&+ \frac{b_0^{h^\perp}}{(4\pi)^2} \frac{\Lambda^6}{(F\Lambda^2 - V)^2} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right] \int d^4x \sqrt{g} Y + \mathcal{O}(Y^2, R^2). \quad (\text{F.32})
\end{aligned}$$

それぞれ, $V, F, Y = y\phi\bar{\psi}\psi$ への補正になる. 特に Yukawa 相互作用に関して, これは図 5.5 の (I) に対応する.

以下, 同様に計算していく.

スピン 1 の重力場の寄与

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr}' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\xi\xi} &= \frac{1}{2} \text{Tr}' \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{F(P_\Lambda + \frac{2\alpha-1}{4} R) - \alpha(V+Y)} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}' \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{FP_\Lambda - \alpha(V+Y)} - \frac{1}{8} \text{Tr}' \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{(FP_\Lambda - \alpha(V+Y))^2} F(2\alpha-1)R + \mathcal{O}(R^2). \quad (\text{F.33})
\end{aligned}$$

- $\mathcal{O}(R)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr}[W_\xi^1] &:= \frac{1}{2} \text{Tr} \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{FP_\Lambda - \alpha(V+Y)} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_0^\xi Q_2[W_\xi^1] \int d^4x \sqrt{g} + b_2^\xi Q_1[W_\xi^1] \int d^4x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(R^2), \quad (\text{F.34})
\end{aligned}$$

$$Q_2[W_\xi^1] = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz z \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{FP_\Lambda - \alpha(V+Y)} = \frac{\Lambda^6}{F\Lambda^2 - \alpha(V+Y)} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right], \quad (\text{F.35})$$

$$Q_1[W_\xi^1] = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^\infty dz \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{FP_\Lambda - \alpha(V+Y)} = \frac{\Lambda^4}{F\Lambda^2 - \alpha V} \left[\frac{1}{2} (\partial_t F) - 2F \right]. \quad (\text{F.36})$$

- $\mathcal{O}(R)$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{8} \text{Tr}[W_\xi^2] R &:= -\frac{1}{8} \text{Tr} \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{(FP_\Lambda - \alpha(V+Y))^2} F(2\alpha-1)R \\
&= -\frac{1}{8} \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_0^\xi Q_2[W_\xi^2] \int d^4x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(R^2), \quad (\text{F.37})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2[W_\xi^2] &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz z \frac{(\partial_t F) R_\Lambda + F (\partial_t R_\Lambda)}{(FP_\Lambda - \alpha(V+Y))^2} F(2\alpha-1) \\
&= \frac{\Lambda^6 F(2\alpha-1)}{(F\Lambda^2 - \alpha(V+Y))^2} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right]. \quad (\text{F.38})
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr}' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\xi\xi} &= \frac{b_0^\xi}{2(4\pi)^2} \frac{\Lambda^6}{F\Lambda^2 - \alpha(V+Y)} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right] \int d^4x \sqrt{g} \\ &+ \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{b_2^\xi}{2} \frac{\Lambda^4}{F\Lambda^2 - \alpha V} \left[\frac{1}{2} (\partial_t F) - 2F \right] \right. \\ &\left. - \frac{b_0^\xi}{8} \frac{\Lambda^6 F(2\alpha - 1)}{(F\Lambda^2 - \alpha(V+Y))^2} \left[\frac{1}{6} (\partial_t F) - F \right] \right\} \int d^4x \sqrt{g} R. \end{aligned} \quad (\text{F.39})$$

de-Donder ゲージ $\alpha = 0$ をとると, α を伴う寄与は消える. したがって, 図 5.5 の (II) はこのとき寄与しない.

スピン 0 の重力場とスカラー場の寄与

$$\frac{1}{2} \text{Tr}'' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\text{SS}} \quad (\text{F.40})$$

の被トレース部分は場の基底 (σ, h, ϕ) で 3 行 3 列の行列である. 計算方法は行列 $\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda$ の逆行列を評価した後に $(\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda)^{-1} \partial_t \mathcal{R}_\Lambda$ の演算を行う. その後に de-Donder ゲージを適用する:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr}'' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\text{SS}} &= \frac{b_0^S}{2(4\pi)^2} Q_2[A] \int d^4x \sqrt{g} + \frac{1}{2(4\pi)^2} \{ b_2^S Q_1[A] + b_0^S Q_2[B] \} \int d^4x \sqrt{g} R \\ &+ \frac{b_0^S}{2(4\pi)^2} Q_2[C] \int d^4x \sqrt{g} Y + \mathcal{O}(R^2, Y^2), \end{aligned} \quad (\text{F.41})$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\frac{b_0^S}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} Q_2[A] &= \frac{b_0^S}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(2)} \int dz z \theta(\Lambda^2 - z) \\
&\times \left[-\frac{2}{2} \frac{F\Lambda^2(\Lambda^2\Psi + 24\phi^2\Lambda^2 F'^2\Psi' + F\Lambda^2\Sigma_1 + (\Psi\Sigma_1 + 12\phi^2\Psi'^2))}{F\Lambda^2(\Psi\Sigma_1 + 12\Psi'^2\phi^2)} \right. \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Lambda^2 - z) \left(\frac{F\Lambda^2\Sigma_1 + (\Psi\Sigma_1 + 12\Psi'^2\phi^2)}{F\Lambda^2(\Psi\Sigma_1 + 12\Psi'^2\phi^2)} \right) \partial_t F \\
&\quad \left. + \frac{24}{2}(\Lambda^2 - z) \left(\frac{F\Lambda^2\phi^2\Psi'}{F\Lambda^2(\Psi\Sigma_1 + 12\Psi'^2\phi^2)} \right) \partial_t F' \right] \\
&= \frac{b_0^S\Lambda^4}{192\pi^2} \left[-6 - \frac{6(\Lambda^2\Psi + 24\phi^2\Lambda^2 F'\Psi' + F\Lambda^2\Sigma_1)}{\Delta} + \left(\frac{\Lambda^2\Sigma_1}{\Delta} + \frac{1}{F} \right) \partial_t F + \left(\frac{24\phi^2\Lambda^2\Psi'}{\Delta} \right) \partial_t F' \right], \tag{F.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b_2^S}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} Q_1[A] &= \frac{b_2^S}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(1)} \int dz \theta(\Lambda^2 - z) \\
&\times \left[-1 - \frac{\Lambda^2\Psi + 24\phi^2\Lambda^2 F'\Psi' + F\Lambda^2\Sigma_1}{\Delta} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\Lambda^2 - z) \left(\frac{\Sigma_1}{\Delta} + \frac{1}{F\Lambda^2} \right) \partial_t F + \frac{24}{2}(\Lambda^2 - z) \left(\frac{\phi^2\Psi'}{\Delta} \right) \partial_t F' \right] \\
&= \frac{b_2^S\Lambda^2}{16\pi^2} \left[-1 - \frac{\Lambda^2\Psi + 24\phi^2\Lambda^2 F'\Psi' + F\Lambda^2\Sigma_1}{\Delta} + \frac{1}{4} \left(\frac{\Lambda^2\Sigma_1}{\Delta} + \frac{1}{F} \right) \partial_t F + \frac{24}{4} \left(\frac{\Lambda^2\phi^2\Psi'}{\Delta} \right) \partial_t F' \right], \tag{F.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b_0^S}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} Q_2[B] &= \frac{b_0^S}{(4\pi)^2} \frac{1}{\Gamma(2)} \int dz z \theta(\Lambda^2 - z) \\
&\times \left[\frac{-\Delta^2 + 4\phi^2(6\Lambda^4 F'^2 + \Psi'^2)\Delta - 4\phi^2\Psi\Psi'(7\Lambda^2 F' - V')(\Sigma_1 - \Lambda^2)}{2\Lambda^2\Delta^2} \right. \\
&\quad + \frac{-4\phi^2\Sigma_1(7\Lambda^2 F' - V')(2\Psi V' - V\Psi') + (-2\Lambda^4\Psi^2 - 48\Lambda^4 F'\phi^2\Psi\Psi' + 24\Lambda^4 F\phi^2\Psi'^2)\Sigma_2}{2\Lambda^2\Delta^2} \\
&\quad + (\Lambda^2 - z) \left(\frac{\Delta^2 + 4\phi^2 V'\Psi'\Delta - 24\Lambda^4 F\phi^2\Psi'^2\Sigma_2 - 4\phi^2\Lambda^2 F\Psi'\Sigma_1(7\Lambda^2 F' - V')}{4F\Lambda^4\Delta^2} \right) \partial_t F \\
&\quad \left. + 4F\Lambda^2(\Lambda^2 - z)\phi^2 \left(\frac{-12\Psi'(7F'\Lambda^2 - V')\phi^2 + (7F'\Lambda^2 - V')\Psi\Sigma_1 + 12\Lambda^2\Psi\Psi'\Sigma_2}{4F\Lambda^4\Delta^2} \right) \partial_t F' \right] \\
&= \frac{b_0^S}{(4\pi)^2} \left[\frac{\Lambda^2 - \Delta^2 + 4\phi^2(6\Lambda^4 F'^2 + \Psi'^2)\Delta - 4\phi^2\Psi\Psi'(7\Lambda^2 F' - V')(\Sigma_1 - \Lambda^2)}{4\Delta^2} \right. \\
&\quad + \frac{\Lambda^2 - 4\phi^2\Sigma_1(7\Lambda^2 F' - V')(2\Psi V' - V\Psi')}{4\Delta^2} \\
&\quad + \frac{\Lambda^2(-2\Lambda^4\Psi^2 - 48\Lambda^4 F'\phi^2\Psi\Psi' + 24\Lambda^4 F\phi^2\Psi'^2)\Sigma_2}{4\Delta^2} \\
&\quad + \frac{\Lambda^2}{24} \left(\frac{\Delta^2 + 4\phi^2 V'\Psi'\Delta - 24\Lambda^4 F\phi^2\Psi'^2\Sigma_2 - 4\phi^2\Lambda^2 F\Psi'\Sigma_1(7\Lambda^2 F' - V')}{F\Delta^2} \right) \partial_t F \\
&\quad \left. + \frac{\Lambda^4}{6}\phi^2 \left(\frac{-12\Psi'(7F'\Lambda^2 - V')\phi^2 + (7F'\Lambda^2 - V')\Psi\Sigma_1 + 12\Lambda^2\Psi\Psi'\Sigma_2}{\Delta^2} \right) \partial_t F' \right]. \tag{F.44}
\end{aligned}$$

ここで $\Psi, \Sigma_1, \Sigma_2, \Delta$ は (5.86) で定義した.

Yukawa 相互作用 Y への寄与は

$$\begin{aligned} \frac{b_0^S}{2(4\pi)^2} Q_2[C] = & \frac{\Lambda^6}{32\pi^2} \left[24 \left(\xi_2 - \frac{\partial_t \xi_2}{6} \right) I[1, 1, 0] - \left(\xi_0 - \frac{\partial_t \xi_0}{6} \right) I[2, 0, 0] \right. \\ & \left. - 12C \left(\xi_0 - \frac{\partial_t \xi_0}{6} \right) I[2, 1, 0] - 12C I[1, 2, 0] \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.45})$$

ここで,

$$I[n_g, n_b, b_f] = \frac{1}{(F\Lambda^2 - V)^{n_g} (\Lambda^2 + 2V' + 4\phi^2 V'')^{n_b} (\Lambda^2 + y^2 \phi^2)^{n_f}} \Big|_{\phi=0}, \quad (\text{F.46})$$

$C = F'\Lambda^2 - V'|_{\phi=0} = \xi_2\Lambda^2 - \lambda_2$ と定義した. 次元のある結合定数のハット記号は省略した. これらの寄与は図 5.5 の (III), (IV), (V) に対応する.

F.2.2 フェルミオンの寄与

(B.15)) 式から

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial \Lambda} \right] \\ & + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial \Lambda} M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{BB}}}{\partial \Lambda} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] \end{aligned} \quad (\text{F.47})$$

と与えられる. 第 1 項目は V, F , 第 2, 第 3 項目は Yukawa 結合定数への寄与となる.

第 1 項目は

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial t} \right] = -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{\text{phys}-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}^{\text{phys}}}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{\text{ghost}-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}^{\text{ghost}}}{\partial t} \right]$$

である.

