

# 有限密度グロス-ニューボ-模型のグラスマンテンソル くりこみ群

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/42336">http://hdl.handle.net/2297/42336</a>

This work is licensed under a Creative Commons  
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0  
International License.



# 博士論文

有限密度グロス-ヌーボー模型の  
グラスマンテンソルくりこみ群

金沢大学大学院自然科学研究科  
数物科学専攻

学籍番号	1223102006
氏名	吉村友佑
主任指導教員名	青木健一
提出年月	2015年1月

# 目次

第1章	導入	4
第2章	テンソルくりこみ群	6
2.1	テンソルネットワーク表示	6
2.1.1	高温展開表示	7
2.1.2	ドメインウォール表示	8
2.2	テンソルの分解	10
2.3	自由度の縮約	12
2.4	ブルートフォース	13
第3章	Gross-Neveu モデルの Grassmann テンソルくりこみ群	18
3.1	Gross-Neveu モデル	18
3.2	テンソルネットワーク表示	19
3.3	Grassmann テンソルくりこみ群	23
3.3.1	テンソルの分解	23
3.3.2	自由度の縮約	25
3.4	境界条件	26
3.4.1	1回目のくりこみ	26
3.4.2	2回目のくりこみ	28
第4章	計算結果	32
4.1	自由エネルギー	32
4.1.1	厳密値の計算	32
4.1.2	厳密値との比較	34
4.2	フェルミオン密度	35
4.3	感受率	36
第5章	再重み付け法	38
5.1	MonteCarlo 法の再重み付け法	38
5.2	TRG の再重み付け法	39
5.2.1	テンソルの分解	39
5.2.2	自由度の縮約	42
5.3	GTRG の再重み付け法	43
5.3.1	テンソルの分解	43

5.3.2	自由度の縮約 . . . . .	44
5.4	計算結果 . . . . .	45
<b>第 6 章</b>	<b>まとめと展望</b>	<b>48</b>
付 録 A	ボソンテンソルの詳細	49

# 第1章 導入

量子色力学(QCD)においては、Wilsonによる格子ゲージ理論の定式化以来、MonteCarlo法による数値シミュレーションが重要な役割を担ってきた。MonteCarlo法は重点サンプリングによって物理量の期待値を計算する手法であるが、物理系によっては重みが複素数になり、確率的な扱いが破綻する事がある。そのような場合でも、原理的には位相再重み付け法と呼ばれる方法によって計算はできるが、統計誤差が非常に大きくなり実用にはならない。これは符号問題と呼ばれ、QCDに限らず MonteCarlo法を利用する多くの分野で重要な課題とされてきた。

符号問題への解決法は、MonteCarlo法の改良を中心に様々な方法が研究されている。そのような研究のなかには、MonteCarlo法に代えて数値繰り込み群を利用するという方向性をとるものがある。数値くりこみ群は、数値的に系の自由度の一部を縮約することで粗視化を繰りかえしていく方法であるため、MonteCarlo法とは違い、複素数が現れることで破綻することはない。この研究で取り上げるテンソル繰り込み群(TRG)[1]は、2007年にLevinとNaveによって導入された数値くりこみ群の手法である。彼らは三角格子上のIsingモデルでTRGを導入したが、その後、GuらはTRGをGrassmann数を含んだ系に拡張したGrassmannTRG(GTRG)を開発した。2次元系で有効性が確かめられており、X-Yモデル[3]やO(3)モデル[4]、 $\phi^4$ モデル[5]に応用されている。また、GTRGの応用としてはゲージ場とフェルミオンの複合系としてSchwingerモデル(2次元QED)[6]がある。さらに最近、XieらはSecondTRG(SRG)[7]と呼ばれるTRGの改良法を開発し、XieらはHigherOrderTRG(HOTRG)[8]と呼ばれる高次元への拡張を3次元Isingモデルで導入した。