フェルミオン ψ の寄与

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{\text{phys}-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}^{\text{phys}}}{\partial t} \right] &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \text{Tr} \left[\ln \left(M_{\text{FF}}^{\text{phys}} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \ln \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & -\nabla^T - R_{\Lambda}(\nabla^T) - y\phi \\ \nabla + R_{\Lambda}(\nabla) + y\phi & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_{\Lambda}}{\Gamma_{\Lambda}^{(1,1)} + \mathcal{R}_{\Lambda}} \Big|_{\bar{\chi}\chi} \\
&= -\text{Tr} \frac{(\partial_t \mathcal{R}_{\Lambda}^{(2,1)}) \left(-\frac{\sqrt{P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4})}}{\sqrt{p^2 + \frac{R}{4}}} \nabla + y\phi \right)}{\left(\frac{\sqrt{P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4})}}{\sqrt{p^2 + \frac{R}{4}}} \nabla + y\phi \right) \left(-\frac{\sqrt{P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4})}}{\sqrt{p^2 + \frac{R}{4}}} \nabla + y\phi \right)} \\
&= -\text{Tr} \frac{\left(\frac{\frac{1}{2} \partial_t P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4})}{\sqrt{P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4})} \sqrt{p^2 + \frac{R}{4}}} \nabla \right) \left(-\frac{\sqrt{P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4})}}{\sqrt{p^2 + \frac{R}{4}}} \nabla + y\phi \right)}{\left(\frac{P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4})}{p^2 + \frac{R}{4}} (p^2 + \frac{R}{4}) + y^2 \phi^2 \right)} \\
&= -\text{Tr} \frac{\frac{1}{2} \partial_t P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4})}{P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4}) + y^2 \phi^2} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \frac{\partial_t R_{\Lambda}}{P_{\Lambda}(p^2 + \frac{R}{4}) + y^2 \phi^2} =: -\frac{1}{2} \text{Tr}[W_{\text{f}}] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_0^{\text{f}} Q_2[W_{\text{f}}] \int d^d x \sqrt{g} + b_2^{\text{f}} Q_1[W_{\text{f}}] \int d^d x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(R^2)
\end{aligned} \tag{F.48}$$

途中の計算過程において

$$\begin{aligned}
-\nabla^2 &= -\gamma^{\mu}(x) \gamma^{\nu}(x) \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \\
&= -\frac{1}{2} \{ \gamma^{\mu}, \gamma^{\nu} \} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \frac{1}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] \\
&= -\frac{1}{2} \{ \gamma^{\mu}, \gamma^{\nu} \} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - \frac{1}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \frac{i}{2} \sigma_{ij} R^{ij}{}_{\mu\nu} \\
&= -\nabla^2 + \frac{1}{8} \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= p^2 + \frac{R}{4}
\end{aligned} \tag{F.49}$$

であることを用いた.

$$\begin{aligned}
Q_2[W_{\text{f}}] &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{\infty} dz z \frac{\partial_t P_{\Lambda}}{P_{\Lambda} + y^2 \phi^2} = \int_0^{\Lambda^2} dz z \frac{-2\Lambda^2}{\Lambda^2 + y^2 \phi^2} = \frac{-\Lambda^6}{\Lambda^2 + y^2 \phi^2}, \\
Q_1[W_{\text{f}}] &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\infty} dz \frac{\partial_t P_{\Lambda}}{P_{\Lambda} + y^2 \phi^2} = \int_0^{\Lambda^2} dz \frac{-2\Lambda^2}{\Lambda^2 + y^2 \phi^2} = \frac{-2\Lambda^4}{\Lambda^2 + y^2 \phi^2}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{\text{phys}-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}^{\text{phys}}}{\partial t} \right] &= -\frac{b_0^f}{2(4\pi)^2} \frac{-\Lambda^6}{\Lambda^2 + y^2 \phi^2} \int d^d x \sqrt{g} \\ &\quad - \frac{b_2^f}{2(4\pi)^2} \frac{-2\Lambda^4}{\Lambda^2 + y^2 \phi^2} \int d^d x \sqrt{g} R + \mathcal{O}(R^2). \end{aligned} \quad (\text{F.50})$$

ゴースト場の寄与

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{\text{ghost}-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}^{\text{ghost}}}{\partial t} \right] &= -\frac{1}{2} \frac{\widetilde{\partial}}{\partial t} \text{Tr} \left[\ln \left(M_{\text{FF}}^{\text{ghost}} \right) \right] = -\frac{1}{2} \frac{\widetilde{\partial}}{\partial t} \ln \left(\text{Det} \left[M_{\text{FF}}^{\text{ghost}} \right] \right) \\ &= -\text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\bar{C}^\perp C^\perp} - \text{Tr}' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\bar{C} C}. \end{aligned}$$

- スピン 1 のゴースト場の寄与

$$-\text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{C^\perp C^\perp} = -\text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda - \frac{R}{4}} = -\text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} - \text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} \frac{R}{4} + \mathcal{O}(R^2), \quad (\text{F.51})$$

$$- \mathcal{O}(R^0)$$

$$-\text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_0^{C^\perp} Q_2 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} \right] \int d^4 x \sqrt{g} + b_2^{C^\perp} Q_1 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} \right] \int d^4 x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(R^2), \quad (\text{F.52})$$

$$Q_2 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} \right] = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz z \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} = \int_0^{\Lambda^2} dz z \frac{-2\Lambda^2}{\Lambda^2} = -\Lambda^4, \quad (\text{F.53})$$

$$Q_1 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} \right] = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^\infty dz \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} = \int_0^{\Lambda^2} dz \frac{-2\Lambda^2}{\Lambda^2} = -2\Lambda^2, \quad (\text{F.54})$$

$$- \mathcal{O}(R)$$

$$-\text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} \frac{R}{4} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{b_0^{C^\perp}}{4} Q_2 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} \right] \int d^4 x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(R^2), \quad (\text{F.55})$$

$$Q_2 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} \right] = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz z \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} = \int_0^{\Lambda^2} dz z \frac{-2\Lambda^2}{\Lambda^4} = -\Lambda^2. \quad (\text{F.56})$$

したがって,

$$\begin{aligned} -\text{Tr} \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{C^\perp C^\perp} &= -\frac{b_0^{C^\perp} (-\Lambda^4)}{(4\pi)^2} \int d^4 x \sqrt{g} \\ &\quad - \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_2^{C^\perp} (-2\Lambda^2) + \frac{b_0^{C^\perp}}{4} (-\Lambda^2) \right\} \int d^4 x \sqrt{g} R. \end{aligned} \quad (\text{F.57})$$

- スピン 0 のゴースト場の寄与

$$-\text{Tr}' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\bar{C} C} = -\text{Tr}' \frac{(2 - \frac{1+\beta}{2}) \partial_t R_\Lambda}{(2 - \frac{1+\beta}{2}) P_\Lambda - \frac{R}{2}} = -\text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} - \text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} \frac{R}{3-\beta} + \mathcal{O}(R^2), \quad (\text{F.58})$$

$$- \mathcal{O}(R^0)$$

$$- \text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} = - \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_0^C Q_2 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} \right] \int d^4x \sqrt{g} + b_2^C Q_1 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} \right] \int d^4x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(R^2), \quad (\text{F.59})$$

$$Q_2 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} \right] = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz \, z \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} = \int_0^{\Lambda^2} dz \, z \frac{-2\Lambda^2}{\Lambda^2} = -\Lambda^4, \quad (\text{F.60})$$

$$Q_1 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} \right] = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^\infty dz \, \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda} = \int_0^{\Lambda^2} dz \, \frac{-2\Lambda^2}{\Lambda^2} = -2\Lambda^2, \quad (\text{F.61})$$

$$- \mathcal{O}(R)$$

$$- \text{Tr} \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} \frac{R}{3-\beta} = - \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{b_0^C}{3-\beta} Q_2 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} \right] \int d^4x \sqrt{g} R \right\} + \mathcal{O}(R^2), \quad (\text{F.62})$$

$$Q_2 \left[\frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} \right] = \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^\infty dz \, z \frac{\partial_t R_\Lambda}{P_\Lambda^2} = \int_0^{\Lambda^2} dz \, z \frac{-2\Lambda^2}{\Lambda^4} = -\Lambda^2. \quad (\text{F.63})$$

したがって,

$$\begin{aligned} - \text{Tr}' \frac{\partial_t \mathcal{R}_\Lambda}{\Gamma_\Lambda^{(1,1)} + \mathcal{R}_\Lambda} \Big|_{\bar{C}C} &= - \frac{b_0^C (-\Lambda^4)}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{g} \\ &\quad - \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ b_2^C (-2\Lambda^2) + \frac{b_0^C}{3-\beta} (-\Lambda^2) \right\} \int d^4x \sqrt{g} R. \end{aligned} \quad (\text{F.64})$$

F.2.3 フェルミオンとスカラー場の混合

$$\frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{FF}}}{\partial \Lambda} M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[M_{\text{FF}}^{-1} M_{\text{FB}} M_{\text{BB}}^{-1} \frac{\partial R_{\text{BB}}}{\partial \Lambda} M_{\text{BB}}^{-1} M_{\text{BF}} \right] \quad (\text{F.65})$$

を評価する。これは Yukawa 結合定数への寄与となる。特に図 5.5 の (VI)–(XII) に対応する。(VII) の寄与は de-Donder ゲージでは消えるので無視する。

- (VI) の寄与

$$\begin{aligned} &\text{Tr} \left[\frac{y\phi(-\partial_t R_\Lambda)}{(P_\Lambda + y^2\phi^2)^2(P_\Lambda + M_\phi^2)} + \frac{y\phi(-\partial_t R_\Lambda)}{(P_\Lambda + y^2\phi^2)(P_\Lambda + M_\phi^2)^2} \right] (y\psi)(y\bar{\psi}) \\ &= - \frac{y^2\Lambda^6}{16\pi^2} (I[0, 1, 2] + I[0, 2, 1]) \int d^4x \sqrt{g} Y. \end{aligned} \quad (\text{F.66})$$

- (VIII) と (IX) の寄与

$$\begin{aligned} &\text{Tr} \left[\frac{y\phi(-\partial_t R_\Lambda)}{(P_\Lambda + y^2\phi^2)^2(FP_\Lambda - V)} + \frac{y\phi((\partial_t F)R_\Lambda - F\partial_t R_\Lambda)}{(P_\Lambda + y^2\phi^2)(FP_\Lambda - V)^2} \right] \\ &\quad \times \left(\frac{3}{16} (\gamma^\mu \psi) \partial_\mu \quad \frac{3}{16} (\gamma^\mu \psi) \partial_\mu \right) \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} (\overleftarrow{\partial}_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\nu) \\ -\frac{3}{16} (\overleftarrow{\partial}_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\nu) \end{pmatrix} \\ &= - \frac{\Lambda^8}{128\pi^2} \left[I[1, 0, 2] + \left(\xi_0 - \frac{\partial_t \xi_0}{8} \right) I[2, 0, 1] \right] \int d^4x \sqrt{g} Y \end{aligned} \quad (\text{F.67})$$

ここでの結果は de-Donder ゲージを適用した結果を示した.

- (X) の寄与

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[-\frac{\partial_t R_\Lambda (\sqrt{P_\Lambda} - \frac{P_\Lambda + y^2 \phi^2}{2\sqrt{P_\Lambda}})}{(P_\Lambda + y^2 \phi^2)^2 (FP_\Lambda - V)} + \frac{(\partial_t F R_\Lambda + F \partial_t R_\Lambda) \sqrt{P_\Lambda}}{(P_\Lambda + y^2 \phi^2) (FP_\Lambda - V)^2} \right] \\ & \times \begin{pmatrix} \frac{3}{16} (\gamma^\mu \psi) \partial_\mu & \frac{y}{2} \phi \psi + \frac{3}{16} (\gamma^\mu \psi) \partial_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} (\overleftarrow{\partial}_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\nu) \\ \frac{y}{2} \phi \bar{\psi} - \frac{3}{16} (\overleftarrow{\partial}_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\nu) \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{Projecting to } Y} \frac{3\Lambda^8}{40\pi^2} \left[I[1, 0, 2] + \left(\xi_0 - \frac{\partial_t \xi_0}{7} \right) I[2, 0, 1] - \frac{1}{2\Lambda^2} I[1, 0, 1] \right] \int d^4 x \sqrt{g} Y. \quad (\text{F.68}) \end{aligned}$$

- (XII) と (XIII) の寄与

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[-\frac{\partial_t R_\Lambda (\sqrt{P_\Lambda} - \frac{P_\Lambda + y^2 \phi^2}{2\sqrt{P_\Lambda}}) (F' P_\Lambda - V') \phi}{(P_\Lambda + y^2 \phi^2)^2 (FP_\Lambda - V) \Sigma_1} + \frac{\sqrt{P_\Lambda} (\partial_t R_\Lambda (F' P_\Lambda - V')) \phi}{(P_\Lambda + y^2 \phi^2) (FP_\Lambda - V) \Sigma_1^2} \right. \\ & \left. - \frac{\{[(\partial_t F') (FP_\Lambda - V) + (\partial_t F) (F' P_\Lambda - V')] R_\Lambda + (FV' - VF') \partial_t R_\Lambda\} \sqrt{P_\Lambda} \phi}{(P_\Lambda + y^2 \phi^2) (FP_\Lambda - V)^2 \Sigma_1} \right] \\ & \times \begin{pmatrix} \frac{3}{16} (\gamma^\mu \psi) \partial_\mu & \frac{3}{16} (\gamma^\mu \psi) \partial_\mu & y\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# & 4 \\ \# & \# & -12 \\ 4 & -12 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{16} (\overleftarrow{\partial}_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\nu) \\ -\frac{3}{16} (\overleftarrow{\partial}_\nu) (\bar{\psi} \gamma^\nu) \\ y\bar{\psi} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{Projecting to } Y} -\frac{3\Lambda^8}{20\pi^2} \left[-\left(\xi_0 - \frac{\partial_t \xi_0}{7} \right) CI[2, 1, 1] + \left(\xi_2 - \frac{\partial_t \xi_2}{7} \right) I[1, 1, 1] \right. \\ & \left. - C \left(I[1, 2, 1] + I[1, 1, 2] - \frac{1}{2\Lambda^2} I[1, 1, 1] \right) \right] \int d^4 x \sqrt{g} Y. \quad (\text{F.69}) \end{aligned}$$

以上の計算で V , F , y のベータ関数はそれぞれ $\int d^4 x \sqrt{g}$, $\int d^4 x \sqrt{g} R$, $\int d^4 x \phi \bar{\psi} \psi = \int d^4 x Y/y$ の係数として与えられる. その結果が (5.84), (5.85), (5.95) である.

付録 G

熱効果

G.1 熱効果関数

有限温度における 1 ループ積分の評価を行う．一般にループ積分は

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \log(k^2 + \mu^2) \quad (\text{G.1})$$

と与えられる．ボソンとフェルミオンのそれぞれの場合についてこの関数を以下で評価する．

G.1.1 ボソンの熱効果関数

付録 E で与えた有限温度での定式化を用いると時間方向の運動量積分が松原和に変更される．したがって、ループ効果の積分はユークリッド化を $k_0 \rightarrow ik_0$ のように行うと

$$\begin{aligned} I^B(\mu^2, T) &:= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \log(k^2 + \mu^2) \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \log(k_0^2 + \vec{k}^2 + \mu^2) \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \log[T^2] \left[(2\pi n)^2 + \beta^2(\vec{k}^2 + \mu^2) \right] \\ &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2\pi n)^2} + \log(1 + (2\pi n)^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

ここで、ボソンは周期的な和になることを用いた。また、 $\omega := \vec{k}^2 + \mu^2$, $\beta := 1/T$ とおいた。第 2 項目は温度によらない定数であるから無視すると

$$\begin{aligned}
 I^B(\mu^2, T) &= T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\theta/2\pi)^2 + n^2} \right] \\
 &= T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \frac{2\pi^2}{\theta} \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right) \right] \\
 &= T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\int_1^{\beta \omega} d\theta \left(1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right) \right] \\
 &\rightarrow T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} [\beta \omega + 2 \log(1 - e^{-\beta \omega})].
 \end{aligned} \tag{G.3}$$

最後の行でも温度によらない定数は無視したため、矢印で書いた。

まず、(G.3) の第 1 項目は

$$I_0^B(\mu^2) := \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \omega = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \log(k^2 + \mu^2) \tag{G.4}$$

となり、温度によらないの寄与であることがわかる。^{*1}

次に、(G.3) の第 2 項を評価する：

$$\begin{aligned}
 I_T^B(\mu^2, T) &:= 2T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \log(1 - e^{-\beta \omega}) \\
 &= 2T \Omega_{d-1} \int dk (\vec{k})^{d-2} \log(1 - e^{-\beta \omega}) \\
 &= -2T \Omega_{d-1} \int dk \frac{|\vec{k}|^{d-1}}{d-1} \frac{|\vec{k}|}{\omega} \frac{\beta}{e^{\beta \omega} - 1} \\
 &= -2T \frac{\Omega_{d-1}}{d-1} \int dk \frac{|\vec{k}|^d}{\beta \omega} \frac{\beta^2}{e^{\beta \omega} - 1} \\
 &= -2 \frac{\Omega_{d-1}}{d-1} \int dx \frac{T^d x^d}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} - 1} \\
 &= -2 \frac{\Omega_{d-1}}{d-1} T^d \int dx \frac{x^d}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} - 1} \\
 &=: A_d T^d h_n(r^2).
 \end{aligned} \tag{G.5}$$

ここで、 Ω_{d-1} は $d-1$ 次元の体積であり、 $A_d := -2\Omega_{d-1}\Gamma[n]/(d-1)$, $x := \beta|\vec{p}|$, $r := \beta\mu$, $n = d+1$ とおいた。 $\Gamma[n]$ はガンマ関数である。そして、

$$h_n(r^2) := \frac{1}{\Gamma[n]} \int dx \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} - 1} \tag{G.6}$$

と定義した。この量は熱効果関数と呼び、解析的に積分を行うのは困難なため、数値的もしくは高温の場合での近似式を用いて評価される。

^{*1} ここでは運動量はユークリッド化されていることに注意せよ。

G.1.2 フェルミオンの熱効果関数

フェルミオンは松原和が半周期的になることを用いて計算する.

$$\begin{aligned}
 I^F(\mu^2, T) &:= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \log(k^2 + \mu^2) \\
 &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \log(k_0^2 + \vec{k}^2 + \mu^2) \\
 &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \log[T^2] \left[(2n+1)^2 \pi^2 + \beta^2 (\vec{k}^2 + \mu^2) \right] \\
 &= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + (2n+1)^2 \pi^2} + \log(1 + (2n+1)^2 \pi^2) \right]. \quad (G.7)
 \end{aligned}$$

ここでの運動量はユークリッド化されたものである. また, $\omega = \vec{k}^2 + \mu^2$ とした. 温度によらない項を無視して,

$$\begin{aligned}
 I^F(\mu^2, T) &= T \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + \theta^2} \right] \\
 &= T \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\int_1^{\beta^2 \omega^2} \frac{d\theta^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^\theta + 1} \right) \right] \\
 &= T \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \left[\int_1^{\beta \omega} d\theta \left(1 + \frac{2}{e^\theta + 1} \right) \right] \\
 &\rightarrow T \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} [\beta \omega + 2 \log(1 + e^{-\beta \omega})] \quad (G.8)
 \end{aligned}$$

$$=: I_0^F(\mu^2) + I_T^F(\mu^2, T). \quad (G.9)$$

$I_0^F(\mu^2)$ はゼロ温度の寄与であり, ボソンの場合と同じ結果を与える:

$$I_0^F(\mu^2) = I_0^B(\mu^2) = \int \frac{d^{d-1} p}{(2\pi)^{d-1}} \omega = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \log(p^2 + M^2). \quad (G.10)$$

次に、有限温度の寄与は

$$\begin{aligned}
I_T^F(\mu^2, T) &= 2T \int \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \log(1 + e^{-\beta\omega}) \\
&= 2T\Omega_{d-1} \int dk \vec{k}^{d-2} \log(1 + e^{-\beta\omega}) \\
&= 2T\Omega_{d-1} \int dk \frac{|\vec{k}|^{d-1}}{d-1} \frac{|\vec{k}|}{\omega} \frac{\beta}{e^{\beta\omega} + 1} \\
&= 2T \frac{\Omega_{d-1}}{d-1} \int dk \frac{|\vec{k}|^d}{\beta\omega} \frac{\beta^2}{e^{\beta\omega} + 1} \\
&= 2 \frac{\Omega_{d-1}}{d-1} \int dx \frac{T^d x^d}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} + 1} \\
&= 2 \frac{\Omega_{d-1}}{d-1} T^d \int dx \frac{x^d}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} + 1} \\
&=: -A_d T^d f_n(r).
\end{aligned} \tag{G.11}$$

ここで、 $x := \beta|\vec{k}|$, $r := \beta\mu$, また、 $n = d + 1$ として、

$$A_d := -\frac{2\Omega_{d-1}\Gamma[n]}{d-1}, \tag{G.12}$$

$$f_n(r^2) := \frac{1}{\Gamma[n]} \int dx \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} + 1} \tag{G.13}$$

と定義した。これがフェルミオンの熱効果関数である。

G.1.3 高温近似

ボソンとフェルミオンの熱効果関数は次のように与えられることを見た。^{*2}

- ボソン

$$I_T^B(\mu^2, T) =: A_d T^d h_n(r^2), \tag{G.14}$$

$$\begin{aligned}
A_d &= -\frac{2\Omega_{d-1}\Gamma[n]}{d-1}, \\
h_n(r^2) &= \frac{1}{\Gamma[n]} \int dx \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} - 1}.
\end{aligned} \tag{G.15}$$

- フェルミオン

$$I_T^F(\mu^2, T) = -A_d T^d f_n(r^2), \tag{G.16}$$

^{*2} この熱効果関数の $A_d h_n(r^2)$ および $-A_d f_n(r^2)$ は部分積分によって、

$$\begin{aligned}
J_B(r^2) &= \int_0^\infty dx x^2 \log\left(1 - e^{-\sqrt{x^2 + r^2}}\right), \\
J_F(r^2) &= \int_0^\infty dx x^2 \log\left(1 + e^{-\sqrt{x^2 + r^2}}\right)
\end{aligned}$$

と書くこともできる。

$$A_d = -\frac{2\Omega_{d-1}\Gamma[n]}{d-1},$$

$$f_n(r^2) = \frac{1}{\Gamma[n]} \int dx \frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2 + r^2}} \frac{1}{e^{\sqrt{x^2 + r^2}} + 1}. \quad (\text{G.17})$$

ただし, $x := \beta|\vec{k}|$, $r := \beta\mu$ である.

今, $d = 4$ における熱効果関数を高温近似 ($r = \beta\mu < 1$) の下で評価する.

- ボソン [372]

$$A_4 = -\frac{2}{6\Gamma[5]\pi^2} = -\frac{8}{\pi^2}, \quad (\text{G.18})$$

$$h_5\left(\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right) = \frac{\pi^4}{360} - \frac{\pi\mu^3}{48T^3} + \frac{\pi^2\mu^2}{96T^2} - \frac{\mu^4}{128T^4} \left[\log\left(\frac{4\pi T}{\mu}\right) - \gamma_E + \frac{3}{4} \right] + \dots \quad (\text{G.19})$$

となる. したがって, $I_T^B(\mu^2, T)$ は

$$I_T^B(\mu^2, T) = -\frac{\pi^2}{45}T^4 + \frac{\mu^2T^2}{12} - \frac{\mu^3T}{6\pi} + \frac{\mu^4}{16\pi^2} \left[\log\left(\frac{4\pi T}{\mu}\right) - \gamma_E + \frac{3}{4} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{\mu^6}{T^2}\right)$$

$$=: T^4 J_B(r^2) \quad (\text{G.20})$$

- フェルミオン [373]

$$A_4 = -\frac{2}{6\Gamma[5]\pi^2} = -\frac{8}{\pi^2}, \quad (\text{G.21})$$

$$f_5\left(\left(\frac{\mu}{T}\right)^2\right) = \frac{7\pi^4}{2880} - \frac{\pi^2\mu^2}{192T^2} + \frac{\pi^2\mu^4}{128T^4} \left[\log\left(\frac{\pi T}{\mu}\right) - \gamma_E + \frac{3}{4} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{\mu^6}{T^2}\right) \quad (\text{G.22})$$

となる. したがって, $I_T^F(\mu^2, T)$ は

$$I_T^F(\mu^2, T) = \frac{7\pi^4}{360}T^4 - \frac{\pi^2\mu^2}{24}T^2 + \frac{\mu^4}{16} \left[\log\left(\frac{\pi T}{\mu}\right) - \gamma_E + \frac{3}{4} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{\mu^6}{T^2}\right)$$

$$=: T^4 J_F(r^2) \quad (\text{G.23})$$

となる.

G.1.4 近似の妥当性

高温近似はよく用いられるが $r = \beta\mu \gtrsim 1$ 領域では近似が破綻してしまうと考えられる. したがって, 本論文では次のフィッティング関数 [374] を用いた.

$$J_{B(F)}(r^2) \simeq \exp(-r) \sum_{n=0}^N c_n^{B(F)} r^n, \quad \text{with } N = 40. \quad (\text{G.24})$$

このフィッティング関数の場合と高温近似を用いた場合を数値的に熱効果関数を積分した場合の結果と比べる. 図 G.1 にそれぞれの振る舞いを示す. 高温近似 (high temperature expansion) は $r = \beta\mu \lesssim 2$ までであれば有効であることがわかる (図 G.2). フィッティング関数を用いた場合 (fitting function) は

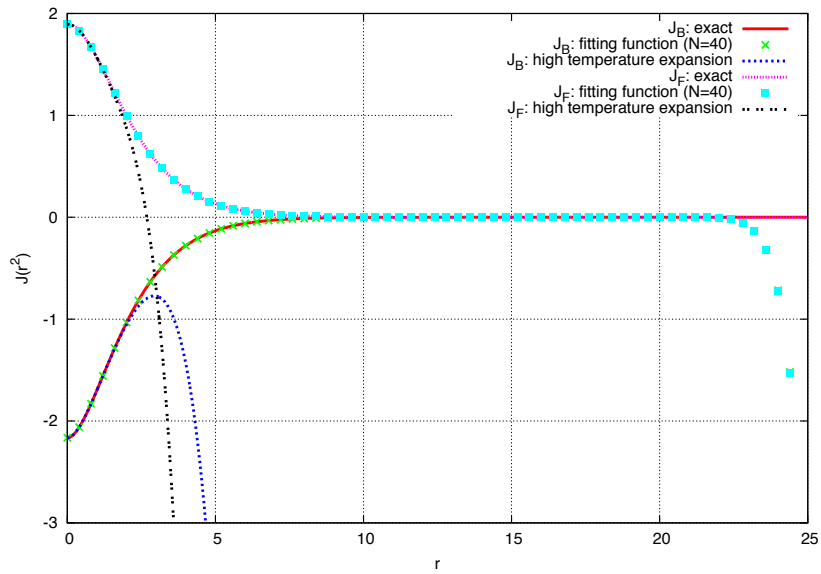


図 G.1 熱効果関数の評価.

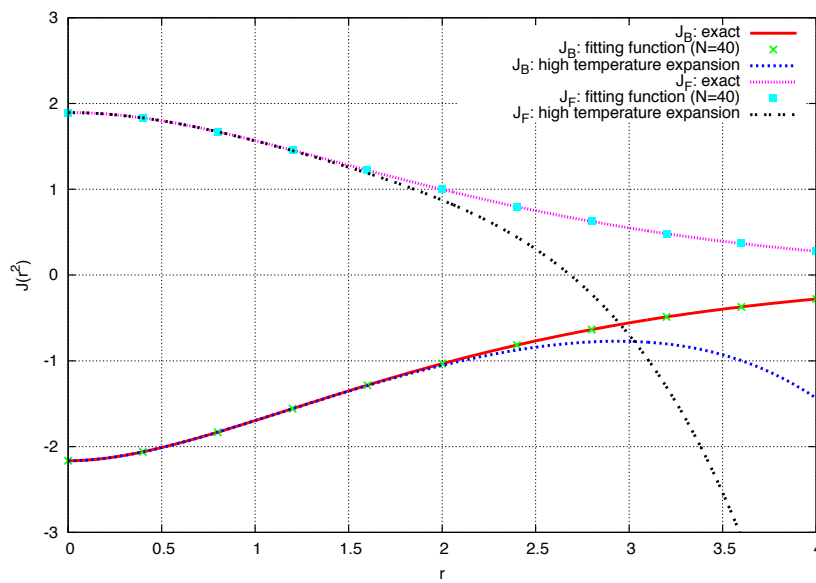


図 G.2 熱効果関数の評価. 原点付近の拡大.

数値的に評価した場合 (exact) とよく一致している. しかし, r が大きくなるとフィッティング関数は数値的な結果からずれてしまう (図 G.1). これはベキ展開のトランケーションのオーダー N を大きくすれば改善される.

参考文献

- [1] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961), 579–588.
- [2] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1264–1266.
- [3] ATLAS, G. Aad et al., *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. **B716** (2012), 1–29, 1207.7214.
- [4] CMS, S. Chatrchyan et al., *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys. Lett. **B716** (2012), 30–61, 1207.7235.
- [5] Particle Data Group, K. A. Olive et al., *Review of Particle Physics*, Chin. Phys. **C38** (2014), 090001.
- [6] Super-Kamiokande, Y. Fukuda et al., *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 1562–1567, hep-ex/9807003.
- [7] SNO, Q. R. Ahmad et al., *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 011301, nucl-ex/0204008.
- [8] KamLAND, T. Araki et al., *Measurement of neutrino oscillation with KamLAND: Evidence of spectral distortion*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 081801, hep-ex/0406035.
- [9] MINOS, P. Adamson et al., *Measurement of Neutrino Oscillations with the MINOS Detectors in the NuMI Beam*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008), 131802, 0806.2237.
- [10] K. G. Begeman, A. H. Broeils, and R. H. Sanders, *Extended rotation curves of spiral galaxies: Dark haloes and modified dynamics*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **249** (1991), 523.
- [11] R. Massey et al., *Dark matter maps reveal cosmic scaffolding*, Nature **445** (2007), 286, astro-ph/0701594.
- [12] Planck, P. A. R. Ade et al., *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, (2015), 1502.01589.
- [13] K. G. Wilson and J. B. Kogut, *The Renormalization group and the epsilon expansion*, Phys. Rept. **12** (1974), 75–200.
- [14] K. G. Wilson, *The Renormalization Group: Critical Phenomena and the Kondo Problem*, Rev. Mod. Phys. **47** (1975), 773.
- [15] F. J. Wegner and A. Houghton, *Renormalization group equation for critical phenomena*, Phys. Rev. **A8** (1973), 401–412.
- [16] J. Polchinski, *Renormalization and Effective Lagrangians*, Nucl. Phys. **B231** (1984), 269–295.
- [17] J.-I. Sumi, W. Souma, K.-I. Aoki, H. Terao, and K. Morikawa, *Scheme dependence*

- of the Wilsonian effective action and sharp cutoff limit of the flow equation*, (2000), [hep-th/0002231](#).
- [18] T. R. Hurd, *A Renormalization Group Proof of Perturbative Renormalizability*, Commun. Math. Phys. **124** (1989), 153–168.
 - [19] G. Keller, C. Kopper, and M. Salmhofer, *Perturbative renormalization and effective Lagrangians in ϕ^4 in four-dimensions*, Helv. Phys. Acta **65** (1992), 32–52.
 - [20] G. Keller and C. Kopper, *Perturbative renormalization of QED via flow equations*, Phys. Lett. **B273** (1991), 323–332.
 - [21] G. Keller and G. Kopper, *Renormalizability proof for QED based on flow equations*, Commun. Math. Phys. **176** (1996), 193–226.
 - [22] C. Wetterich, *Average Action and the Renormalization Group Equations*, Nucl.Phys. **B352** (1991), 529–584.
 - [23] C. Wetterich, *Exact evolution equation for the effective potential*, Phys.Lett. **B301** (1993), 90–94.
 - [24] T. R. Morris, *The Exact renormalization group and approximate solutions*, Int.J.Mod.Phys. **A9** (1994), 2411–2450, [hep-ph/9308265](#).
 - [25] T. E. Clark, B. Haeri, and S. T. Love, *Wilson renormalization group analysis of theories with scalars and fermions*, Nucl. Phys. **B402** (1993), 628–656, [hep-ph/9211261](#).
 - [26] K. Aoki, *Introduction to the nonperturbative renormalization group and its recent applications*, Int.J.Mod.Phys. **B14** (2000), 1249–1326.
 - [27] J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, *Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics*, Phys. Rept. **363** (2002), 223–386, [hep-ph/0005122](#).
 - [28] C. Bagnuls and C. Bervillier, *Exact renormalization group equations. An Introductory review*, Phys. Rept. **348** (2001), 91, [hep-th/0002034](#).
 - [29] J. M. Pawłowski, *Aspects of the functional renormalisation group*, Annals Phys. **322** (2007), 2831–2915, [hep-th/0512261](#).
 - [30] H. Gies, *Introduction to the functional RG and applications to gauge theories*, Lect.Notes Phys. **852** (2012), 287–348, [hep-ph/0611146](#).
 - [31] O. J. Rosten, *Fundamentals of the Exact Renormalization Group*, Phys. Rept. **511** (2012), 177–272, 1003.1366.
 - [32] P. Kopietz, L. Bartosch, and F. Schutz, *Introduction to the functional renormalization group*, Lect. Notes Phys. **798** (2010), 1–380.
 - [33] T. R. Morris, *Momentum scale expansion of sharp cutoff flow equations*, Nucl. Phys. **B458** (1996), 477–503, [hep-th/9508017](#).
 - [34] D. F. Litim, *Optimized renormalization group flows*, Phys.Rev. **D64** (2001), 105007, [hep-th/0103195](#).
 - [35] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, *Non-perturbative thermal flows and resummations*, JHEP **11** (2006), 026, [hep-th/0609122](#).
 - [36] K. Kamikado and T. Kanazawa, *Chiral dynamics in a magnetic field from the functional*

- renormalization group*, JHEP **03** (2014), 009, 1312.3124.
- [37] J. P. Blaizot, R. Mendez Galain, and N. Wschebor, *A New method to solve the non perturbative renormalization group equations*, Phys. Lett. **B632** (2006), 571–578, hep-th/0503103.
 - [38] J.-P. Blaizot, J. M. Pawłowski, and U. Reinosa, *Exact renormalization group and Φ -derivable approximations*, Phys. Lett. **B696** (2011), 523–528, 1009.6048.
 - [39] A. Hasenfratz and P. Hasenfratz, *Renormalization Group Study of Scalar Field Theories*, Nucl. Phys. **B270** (1986), 687–701, [Helv. Phys. Acta59,833(1986)].
 - [40] T. R. Morris, *On truncations of the exact renormalization group*, Phys. Lett. **B334** (1994), 355–362, hep-th/9405190.
 - [41] K.-I. Aoki, K.-i. Morikawa, W. Souma, J.-i. Sumi, and H. Terao, *The Effectiveness of the local potential approximation in the Wegner-Houghton renormalization group*, Prog. Theor. Phys. **95** (1996), 409–420, hep-ph/9612458.
 - [42] K.-I. Aoki, K. Morikawa, W. Souma, J.-I. Sumi, and H. Terao, *Rapidly converging truncation scheme of the exact renormalization group*, Prog. Theor. Phys. **99** (1998), 451–466, hep-th/9803056.
 - [43] T. R. Morris and J. F. Tighe, *Convergence of derivative expansions of the renormalization group*, JHEP **08** (1999), 007, hep-th/9906166.
 - [44] G. Papp, B. J. Schaefer, H. J. Pirner, and J. Wambach, *On the convergence of the expansion of renormalization group flow equation*, Phys. Rev. **D61** (2000), 096002, hep-ph/9909246.
 - [45] T. R. Morris and J. F. Tighe, *Convergence of derivative expansions in scalar field theory*, Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001), 2095–2100, hep-th/0102027.
 - [46] L. F. Abbott, *The Background Field Method Beyond One Loop*, Nucl. Phys. **B185** (1981), 189.
 - [47] L. F. Abbott, *Introduction to the Background Field Method*, Acta Phys. Polon. **B13** (1982), 33.
 - [48] M. Reuter and C. Wetterich, *Gluon condensation in nonperturbative flow equations*, Phys. Rev. **D56** (1997), 7893–7916, hep-th/9708051.
 - [49] H. Gies, *Running coupling in Yang-Mills theory: A flow equation study*, Phys. Rev. **D66** (2002), 025006, hep-th/0202207.
 - [50] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, *Completeness and consistency of renormalisation group flows*, Phys. Rev. **D66** (2002), 025030, hep-th/0202188.
 - [51] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, *Wilsonian flows and background fields*, Phys. Lett. **B546** (2002), 279–286, hep-th/0208216.
 - [52] H. Gies and J. Jaeckel, *Renormalization flow of QED*, Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 110405, hep-ph/0405183.
 - [53] S.-B. Liao, *On connection between momentum cutoff and the proper time regularizations*, Phys. Rev. **D53** (1996), 2020–2036, hep-th/9501124.
 - [54] S.-B. Liao, *Operator cutoff regularization and renormalization group in Yang-Mills theory*, Phys. Rev. **D56** (1997), 5008–5033, hep-th/9511046.

- [55] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, *Predictive power of renormalization group flows: A Comparison*, Phys. Lett. **B516** (2001), 197–207, [hep-th/0107020](#).
- [56] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, *Perturbation theory and renormalization group equations*, Phys. Rev. **D65** (2002), 081701, [hep-th/0111191](#).
- [57] M. Reuter and C. Wetterich, *Effective average action for gauge theories and exact evolution equations*, Nucl. Phys. **B417** (1994), 181–214.
- [58] B. Bergerhoff, D. Litim, S. Lola, and C. Wetterich, *Phase transition of N component superconductors*, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996), 4273–4306, [cond-mat/9502039](#).
- [59] B. Bergerhoff, F. Freire, D. Litim, S. Lola, and C. Wetterich, *Phase diagram of superconductors*, Phys. Rev. **B53** (1996), 5734–5757, [hep-ph/9503334](#).
- [60] M. Reuter, *Nonperturbative evolution equation for quantum gravity*, Phys. Rev. **D57** (1998), 971–985, [hep-th/9605030](#).
- [61] B.-J. Schaefer and H.-J. Pirner, *Renormalization group flow and equation of state of quarks and mesons*, Nucl. Phys. **A660** (1999), 439–474, [nucl-th/9903003](#).
- [62] F. Freire and D. F. Litim, *Charge crossover at the $U(1)$ Higgs phase transition*, Phys. Rev. **D64** (2001), 045014, [hep-ph/0002153](#).
- [63] O. Bohr, B. J. Schaefer, and J. Wambach, *Renormalization group flow equations and the phase transition in $O(N)$ models*, Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001), 3823–3852, [hep-ph/0007098](#).
- [64] D. F. Litim, *Derivative expansion and renormalization group flows*, JHEP **11** (2001), 059, [hep-th/0111159](#).
- [65] M. Reuter and C. Wetterich, *Average action for the Higgs model with Abelian gauge symmetry*, Nucl. Phys. **B391** (1993), 147–175.
- [66] M. Bonini, M. D’Attanasio, and G. Marchesini, *Ward identities and Wilson renormalization group for QED*, Nucl. Phys. **B418** (1994), 81–112, [hep-th/9307174](#).
- [67] M. Bonini, M. D’Attanasio, and G. Marchesini, *Renormalization group flow for $SU(2)$ Yang-Mills theory and gauge invariance*, Nucl. Phys. **B421** (1994), 429–455, [hep-th/9312114](#).
- [68] M. Bonini, M. D’Attanasio, and G. Marchesini, *BRS symmetry from renormalization group flow*, Phys. Lett. **B346** (1995), 87–93, [hep-th/9412195](#).
- [69] M. Bonini, M. D’Attanasio, and G. Marchesini, *BRS symmetry for Yang-Mills theory with exact renormalization group*, Nucl. Phys. **B437** (1995), 163–186, [hep-th/9410138](#).
- [70] U. Ellwanger, *Flow equations and BRS invariance for Yang-Mills theories*, Phys. Lett. **B335** (1994), 364–370, [hep-th/9402077](#).
- [71] U. Ellwanger, M. Hirsch, and A. Weber, *Flow equations for the relevant part of the pure Yang-Mills action*, Z. Phys. **C69** (1996), 687–698, [hep-th/9506019](#).
- [72] U. Ellwanger, M. Hirsch, and A. Weber, *The Heavy quark potential from Wilson’s exact renormalization group*, Eur. Phys. J. **C1** (1998), 563–578, [hep-ph/9606468](#).
- [73] F. Freire and C. Wetterich, *The Ward identity from the background field dependence of the effective action*, Phys. Lett. **B380** (1996), 337–340, [hep-th/9601081](#).
- [74] M. D’Attanasio and T. R. Morris, *Gauge invariance, the quantum action principle, and the*

- renormalization group*, Phys. Lett. **B378** (1996), 213–221, hep-th/9602156.
- [75] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, *Flow equations for Yang-Mills theories in general axial gauges*, Phys. Lett. **B435** (1998), 181–188, hep-th/9802064.
- [76] T. R. Morris, *A Gauge invariant exact renormalization group. 1.*, Nucl. Phys. **B573** (2000), 97–126, hep-th/9910058.
- [77] T. R. Morris, *A Gauge invariant exact renormalization group. 2.*, JHEP **12** (2000), 012, hep-th/0006064.
- [78] F. Freire, D. F. Litim, and J. M. Pawłowski, *Gauge invariance and background field formalism in the exact renormalization group*, Phys. Lett. **B495** (2000), 256–262, hep-th/0009110.
- [79] D. F. Litim and J. M. Pawłowski, *Renormalization group flows for gauge theories in axial gauges*, JHEP **09** (2002), 049, hep-th/0203005.
- [80] S. Arnone, Y. A. Kubyshin, T. R. Morris, and J. F. Tighe, *Gauge invariant regularization via $SU(N-N)$* , Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002), 2283–2330, hep-th/0106258.
- [81] S. Arnone, A. Gatti, and T. R. Morris, *Towards a manifestly gauge invariant and universal calculus for Yang-Mills theory*, Acta Phys. Slov. **52** (2002), 621–634, hep-th/0209130.
- [82] S. Arnone, A. Gatti, and T. R. Morris, *A Proposal for a manifestly gauge invariant and universal calculus in Yang-Mills theory*, Phys. Rev. **D67** (2003), 085003, hep-th/0209162.
- [83] S. Arnone, T. R. Morris, and O. J. Rosten, *Manifestly gauge invariant QED*, JHEP **10** (2005), 115, hep-th/0505169.
- [84] S. Arnone, T. R. Morris, and O. J. Rosten, *A Generalised manifestly gauge invariant exact renormalisation group for $SU(N)$ Yang-Mills*, Eur. Phys. J. **C50** (2007), 467–504, hep-th/0507154.
- [85] T. R. Morris and O. J. Rosten, *A Manifestly gauge invariant, continuum calculation of the $SU(N)$ Yang-Mills two-loop beta function*, Phys. Rev. **D73** (2006), 065003, hep-th/0508026.
- [86] T. R. Morris and O. J. Rosten, *Manifestly gauge invariant QCD*, J. Phys. **A39** (2006), 11657–11681, hep-th/0606189.
- [87] M. Reuter, *Effective average actions and nonperturbative evolution equations*, in *5th Hellenic School and Workshops on Elementary Particle Physics (CORFU 1995) Corfu, Greece, September 3-24, 1995*, 1996.
- [88] G. S. Bali, *QCD forces and heavy quark bound states*, Phys. Rept. **343** (2001), 1–136, hep-ph/0001312.
- [89] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *QCD phenomenology based on a chiral effective Lagrangian*, Phys. Rept. **247** (1994), 221–367, hep-ph/9401310.
- [90] C. D. Roberts and A. G. Williams, *Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics*, Prog. Part. Nucl. Phys. **33** (1994), 477–575, hep-ph/9403224.
- [91] S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation*, Phys. Rev. **182** (1969), 1517–1536.
- [92] C. Vafa and E. Witten, *Restrictions on Symmetry Breaking in Vector-Like Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B234** (1984), 173.

- [93] C. Vafa and E. Witten, *Parity Conservation in QCD*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 535.
- [94] Y. Nambu, *Quasiparticles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity*, Phys. Rev. **117** (1960), 648–663.
- [95] J. Goldstone, *Field Theories with Superconductor Solutions*, Nuovo Cim. **19** (1961), 154–164.
- [96] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. 1.*, Phys. Rev. **122** (1961), 345–358.
- [97] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *DYNAMICAL MODEL OF ELEMENTARY PARTICLES BASED ON AN ANALOGY WITH SUPERCONDUCTIVITY. II*, Phys. Rev. **124** (1961), 246–254.
- [98] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Chiral symmetry and eta-x mixing*, Prog. Theor. Phys. **44** (1970), 1422–1424.
- [99] M. Kobayashi, H. Kondo, and T. Maskawa, *Symmetry breaking of the chiral $u(3) \times u(3)$ and the quark model*, Prog. Theor. Phys. **45** (1971), 1955–1959.
- [100] G. 't Hooft, *Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle*, Phys. Rev. **D14** (1976), 3432–3450, [Erratum: Phys. Rev.D18,2199(1978)].
- [101] G. 't Hooft, *How Instantons Solve the $U(1)$ Problem*, Phys. Rept. **142** (1986), 357–387.
- [102] K.-I. Aoki, K. Morikawa, J.-I. Sumi, H. Terao, and M. Tomoyose, *Wilson renormalization group equations for the critical dynamics of chiral symmetry*, Prog.Theor.Phys. **102** (1999), 1151–1162, hep-th/9908042.
- [103] H. Kodama and J.-I. Sumi, *Application of nonperturbative renormalization group to Nambu-Jona-Lasinio / Gross-Neveu model at finite temperature and chemical potential*, Prog. Theor. Phys. **103** (2000), 393, hep-th/9912215.
- [104] J. Braun, *Fermion Interactions and Universal Behavior in Strongly Interacting Theories*, J.Phys. **G39** (2012), 033001, 1108.4449.
- [105] J. Braun and A. Janot, *Dynamical Locking of the Chiral and the Deconfinement Phase Transition in QCD*, Phys.Rev. **D84** (2011), 114022, 1102.4841.
- [106] J. Braun and T. K. Herbst, *On the Relation of the Deconfinement and the Chiral Phase Transition in Gauge Theories with Fundamental and Adjoint Matter*, (2012), 1205.0779.
- [107] A. Jakovac and A. Patkos, *Local potential approximation for the renormalization group flow of fermionic field theories*, Phys. Rev. **D88** (2013), 065008, 1306.2660.
- [108] A. Jakovác, A. Patkós, and P. Pósfay, *Non-Gaussian fixed points in fermionic field theories without auxiliary Bose-fields*, Eur. Phys. J. **C75** (2015), no. 1, 2, 1406.3195.
- [109] K.-I. Aoki and M. Yamada, *The RG flow of Nambu–Jona-Lasinio model at finite temperature and density*, Int. J. Mod. Phys. **A30** (2015), no. 27, 1550180, 1504.00749.
- [110] J. Hubbard, *Calculation of partition functions*, Phys. Rev. Lett. **3** (1959), 77–80.
- [111] R. L. Stratonovich, *On a Method of Calculating Quantum Distribution Functions*, Soviet Physics Doklady **2** (1957), 416.
- [112] K.-I. Aoki, K. Morikawa, J.-I. Sumi, H. Terao, and M. Tomoyose, *Analysis of the Wilsonian effective potentials in dynamical chiral symmetry breaking*, Phys.Rev. **D61** (2000), 045008,

- hep-th/9908043.
- [113] H. Gies and C. Wetterich, *Renormalization flow of bound states*, Phys.Rev. **D65** (2002), 065001, hep-th/0107221.
 - [114] H. Gies and C. Wetterich, *Universality of spontaneous chiral symmetry breaking in gauge theories*, Phys.Rev. **D69** (2004), 025001, hep-th/0209183.
 - [115] S. Floerchinger and C. Wetterich, *Exact flow equation for composite operators*, Phys. Lett. **B680** (2009), 371–376, 0905.0915.
 - [116] J. Braun, L. Fister, J. M. Pawłowski, and F. Rennecke, *From Quarks and Gluons to Hadrons: Chiral Symmetry Breaking in Dynamical QCD*, (2014), 1412.1045.
 - [117] J. Braun, *The QCD Phase Boundary from Quark-Gluon Dynamics*, Eur. Phys. J. **C64** (2009), 459–482, 0810.1727.
 - [118] M. Mitter, J. M. Pawłowski, and N. Strodthoff, *Chiral symmetry breaking in continuum QCD*, Phys.Rev. **D91** (2015), 054035, 1411.7978.
 - [119] F. Rennecke, *Vacuum structure of vector mesons in QCD*, Phys. Rev. **D92** (2015), no. 7, 076012, 1504.03585.
 - [120] W.-j. Fu and J. M. Pawłowski, *On the relevance of matter and glue dynamics for baryon number fluctuations*, (2015), 1508.06504.
 - [121] K.-I. Aoki and K. Miyashita, *Evaluation of the spontaneous chiral symmetry breaking scale in general gauge theories with non-perturbative renormalization group*, Prog. Theor. Phys. **121** (2009), 875–884.
 - [122] K.-I. Aoki and D. Sato, *Solving the QCD non-perturbative flow equation as a partial differential equation and its application to the dynamical chiral symmetry breaking*, PTEP **2013** (2013), 043B04, 1212.0063.
 - [123] K.-I. Aoki, S.-I. Kumamoto, and D. Sato, *Weak solution of the non-perturbative renormalization group equation to describe dynamical chiral symmetry breaking*, PTEP **2014** (2014), no. 4, 043B05, 1403.0174.
 - [124] 熊本真一郎, *非摂動くりこみ群方程式の弱解によるカイラル対称性の自発的破れの解析* (博士論文), (2014).
 - [125] H. P. Nilles, *Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics*, Phys. Rept. **110** (1984), 1–162.
 - [126] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Series in Physics, Princeton Univ Pr, 1992.
 - [127] M. J. G. Veltman, *The Infrared - Ultraviolet Connection*, Acta Phys. Polon. **B12** (1981), 437.
 - [128] W. A. Bardeen, *On naturalness in the standard model*, in *Ontake Summer Institute on Particle Physics Ontake Mountain, Japan, August 27-September 2, 1995*, 1995.
 - [129] H. Aoki and S. Iso, *Revisiting the Naturalness Problem – Who is afraid of quadratic divergences? –*, Phys. Rev. **D86** (2012), 013001, 1201.0857.
 - [130] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous*

- Symmetry Breaking*, Phys. Rev. **D7** (1973), 1888–1910.
- [131] J. P. Fatelo, J. M. Gerard, T. Hambye, and J. Weyers, *Symmetry breaking induced by top loops*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995), 492–494.
 - [132] R. Hempfling, *The Next-to-minimal Coleman-Weinberg model*, Phys. Lett. **B379** (1996), 153–158, hep-ph/9604278.
 - [133] T. Hambye, *Symmetry breaking induced by top quark loops from a model without scalar mass*, Phys. Lett. **B371** (1996), 87–92, hep-ph/9510266.
 - [134] K. A. Meissner and H. Nicolai, *Conformal Symmetry and the Standard Model*, Phys. Lett. **B648** (2007), 312–317, hep-th/0612165.
 - [135] K. A. Meissner and H. Nicolai, *Effective action, conformal anomaly and the issue of quadratic divergences*, Phys. Lett. **B660** (2008), 260–266, 0710.2840.
 - [136] K. A. Meissner and H. Nicolai, *Conformal invariance from non-conformal gravity*, Phys. Rev. **D80** (2009), 086005, 0907.3298.
 - [137] R. Foot, A. Kobakhidze, and R. R. Volkas, *Electroweak Higgs as a pseudo-Goldstone boson of broken scale invariance*, Phys. Lett. **B655** (2007), 156–161, 0704.1165.
 - [138] R. Foot, A. Kobakhidze, and R. R. Volkas, *Cosmological constant in scale-invariant theories*, Phys. Rev. **D84** (2011), 075010, 1012.4848.
 - [139] R. Foot, A. Kobakhidze, K. McDonald, and R. Volkas, *Neutrino mass in radiatively-broken scale-invariant models*, Phys. Rev. **D76** (2007), 075014, 0706.1829.
 - [140] R. Foot, A. Kobakhidze, K. L. McDonald, and R. R. Volkas, *A Solution to the hierarchy problem from an almost decoupled hidden sector within a classically scale invariant theory*, Phys. Rev. **D77** (2008), 035006, 0709.2750.
 - [141] R. Foot, A. Kobakhidze, K. L. McDonald, and R. R. Volkas, *Poincaré protection for a natural electroweak scale*, Phys. Rev. **D89** (2014), no. 11, 115018, 1310.0223.
 - [142] W.-F. Chang, J. N. Ng, and J. M. S. Wu, *Shadow Higgs from a scale-invariant hidden $U(1)(s)$ model*, Phys. Rev. **D75** (2007), 115016, hep-ph/0701254.
 - [143] T. Hambye and M. H. G. Tytgat, *Electroweak symmetry breaking induced by dark matter*, Phys. Lett. **B659** (2008), 651–655, 0707.0633.
 - [144] S. Iso, N. Okada, and Y. Orikasa, *Classically conformal $B-L$ extended Standard Model*, Phys. Lett. **B676** (2009), 81–87, 0902.4050.
 - [145] S. Iso, N. Okada, and Y. Orikasa, *The minimal $B-L$ model naturally realized at TeV scale*, Phys. Rev. **D80** (2009), 115007, 0909.0128.
 - [146] S. Iso and Y. Orikasa, *TeV Scale $B-L$ model with a flat Higgs potential at the Planck scale - in view of the hierarchy problem -*, PTEP **2013** (2013), 023B08, 1210.2848.
 - [147] M. Holthausen, M. Lindner, and M. A. Schmidt, *Radiative Symmetry Breaking of the Minimal Left-Right Symmetric Model*, Phys. Rev. **D82** (2010), 055002, 0911.0710.
 - [148] K. Ishiwata, *Dark Matter in Classically Scale-Invariant Two Singlets Standard Model*, Phys. Lett. **B710** (2012), 134–138, 1112.2696.
 - [149] C. Englert, J. Jaeckel, V. V. Khoze, and M. Spannowsky, *Emergence of the Electroweak Scale*

- through the Higgs Portal*, JHEP **04** (2013), 060, 1301.4224.
- [150] V. V. Khoze and G. Ro, *Leptogenesis and Neutrino Oscillations in the Classically Conformal Standard Model with the Higgs Portal*, JHEP **10** (2013), 075, 1307.3764.
- [151] A. Farzinnia, H.-J. He, and J. Ren, *Natural Electroweak Symmetry Breaking from Scale Invariant Higgs Mechanism*, Phys. Lett. **B727** (2013), 141–150, 1308.0295.
- [152] F. Gretschi and A. Monin, *Perturbative conformal symmetry and dilaton*, Phys. Rev. **D92** (2015), no. 4, 045036, 1308.3863.
- [153] Y. Kawamura, *Naturalness, Conformal Symmetry and Duality*, PTEP **2013** (2013), no. 11, 113B04, 1308.5069.
- [154] V. V. Khoze, *Inflation and Dark Matter in the Higgs Portal of Classically Scale Invariant Standard Model*, JHEP **11** (2013), 215, 1308.6338.
- [155] E. Gabrielli, M. Heikinheimo, K. Kannike, A. Racioppi, M. Raidal, and C. Spethmann, *Towards Completing the Standard Model: Vacuum Stability, EWSB and Dark Matter*, Phys. Rev. **D89** (2014), no. 1, 015017, 1309.6632.
- [156] S. Abel and A. Mariotti, *Novel Higgs Potentials from Gauge Mediation of Exact Scale Breaking*, Phys. Rev. **D89** (2014), no. 12, 125018, 1312.5335.
- [157] M. Ibe, S. Matsumoto, and T. T. Yanagida, *Flat Higgs Potential from Planck Scale Supersymmetry Breaking*, Phys. Lett. **B732** (2014), 214–217, 1312.7108.
- [158] D. Chway, T. H. Jung, H. D. Kim, and R. Dermisek, *Radiative Electroweak Symmetry Breaking Model Perturbative All the Way to the Planck Scale*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014), no. 5, 051801, 1308.0891.
- [159] C. T. Hill, *Is the Higgs Boson Associated with Coleman-Weinberg Dynamical Symmetry Breaking?*, Phys. Rev. **D89** (2014), no. 7, 073003, 1401.4185.
- [160] J. Guo and Z. Kang, *Higgs Naturalness and Dark Matter Stability by Scale Invariance*, Nucl. Phys. **B898** (2015), 415–430, 1401.5609.
- [161] S. Benic and B. Radovic, *Electroweak breaking and Dark Matter from the common scale*, Phys. Lett. **B732** (2014), 91–94, 1401.8183.
- [162] S. Benic and B. Radovic, *Majorana dark matter in a classically scale invariant model*, JHEP **01** (2015), 143, 1409.5776.
- [163] V. V. Khoze, C. McCabe, and G. Ro, *Higgs vacuum stability from the dark matter portal*, JHEP **08** (2014), 026, 1403.4953.
- [164] H. Davoudiasl and I. M. Lewis, *Right-Handed Neutrinos as the Origin of the Electroweak Scale*, Phys. Rev. **D90** (2014), no. 3, 033003, 1404.6260.
- [165] P. H. Chankowski, A. Lewandowski, K. A. Meissner, and H. Nicolai, *Softly broken conformal symmetry and the stability of the electroweak scale*, Mod. Phys. Lett. **A30** (2015), no. 02, 1550006, 1404.0548.
- [166] K. Allison, C. T. Hill, and G. G. Ross, *Ultra-weak sector, Higgs boson mass, and the dilaton*, Phys. Lett. **B738** (2014), 191–195, 1404.6268.
- [167] K. Allison, C. T. Hill, and G. G. Ross, *An ultra-weak sector, the strong CP problem and the*

- pseudo-Goldstone dilaton*, Nucl. Phys. **B891** (2015), 613–626, 1409.4029.
- [168] A. Farzinnia and J. Ren, *Higgs Partner Searches and Dark Matter Phenomenology in a Classically Scale Invariant Higgs Boson Sector*, Phys. Rev. **D90** (2014), no. 1, 015019, 1405.0498.
 - [169] P. Ko and Y. Tang, *Galactic center γ -ray excess in hidden sector DM models with dark gauge symmetries: local Z_3 symmetry as an example*, JCAP **1501** (2015), 023, 1407.5492.
 - [170] W. Altmannshofer, W. A. Bardeen, M. Bauer, M. Carena, and J. D. Lykken, *Light Dark Matter, Naturalness, and the Radiative Origin of the Electroweak Scale*, JHEP **01** (2015), 032, 1408.3429.
 - [171] Z. Kang, *Upgrading sterile neutrino dark matter to FIMP using scale invariance*, Eur. Phys. J. **C75** (2015), no. 10, 471, 1411.2773.
 - [172] G. F. Giudice, G. Isidori, A. Salvio, and A. Strumia, *Softened Gravity and the Extension of the Standard Model up to Infinite Energy*, JHEP **02** (2015), 137, 1412.2769.
 - [173] J. Guo, Z. Kang, P. Ko, and Y. Orikasa, *Accidental dark matter: Case in the scale invariant local B - L model*, Phys. Rev. **D91** (2015), no. 11, 115017, 1502.00508.
 - [174] K. Kannike, G. Hütsi, L. Pizza, A. Racioppi, M. Raidal, A. Salvio, and A. Strumia, *Dynamically Induced Planck Scale and Inflation*, JHEP **05** (2015), 065, 1502.01334.
 - [175] A. Salvio and A. Strumia, *Agravity*, JHEP **06** (2014), 080, 1403.4226.
 - [176] K. Endo and Y. Sumino, *A Scale-invariant Higgs Sector and Structure of the Vacuum*, JHEP **05** (2015), 030, 1503.02819.
 - [177] K. Endo and K. Ishiwata, *Direct detection of singlet dark matter in classically scale-invariant standard model*, Phys. Lett. **B749** (2015), 583–588, 1507.01739.
 - [178] K. Fuyuto and E. Senaha, *Sphaleron and critical bubble in the scale invariant two Higgs doublet model*, Phys. Lett. **B747** (2015), 152–157.
 - [179] K. Hashino, S. Kanemura, and Y. Orikasa, *Discriminative phenomenological features of scale invariant models for electroweak symmetry breaking*, Phys. Lett. **B752** (2016), 217–220, 1508.03245.
 - [180] S. Oda, N. Okada, and D.-s. Takahashi, *Classically conformal $U(1)'$ extended standard model and Higgs vacuum stability*, Phys. Rev. **D92** (2015), no. 1, 015026, 1504.06291.
 - [181] N. Haba, H. Ishida, N. Okada, and Y. Yamaguchi, *Bosonic seesaw mechanism in a classically conformal extension of the Standard Model*, (2015), 1508.06828.
 - [182] N. Haba, H. Ishida, N. Okada, and Y. Yamaguchi, *Electroweak symmetry breaking through bosonic seesaw mechanism in a classically conformal extension of the Standard Model*, (2015), 1509.01923.
 - [183] N. Haba, H. Ishida, R. Takahashi, and Y. Yamaguchi, *Gauge coupling unification in a classically scale invariant model*, (2015), 1511.02107.
 - [184] N. Haba, H. Ishida, N. Kitazawa, and Y. Yamaguchi, *A new dynamics of electroweak symmetry breaking with classically scale invariance*, (2015), 1512.05061.
 - [185] H. Okada, Y. Orikasa, and K. Yagyu, *Higgs Triplet Model with Classically Conformal Invariance*, (2015), 1510.00799.

- [186] T. Hur, D.-W. Jung, P. Ko, and J. Y. Lee, *Electroweak symmetry breaking and cold dark matter from strongly interacting hidden sector*, Phys. Lett. **B696** (2011), 262–265, 0709.1218.
- [187] T. Hur and P. Ko, *Scale invariant extension of the standard model with strongly interacting hidden sector*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011), 141802, 1103.2571.
- [188] M. Heikinheimo, A. Racioppi, M. Raidal, C. Spethmann, and K. Tuominen, *Physical Naturalness and Dynamical Breaking of Classical Scale Invariance*, Mod. Phys. Lett. **A29** (2014), 1450077, 1304.7006.
- [189] M. Holthausen, J. Kubo, K. S. Lim, and M. Lindner, *Electroweak and Conformal Symmetry Breaking by a Strongly Coupled Hidden Sector*, JHEP **12** (2013), 076, 1310.4423.
- [190] J. Kubo, K. S. Lim, and M. Lindner, *Electroweak Symmetry Breaking via QCD*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014), 091604, 1403.4262.
- [191] J. Kubo, K. S. Lim, and M. Lindner, *Gamma-ray Line from Nambu-Goldstone Dark Matter in a Scale Invariant Extension of the Standard Model*, JHEP **09** (2014), 016, 1405.1052.
- [192] O. Antipin, M. Redi, and A. Strumia, *Dynamical generation of the weak and Dark Matter scales from strong interactions*, JHEP **01** (2015), 157, 1410.1817.
- [193] J. Kubo and M. Yamada, *Genesis of electroweak and dark matter scales from a bilinear scalar condensate*, (2015), 1505.05971.
- [194] E. H. Fradkin and S. H. Shenker, *Phase Diagrams of Lattice Gauge Theories with Higgs Fields*, Phys. Rev. **D19** (1979), 3682–3697.
- [195] L. F. Abbott and E. Farhi, *Are the Weak Interactions Strong?*, Phys. Lett. **B101** (1981), 69.
- [196] K. G. Chetyrkin, A. Yu. Ignatiev, V. A. Matveev, M. E. Shaposhnikov, and A. N. Tavkhelidze, *COLORED SCALARS AND NEW HADRONS*, Phys. Lett. **B117** (1982), 252–256.
- [197] C. G. Callan, Jr., *Broken scale invariance in scalar field theory*, Phys. Rev. **D2** (1970), 1541–1547.
- [198] K. Symanzik, *Small distance behavior in field theory and power counting*, Commun. Math. Phys. **18** (1970), 227–246.
- [199] J. H. Lowenstein and W. Zimmermann, *Infrared Convergence of Feynman Integrals for the Massless ϕ^4 Model*, Commun. Math. Phys. **46** (1976), 105–118.
- [200] T. Kunihiro and T. Hatsuda, *A Selfconsistent Mean Field Approach to the Dynamical Symmetry Breaking: The Effective Potential of the Nambu-Jona-Lasinio Model*, Prog. Theor. Phys. **71** (1984), 1332.
- [201] W. A. Bardeen and M. Moshe, *Phase Structure of the $O(N)$ Vector Model*, Phys. Rev. **D28** (1983), 1372.
- [202] W. A. Bardeen and M. Moshe, *Comment on the Finite Temperature Behavior of $\Lambda(\phi^2)^{**2}$ in Four-dimensions Theory*, Phys. Rev. **D34** (1986), 1229–1231.
- [203] S. R. Coleman, R. Jackiw, and H. D. Politzer, *Spontaneous Symmetry Breaking in the $O(N)$ Model for Large N^** , Phys. Rev. **D10** (1974), 2491.
- [204] M. Kobayashi and T. Kugo, *On the Ground State of $O(n)$ - $\Lambda\phi^{**4}$ Model*, Prog. Theor. Phys. **54** (1975), 1537.

- [205] L. F. Abbott, J. S. Kang, and H. J. Schnitzer, *Bound States, Tachyons, and Restoration of Symmetry in the $1/N$ Expansion*, Phys. Rev. **D13** (1976), 2212.
- [206] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Front. Phys. **69** (1990), 1–547.
- [207] 藤間崇, *輻射ニュートリノ質量模型における暗黒物質の 共対消滅と直接検出* (博士論文), (2011).
- [208] R. Barbieri, L. J. Hall, and V. S. Rychkov, *Improved naturalness with a heavy Higgs: An Alternative road to LHC physics*, Phys. Rev. **D74** (2006), 015007, hep-ph/0603188.
- [209] J. R. Ellis, A. Ferstl, and K. A. Olive, *Reevaluation of the elastic scattering of supersymmetric dark matter*, Phys. Lett. **B481** (2000), 304–314, hep-ph/0001005.
- [210] JLQCD, H. Ohki, K. Takeda, S. Aoki, S. Hashimoto, T. Kaneko, H. Matsufuru, J. Noaki, and T. Onogi, *Nucleon strange quark content from $N_f = 2 + 1$ lattice QCD with exact chiral symmetry*, Phys. Rev. **D87** (2013), 034509, 1208.4185.
- [211] LUX, D. S. Akerib et al., *First results from the LUX dark matter experiment at the Sanford Underground Research Facility*, Phys. Rev. Lett. **112** (2014), 091303, 1310.8214.
- [212] CDMS-II, Z. Ahmed et al., *Dark Matter Search Results from the CDMS II Experiment*, Science **327** (2010), 1619–1621, 0912.3592.
- [213] XENON100, E. Aprile et al., *First Dark Matter Results from the XENON100 Experiment*, Phys. Rev. Lett. **105** (2010), 131302, 1005.0380.
- [214] XENON100, E. Aprile et al., *Dark Matter Results from 100 Live Days of XENON100 Data*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011), 131302, 1104.2549.
- [215] CoGeNT, C. E. Aalseth et al., *Results from a Search for Light-Mass Dark Matter with a P-type Point Contact Germanium Detector*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011), 131301, 1002.4703.
- [216] DAMA, LIBRA, R. Bernabei et al., *New results from DAMA/LIBRA*, Eur. Phys. J. **C67** (2010), 39–49, 1002.1028.
- [217] G. Angloher et al., *Commissioning Run of the CRESST-II Dark Matter Search*, (2008), 0809.1829.
- [218] V. N. Lebedenko et al., *Result from the First Science Run of the ZEPLIN-III Dark Matter Search Experiment*, Phys. Rev. **D80** (2009), 052010, 0812.1150.
- [219] KIMS, H. S. Lee et al., *Limits on WIMP-nucleon cross section with CsI(Tl) crystal detectors*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007), 091301, 0704.0423.
- [220] XENON1T, E. Aprile, *The XENON1T Dark Matter Search Experiment*, Springer Proc. Phys. **148** (2013), 93–96, 1206.6288.
- [221] XENON, E. Aprile et al., *Physics reach of the XENON1T dark matter experiment*, Submitted to: JCAP (2015), 1512.07501.
- [222] J. Kubo and M. Yamada, *Scale and electroweak first-order phase transitions*, PTEP **2015** (2015), no. 9, 093B01, 1506.06460.
- [223] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, *On the Anomalous Electroweak Baryon Number Nonconservation in the Early Universe*, Phys. Lett. **B155** (1985), 36.
- [224] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, *A Saddle Point Solution in the Weinberg-Salam Theory*, Phys. Rev. **D30** (1984), 2212.

- [225] P. B. Arnold and L. D. McLerran, *Sphalerons, Small Fluctuations and Baryon Number Violation in Electroweak Theory*, Phys. Rev. **D36** (1987), 581.
- [226] M. E. Shaposhnikov, *Possible Appearance of the Baryon Asymmetry of the Universe in an Electroweak Theory*, JETP Lett. **44** (1986), 465–468, [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.44,364(1986)].
- [227] A. D. Sakharov, *Violation of CP Invariance, c Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe*, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5** (1967), 32–35, [Usp. Fiz. Nauk161,61(1991)].
- [228] G. W. Anderson and L. J. Hall, *The Electroweak phase transition and baryogenesis*, Phys. Rev. **D45** (1992), 2685–2698.
- [229] M. E. Carrington, *The Effective potential at finite temperature in the Standard Model*, Phys. Rev. **D45** (1992), 2933–2944.
- [230] M. Dine, P. Huet, and R. L. Singleton, Jr., *Baryogenesis at the electroweak scale*, Nucl. Phys. **B375** (1992), 625–648.
- [231] M. Dine, R. G. Leigh, P. Y. Huet, A. D. Linde, and D. A. Linde, *Towards the theory of the electroweak phase transition*, Phys. Rev. **D46** (1992), 550–571, hep-ph/9203203.
- [232] A. J. da Silva, *ON THE $\lambda \phi^4$ O(N) MODEL AT FINITE TEMPERATURE*, Physica **A158** (1989), 85–95.
- [233] ATLAS, CMS, G. Aad et al., *Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments*, Phys. Rev. Lett. **114** (2015), 191803, 1503.07589.
- [234] KAGRA, K. Somiya, *Detector configuration of KAGRA: The Japanese cryogenic gravitational-wave detector*, Class. Quant. Grav. **29** (2012), 124007, 1111.7185.
- [235] J. Polchinski, *String Theory, Vol. 1 Introduction to the Bosonic String*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [236] J. Polchinski, *String Theory, Vol. 2 Superstring Theory and Beyond*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1998.
- [237] C. Rovelli, *Loop quantum gravity*, Living Rev. Rel. **11** (2008), 5.
- [238] C. Rovelli, *Zakopane lectures on loop gravity*, PoS **QGQGS2011** (2011), 003, 1102.3660.
- [239] P. Horava, *Quantum Gravity at a Lifshitz Point*, Phys. Rev. **D79** (2009), 084008, 0901.3775.
- [240] S. Weinberg, *Ultraviolet divergences in quantum theories of gravitation*, Chap. 16 in General Relativity ed. by Hawking, S.W. and Israel, W. (1979).
- [241] K. Falls, D. F. Litim, K. Nikolakopoulos, and C. Rahmede, *Further evidence for asymptotic safety of quantum gravity*, (2014), 1410.4815.
- [242] M. Shaposhnikov and C. Wetterich, *Asymptotic safety of gravity and the Higgs boson mass*, Phys. Lett. **B683** (2010), 196–200, 0912.0208.
- [243] M. Niedermaier and M. Reuter, *The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity*, Living Rev. Rel. **9** (2006), 5–173.
- [244] M. Niedermaier, *The Asymptotic safety scenario in quantum gravity: An Introduction*, Class. Quant. Grav. **24** (2007), R171–230, gr-qc/0610018.

- [245] D. F. Litim, *Fixed Points of Quantum Gravity and the Renormalisation Group*, (2008), 0810.3675, [PoSQG-Ph,024(2007)].
- [246] D. F. Litim, *Renormalisation group and the Planck scale*, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. **A369** (2011), 2759–2778, 1102.4624.
- [247] M. Reuter and F. Saueressig, *Quantum Einstein Gravity*, New J.Phys. **14** (2012), 055022, 1202.2274.
- [248] A. Codello, R. Percacci, and C. Rahmede, *Investigating the Ultraviolet Properties of Gravity with a Wilsonian Renormalization Group Equation*, Annals Phys. **324** (2009), 414–469, 0805.2909.
- [249] D. Dou and R. Percacci, *The running gravitational couplings*, Class.Quant.Grav. **15** (1998), 3449–3468, hep-th/9707239.
- [250] W. Souma, *Nontrivial ultraviolet fixed point in quantum gravity*, Prog.Theor.Phys. **102** (1999), 181–195, hep-th/9907027.
- [251] M. Reuter and F. Saueressig, *Renormalization group flow of quantum gravity in the Einstein-Hilbert truncation*, Phys. Rev. **D65** (2002), 065016, hep-th/0110054.
- [252] O. Lauscher and M. Reuter, *Is quantum Einstein gravity nonperturbatively renormalizable?*, Class. Quant. Grav. **19** (2002), 483–492, hep-th/0110021.
- [253] O. Lauscher and M. Reuter, *Towards nonperturbative renormalizability of quantum Einstein gravity*, Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002), 993–1002, hep-th/0112089.
- [254] O. Lauscher and M. Reuter, *Ultraviolet fixed point and generalized flow equation of quantum gravity*, Phys. Rev. **D65** (2002), 025013, hep-th/0108040.
- [255] D. F. Litim, *Fixed points of quantum gravity*, Phys. Rev. Lett. **92** (2004), 201301, hep-th/0312114.
- [256] M. Reuter and J.-M. Schwindt, *A Minimal length from the cutoff modes in asymptotically safe quantum gravity*, JHEP **01** (2006), 070, hep-th/0511021.
- [257] P. Fischer and D. F. Litim, *Fixed points of quantum gravity in extra dimensions*, Phys. Lett. **B638** (2006), 497–502, hep-th/0602203.
- [258] M. Reuter and F. Saueressig, *Functional Renormalization Group Equations, Asymptotic Safety, and Quantum Einstein Gravity*, in *First Quantum Geometry and Quantum Gravity School Zakopane, Poland, March 23-April 3, 2007*, 2007.
- [259] M. Reuter and H. Weyer, *Background Independence and Asymptotic Safety in Conformally Reduced Gravity*, Phys. Rev. **D79** (2009), 105005, 0801.3287.
- [260] M. Reuter and H. Weyer, *Conformal sector of Quantum Einstein Gravity in the local potential approximation: Non-Gaussian fixed point and a phase of unbroken diffeomorphism invariance*, Phys. Rev. **D80** (2009), 025001, 0804.1475.
- [261] E. Manrique, M. Reuter, and F. Saueressig, *Bimetric Renormalization Group Flows in Quantum Einstein Gravity*, Annals Phys. **326** (2011), 463–485, 1006.0099.
- [262] U. Harst and M. Reuter, *QED coupled to QEG*, JHEP **05** (2011), 119, 1101.6007.
- [263] S. Falkenberg and S. D. Odintsov, *Gauge dependence of the effective average action in Ein-*

- stein gravity*, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998), 607–623, [hep-th/9612019](#).
- [264] W. Souma, *Gauge and cutoff function dependence of the ultraviolet fixed point in quantum gravity*, (2000), [gr-qc/0006008](#).
 - [265] H. Gies, B. Knorr, and S. Lippoldt, *Generalized Parametrization Dependence in Quantum Gravity*, Phys. Rev. **D92** (2015), no. 8, 084020, [1507.08859](#).
 - [266] A. Eichhorn, H. Gies, and M. M. Scherer, *Asymptotically free scalar curvature-ghost coupling in Quantum Einstein Gravity*, Phys. Rev. **D80** (2009), 104003, [0907.1828](#).
 - [267] K. Groh and F. Saueressig, *Ghost wave-function renormalization in Asymptotically Safe Quantum Gravity*, J. Phys. **A43** (2010), 365403, [1001.5032](#).
 - [268] A. Eichhorn and H. Gies, *Ghost anomalous dimension in asymptotically safe quantum gravity*, Phys. Rev. **D81** (2010), 104010, [1001.5033](#).
 - [269] R. Percacci and D. Perini, *Constraints on matter from asymptotic safety*, Phys. Rev. **D67** (2003), 081503, [hep-th/0207033](#).
 - [270] P. Donà, A. Eichhorn, and R. Percacci, *Matter matters in asymptotically safe quantum gravity*, (2013), [1311.2898](#).
 - [271] P. Labus, R. Percacci, and G. P. Vacca, *Asymptotic safety in $O(N)$ scalar models coupled to gravity*, (2015), [1505.05393](#).
 - [272] R. Percacci and D. Perini, *Asymptotic safety of gravity coupled to matter*, Phys.Rev. **D68** (2003), 044018, [hep-th/0304222](#).
 - [273] A. Bonanno and M. Reuter, *Proper time flow equation for gravity*, JHEP **02** (2005), 035, [hep-th/0410191](#).
 - [274] G. Narain and R. Percacci, *Renormalization Group Flow in Scalar-Tensor Theories. I*, Class.Quant.Grav. **27** (2010), 075001, [0911.0386](#).
 - [275] G. Narain and C. Rahmede, *Renormalization Group Flow in Scalar-Tensor Theories. II*, Class.Quant.Grav. **27** (2010), 075002, [0911.0394](#).
 - [276] P. Donà, A. Eichhorn, P. Labus, and R. Percacci, *Asymptotic safety in an interacting system of gravity and scalar matter*, (2015), [1512.01589](#).
 - [277] O. Zanusso, L. Zambelli, G. Vacca, and R. Percacci, *Gravitational corrections to Yukawa systems*, Phys.Lett. **B689** (2010), 90–94, [0904.0938](#).
 - [278] G. Vacca and O. Zanusso, *Asymptotic Safety in Einstein Gravity and Scalar-Fermion Matter*, Phys.Rev.Lett. **105** (2010), 231601, [1009.1735](#).
 - [279] J.-E. Daum, U. Harst, and M. Reuter, *Running Gauge Coupling in Asymptotically Safe Quantum Gravity*, JHEP **01** (2010), 084, [0910.4938](#).
 - [280] J. E. Daum, U. Harst, and M. Reuter, *Non-perturbative QEG Corrections to the Yang-Mills Beta Function*, 2010.
 - [281] S. Folkerts, D. F. Litim, and J. M. Pawłowski, *Asymptotic freedom of Yang-Mills theory with gravity*, Phys. Lett. **B709** (2012), 234–241, [1101.5552](#).
 - [282] A. Eichhorn and H. Gies, *Light fermions in quantum gravity*, New J. Phys. **13** (2011), 125012, [1104.5366](#).

- [283] E. Manrique, M. Reuter, and F. Saueressig, *Matter Induced Bimetric Actions for Gravity*, Annals Phys. **326** (2011), 440–462, 1003.5129.
- [284] O. Lauscher and M. Reuter, *Flow equation of quantum Einstein gravity in a higher derivative truncation*, Phys. Rev. **D66** (2002), 025026, hep-th/0205062.
- [285] A. Codello and R. Percacci, *Fixed points of higher derivative gravity*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), 221301, hep-th/0607128.
- [286] A. Codello, R. Percacci, and C. Rahmede, *Ultraviolet properties of $f(R)$ -gravity*, Int. J. Mod. Phys. **A23** (2008), 143–150, 0705.1769.
- [287] P. F. Machado and F. Saueressig, *On the renormalization group flow of $f(R)$ -gravity*, Phys. Rev. **D77** (2008), 124045, 0712.0445.
- [288] D. Benedetti, P. F. Machado, and F. Saueressig, *Asymptotic safety in higher-derivative gravity*, Mod. Phys. Lett. **A24** (2009), 2233–2241, 0901.2984.
- [289] A. Bonanno, A. Contillo, and R. Percacci, *Inflationary solutions in asymptotically safe $f(R)$ theories*, Class. Quant. Grav. **28** (2011), 145026, 1006.0192.
- [290] M. Niedermaier, *Gravitational fixed points and asymptotic safety from perturbation theory*, Nucl. Phys. **B833** (2010), 226–270.
- [291] J. A. Dietz and T. R. Morris, *Asymptotic safety in the $f(R)$ approximation*, JHEP **01** (2013), 108, 1211.0955.
- [292] N. Ohta, *Beta Function and Asymptotic Safety in Three-dimensional Higher Derivative Gravity*, Class. Quant. Grav. **29** (2012), 205012, 1205.0476.
- [293] M. Hindmarsh and I. D. Saltas, *$f(R)$ Gravity from the renormalisation group*, Phys. Rev. **D86** (2012), 064029, 1203.3957.
- [294] D. Benedetti and F. Guarnieri, *Brans-Dicke theory in the local potential approximation*, New J. Phys. **16** (2014), 053051, 1311.1081.
- [295] K. Falls, D. F. Litim, K. Nikolakopoulos, and C. Rahmede, *A bootstrap towards asymptotic safety*, (2013), 1301.4191.
- [296] N. Ohta and R. Percacci, *Higher Derivative Gravity and Asymptotic Safety in Diverse Dimensions*, Class. Quant. Grav. **31** (2014), 015024, 1308.3398.
- [297] J. A. Dietz and T. R. Morris, *Redundant operators in the exact renormalisation group and in the $f(R)$ approximation to asymptotic safety*, JHEP **07** (2013), 064, 1306.1223.
- [298] N. Ohta, R. Percacci, and G. P. Vacca, *A flow equation for $f(R)$ gravity and some of its exact solutions*, (2015), 1507.00968.
- [299] A. Eichhorn, *The Renormalization Group flow of unimodular $f(R)$ gravity*, JHEP **04** (2015), 096, 1501.05848.
- [300] D. Benedetti, P. F. Machado, and F. Saueressig, *Taming perturbative divergences in asymptotically safe gravity*, Nucl. Phys. **B824** (2010), 168–191, 0902.4630.
- [301] U. Harst and M. Reuter, *The 'Tetrad only' theory space: Nonperturbative renormalization flow and Asymptotic Safety*, JHEP **05** (2012), 005, 1203.2158.
- [302] P. Dona and R. Percacci, *Functional renormalization with fermions and tetrads*, Phys.Rev.

- D87** (2013), no. 4, 045002, 1209.3649.
- [303] I. Donkin and J. M. Pawłowski, *The phase diagram of quantum gravity from diffeomorphism-invariant RG-flows*, (2012), 1203.4207.
- [304] N. Christiansen, D. F. Litim, J. M. Pawłowski, and A. Rodigast, *Fixed points and infrared completion of quantum gravity*, Phys. Lett. **B728** (2014), 114–117, 1209.4038.
- [305] N. Christiansen, B. Knorr, J. M. Pawłowski, and A. Rodigast, *Global Flows in Quantum Gravity*, (2014), 1403.1232.
- [306] N. Christiansen, B. Knorr, J. Meibohm, J. M. Pawłowski, and M. Reichert, *Local Quantum Gravity*, (2015), 1506.07016.
- [307] J. Meibohm, J. M. Pawłowski, and M. Reichert, *Asymptotic safety of gravity-matter systems*, (2015), 1510.07018.
- [308] J. Meibohm and J. M. Pawłowski, *Chiral fermions in asymptotically safe quantum gravity*, (2016), 1601.04597.
- [309] F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *The Standard Model Higgs boson as the inflaton*, Phys.Lett. **B659** (2008), 703–706, 0710.3755.
- [310] A. Salvio, *Higgs Inflation at NNLO after the Boson Discovery*, Phys.Lett. **B727** (2013), 234–239, 1308.2244.
- [311] Y. Hamada, H. Kawai, and K.-y. Oda, *Minimal Higgs inflation*, PTEP **2014** (2014), 023B02, 1308.6651.
- [312] J. L. Cook, L. M. Krauss, A. J. Long, and S. Sabharwal, *Is Higgs inflation ruled out?*, Phys. Rev. **D89** (2014), no. 10, 103525, 1403.4971.
- [313] Y. Hamada, H. Kawai, K.-y. Oda, and S. C. Park, *Higgs Inflation Still Alive*, Phys. Rev. Lett. **112** (2014), no. 24, 241301, 1403.5043.
- [314] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *Higgs inflation at the critical point*, Phys.Lett. **B734** (2014), 249–254, 1403.6078.
- [315] Y. Hamada, H. Kawai, and K.-y. Oda, *Predictions on mass of Higgs portal scalar dark matter from Higgs inflation and flat potential*, JHEP **1407** (2014), 026, 1404.6141.
- [316] Y. Hamada, H. Kawai, K.-y. Oda, and S. C. Park, *Higgs inflation from Standard Model criticality*, (2014), 1408.4864.
- [317] Y. Hamada, K.-y. Oda, and F. Takahashi, *Topological Higgs inflation: The origin of the Standard Model criticality*, Phys.Rev. **D90** (2014), 097301, 1408.5556.
- [318] L. E. Ibanez, F. Marchesano, and I. Valenzuela, *Higgs-otic Inflation and String Theory*, (2014), 1411.5380.
- [319] F. Bezrukov, J. Rubio, and M. Shaposhnikov, *Living beyond the edge: Higgs inflation and vacuum metastability*, (2014), 1412.3811.
- [320] A. Salvio and A. Mazumdar, *Classical and Quantum Initial Conditions for Higgs Inflation*, (2015), 1506.07520.
- [321] Z.-Z. Xianyu and H.-J. He, *Asymptotically Safe Higgs Inflation*, JCAP **1410** (2014), 083, 1407.6993.

- [322] N. G. Nielsen, F. Sannino, and O. Svendsen, *Inflation from Asymptotically Safe Theories*, Phys. Rev. **D91** (2015), 103521, 1503.00702.
- [323] E. J. Copeland, C. Rahmede, and I. D. Saltas, *Asymptotically Safe Starobinsky Inflation*, Phys. Rev. **D91** (2015), no. 10, 103530, 1311.0881.
- [324] A. Bonanno and A. Platania, *Asymptotically safe inflation from quadratic gravity*, (2015), 1507.03375.
- [325] S. Weinberg, *Asymptotically Safe Inflation*, Phys. Rev. **D81** (2010), 083535, 0911.3165.
- [326] S. H. H. Tye and J. Xu, *Comment on Asymptotically Safe Inflation*, Phys. Rev. **D82** (2010), 127302, 1008.4787.
- [327] A. Bonanno and M. Reuter, *Entropy Production during Asymptotically Safe Inflation*, Entropy **13** (2011), 274, 1011.2794.
- [328] C. Fang and Q.-G. Huang, *The trouble with asymptotically safe inflation*, Eur. Phys. J. **C73** (2013), no. 4, 2401, 1210.7596.
- [329] Y.-F. Cai and D. A. Easson, *Higgs Boson in $R\bar{G}$ running Inflationary Cosmology*, Int. J. Mod. Phys. **D21** (2013), 1250094, 1202.1285.
- [330] Y.-F. Cai, Y.-C. Chang, P. Chen, D. A. Easson, and T. Qiu, *Planck constraints on Higgs modulated reheating of renormalization group improved inflation*, Phys. Rev. **D88** (2013), 083508, 1304.6938.
- [331] R. Percacci, *Asymptotic Safety*, (2007), 0709.3851.
- [332] R. Percacci, *A Short introduction to asymptotic safety*, in *Time and Matter*, 2011, pp. 123–142.
- [333] J. Braun, H. Gies, and D. D. Scherer, *Asymptotic safety: a simple example*, Phys. Rev. **D83** (2011), 085012, 1011.1456.
- [334] S. Nagy, *Lectures on renormalization and asymptotic safety*, Annals Phys. **350** (2014), 310–346, 1211.4151.
- [335] J. Ambjorn, A. Goerlich, J. Jurkiewicz, and R. Loll, *Nonperturbative Quantum Gravity*, Phys. Rept. **519** (2012), 127–210, 1203.3591.
- [336] H. Kawai and M. Ninomiya, *Renormalization Group and Quantum Gravity*, Nucl.Phys. **B336** (1990), 115.
- [337] O. Lauscher and M. Reuter, *Fractal spacetime structure in asymptotically safe gravity*, JHEP **10** (2005), 050, hep-th/0508202.
- [338] M. Reuter and F. Saueressig, *Fractal space-times under the microscope: A Renormalization Group view on Monte Carlo data*, JHEP **12** (2011), 012, 1110.5224.
- [339] M. Reuter and F. Saueressig, *Asymptotic Safety, Fractals, and Cosmology*, Lect. Notes Phys. **863** (2013), 185–223, 1205.5431.
- [340] S. Rechenberger and F. Saueressig, *The R^2 phase-diagram of QEG and its spectral dimension*, Phys. Rev. **D86** (2012), 024018, 1206.0657.
- [341] J. Ambjorn, J. Jurkiewicz, and R. Loll, *Spectral dimension of the universe*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005), 171301, hep-th/0505113.

- [342] J. Laiho and D. Coumbe, *Evidence for Asymptotic Safety from Lattice Quantum Gravity*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011), 161301, 1104.5505.
- [343] H. S. Egawa, T. Hotta, T. Izubuchi, N. Tsuda, and T. Yukawa, *Scaling structures in four-dimensional simplicial gravity*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **53** (1997), 760–762, hep-lat/9608149.
- [344] H. S. Egawa, T. Hotta, T. Izubuchi, N. Tsuda, and T. Yukawa, *Scaling behavior in 4-D simplicial quantum gravity*, Prog. Theor. Phys. **97** (1997), 539–552, hep-lat/9611028.
- [345] S. Horata, H. S. Egawa, and T. Yukawa, *Grand canonical simulation of 4-D simplicial quantum gravity*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **119** (2003), 921–923, hep-lat/0209004, [921(2002)].
- [346] S. Horata, T. Yukawa, and H. S. Egawa, *Matter dependence of the string susceptibility exponent in four-dimensional simplicial quantum gravity*, Prog. Theor. Phys. **108** (2003), 1171–1176.
- [347] H. S. Egawa, S. Horata, and T. Yukawa, *Fractal structure of 4-D Euclidean simplicial manifold*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **129** (2004), 791–793, hep-lat/0309047, [791(2003)].
- [348] J. Kubo, H. Terao, and G. Zoupanos, *Kaluza-Klein thresholds and regularization (in)dependence*, Nucl. Phys. **B574** (2000), 495–524, hep-ph/9910277.
- [349] J. Kubo, H. Terao, and G. Zoupanos, *Running couplings in extra dimensions*, in *High energy physics. Proceedings, 30th International Conference, ICHEP 2000, Osaka, Japan, July 27-August 2, 2000. Vol. 1, 2*, 2000, pp. 1097–1098.
- [350] J. Kubo and M. Nunami, *Unrenormalizable theories are predictive*, Eur. Phys. J. **C26** (2003), 461–472, hep-th/0112032.
- [351] H. Gies, *Renormalizability of gauge theories in extra dimensions*, Phys. Rev. **D68** (2003), 085015, hep-th/0305208.
- [352] H. Gies and M. M. Scherer, *Asymptotic safety of simple Yukawa systems*, Eur. Phys. J. **C66** (2010), 387–402, 0901.2459.
- [353] H. Gies, S. Rechenberger, and M. M. Scherer, *Towards an Asymptotic-Safety Scenario for Chiral Yukawa Systems*, Eur. Phys. J. **C66** (2010), 403–418, 0907.0327.
- [354] M. M. Scherer, H. Gies, and S. Rechenberger, *An Asymptotic-safety mechanism for chiral Yukawa systems*, Acta Phys. Polon. Supp. **2** (2009), 541, 0910.0395.
- [355] D. F. Litim and F. Sannino, *Asymptotic safety guaranteed*, JHEP **12** (2014), 178, 1406.2337.
- [356] H. Gies, S. Rechenberger, M. M. Scherer, and L. Zambelli, *An asymptotic safety scenario for gauged chiral Higgs-Yukawa models*, Eur. Phys. J. **C73** (2013), 2652, 1306.6508.
- [357] K.-y. Oda and M. Yamada, *Non-minimal coupling in Higgs-Yukawa model with asymptotically safe gravity*, (2015), 1510.03734.
- [358] Y.-b. Kim, C. Y. Oh, and N. Park, *Classical geometry of de Sitter space-time: An Introductory review*, (2002), hep-th/0212326.
- [359] N. H. Barth and S. M. Christensen, *Quantizing Fourth Order Gravity Theories. 1. The Functional Integral*, Phys. Rev. **D28** (1983), 1876.
- [360] J. York, James W., *Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors*

- on Riemannian manifolds and the initial value problem of general relativity*, J.Math.Phys. **14** (1973), 456–464.
- [361] A. Eichhorn, *Quantum-gravity-induced matter self-interactions in the asymptotic-safety scenario*, Phys. Rev. **D86** (2012), 105021, 1204.0965.
- [362] E. Manrique, S. Rechenberger, and F. Saueressig, *Asymptotically Safe Lorentzian Gravity*, Phys. Rev. Lett. **106** (2011), 251302, 1102.5012.
- [363] B. S. DeWitt, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, Phys. Rept. **19** (1975), 295–357.
- [364] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1984.
- [365] L. S. I.L Buchbinder, S Odintsov, *Effective Action in Quantum Gravity*, CRC Press, 1992.
- [366] J. Yepez, *Einstein’s vierbein field theory of curved space*, (2011), 1106.2037.
- [367] P. B. Gilkey, *The Spectral geometry of a Riemannian manifold*, J.Diff.Geom. **10** (1975), 601–618.
- [368] P. B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation and the Atiyah-Singer index theorem*, (1995).
- [369] B. S. DeWitt, *Dynamical theory of groups and fields*, Conf. Proc. **C630701** (1964), 585–820, [Les Houches Lect. Notes13,585(1964)].
- [370] D. Vassilevich, *Heat kernel expansion: User’s manual*, Phys.Rept. **388** (2003), 279–360, hep-th/0306138.
- [371] G. V. Dunne, *Functional determinants in quantum field theory*, J.Phys. **A41** (2008), 304006, 0711.1178.
- [372] H. E. Haber and H. A. Weldon, *Finite Temperature Symmetry Breaking as Bose-Einstein Condensation*, Phys. Rev. **D25** (1982), 502.
- [373] L. Dolan and R. Jackiw, *Symmetry Behavior at Finite Temperature*, Phys. Rev. **D9** (1974), 3320–3341.
- [374] K. Funakubo and E. Senaha, *Electroweak phase transition, critical bubbles and sphaleron decoupling condition in the MSSM*, Phys. Rev. **D79** (2009), 115024, 0905.2022.

謝辞

学部4年生から博士後期課程修了までの6年間、私の指導教員として指導して下さった青木健一教授には大変感謝致します。青木健一教授からは物理のみならず、SUとしてのコンピュータに関することから日常の些細なことまで、あらゆることを学びました。共同研究者の久保治輔教授との古典的スケール不変性に関する研究を通じて、現象論の基本や場の量子論の深い知識を身につけることができました。久保教授から伺った研究者としての経験談は研究者を目指す上での心得になっています。量子重力に関する研究は大阪大学の尾田欣也准教授との共同研究に基づくものです。尾田准教授からは良いプレゼンの仕方、論文の書き方、Mathematicaの使い方など、研究者として必要なスキルをたくさん学びました。そして、研究者を目指す私を心強く応援して下さいました。末松大二郎教授、青木真由美准教授、武田真滋助教そして石渡弘治助教との議論も素粒子物理学に対する知識を広げる貴重なものとなっています。また、石渡助教にはポストクの書類や応募の仕方などを教えていただき、何も情報がなかった私に色々アドバイスして下さいました。秘書の西川さんには学振の手続きや科研費の管理等の事務手続きをしていただき、非常に助かりました。同期の柏瀬翔一君とは学部時代から9年間の付き合いで、楽しい思い出がたくさんあります。研究室に所属してからの6年間、共に素粒子物理学を切磋琢磨しながら学ぶことができました。研究室の先輩である大川さん、熊本さん、小内さん、後輩の河内君、後藤君、坂井君との議論も有意義で、勉強になりました。KIASに招待して下さり、セミナーをする機会を与えて下さったPyungwon Ko教授、ハイデルベルク滞在中、マックス・プランク核物理研究所への滞在を許可して下さい下さったManfred Lindner教授、そして滞在中に議論をして下さった、ハイデルベルク大学のJan M. Pawlowski教授、Fabian Rannecke氏、Mario Mitter氏、Jan Meibohm氏、Manuel Reichert氏にも大変感謝致します。高西康敬さんにはハイデルベルクでの生活で色々教えていただき、非常に有意義な滞在にすることができました。京都大学の川合光教授との議論で量子重力理論の知識を深めることができました。そして同じく京都大学の同期の濱田雄太君との暗黒物質やバリオン数生成の議論で色々な知識が得られました。ここには書ききれませんが、たくさんの方々の支えによって学生生活を送り、研究をすることができました。

理論物理学研究室の自由で寛容な雰囲気のおかげで色々な経験をさせていただくことができました。普段の何気ない楽しい会話は研究の中でリラックスできる時間でした。マックス・プランク研究所に滞在する機会を与えて下さり、海外での研究を体験しました。この経験は私の人生の中でとても大切で、忘れることのできない出来事です。

最後に、これまで9年間もの大学での学生生活を援助してれた家族に感謝します。

ありがとうございました。