符号問題が現れる系の例としては、有限密度のフェルミオンを持つ系や $\theta$ 項を含む系などがある。 $\theta$ 項を含む系へのGTRGの応用としては、既にSchwingerモデルに $\theta$ 項を加えたもの[9]がある。この研究ではGTRGのテストベッドとして、Wilsonフェルミオンで定式化した格子Gross-Neveuモデル[10]を選んだ。Gross-Neveuモデルは、フェルミオンだけからなる2次元系のモデルで、相互作用としては4点相互作用だけを含む。単純なモデルであるが、QCDの重要な性質である漸近的自由性や自発的対称性の破れなどを持つことが知られており、QCDのトイモデルとしてしばしば扱われる。この研究の目的は、化学ポテンシャルを含んだGross-NeveuモデルでGTRGを定式化し、有限密度の領域で計算を試みることで、有限密度QCDへのTRGの応用のためのベンチマークを提供することである。このモデルの解析にはしばしばLarge-N極限が用いられるが、この研究では簡単のためにフレーバー数は1にする。有限のフレーバー数への拡張は簡単に行うことができる。

以下に本論文の構成を示す。第2章では、Grassmann数を含まない通常のTRGの手順を説明する。第3章では、化学ポテンシャルを持つGross-NeveuモデルでGTRGを定式

化する。第 4 章では、第 3 章で定式化した GTRG による数値計算の結果を示す。第 5 章では、MonteCarlo 法において再重み付け法と呼ばれる手法のアナロジーを TRG で定式化し、計算を試みた結果を示す。

## 第2章 テンソルくりこみ群

この章では、Grassmann 数を含まない通常の TRG について説明する。まず、TRG はテンソルのネットワークによって表された分配関数に対して行われるので、与えられた系の分配関数をそのように書き直す必要がある。TRG の中心となる手順は、テンソルの分解と自由度の縮約である。テンソルの分解では、特異値分解 (SVD) によって一つのテンソルを近似的に二つのテンソルへ分解する。また、このとき分解された二つのテンソルが持つ新しい自由度を粗視化された系における自由度とみなす。自由度の縮約では、分解されたテンソルに残った古い自由度を縮約し、粗視化された系を得る。

2.1 節では、Ising モデルの分配関数を例としてテンソルネットワーク表示を示す。2.2 節でテンソルの分解を説明し、2.3 節で自由度の縮約を説明する。?? 節で、TRG を繰り返して十分に小さくなった自由度のブルートフォースでの足しあげについて説明する。

### 2.1 テンソルネットワーク表示

ここでは、2次元正方格子上の Ising モデルの分配関数

$$Z = \sum_{\{\sigma=\pm 1\}} \exp \left[ \beta \sum_n (\sigma_n \sigma_{n+\hat{1}} + \sigma_n \sigma_{n+\hat{2}}) \right] \quad (2.1)$$

をテンソルネットワーク表示にする。ここで、 $\beta$  は逆温度、 $n$  は格子点の座標、 $\hat{1}$  は第1次元方向の単位ベクトル、 $\hat{2}$  は第2次元方向の単位ベクトルを表す。

2次元正方格子では、テンソルネットワーク表示された分配関数は

$$Z = \sum_{\{x,t\}} \prod_n T_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} \quad (2.2)$$

と表せる。ここで  $x_n$  は格子点  $n$  に繋がる第1次元方向、 $t_n$  は第2次元方向のリンク上に定義された変数である。図 2.1 にテンソルネットワークの一部を例示する。式 (2.1) をテンソルネットワーク表示にするには、式 (2.1) と式 (2.2) が等価になるようにテンソル  $T_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}$  を与えなければならない。そのようなテンソルは一意であるとは限らず、2次元 Ising モデルでは高温展開による表示とドメインウォールによる表示が知られている [11],[12]。<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>[11] では、それぞれ格子上のテンソルネットワーク表示、双対格子上のテンソルネットワーク表示と呼ばれている。

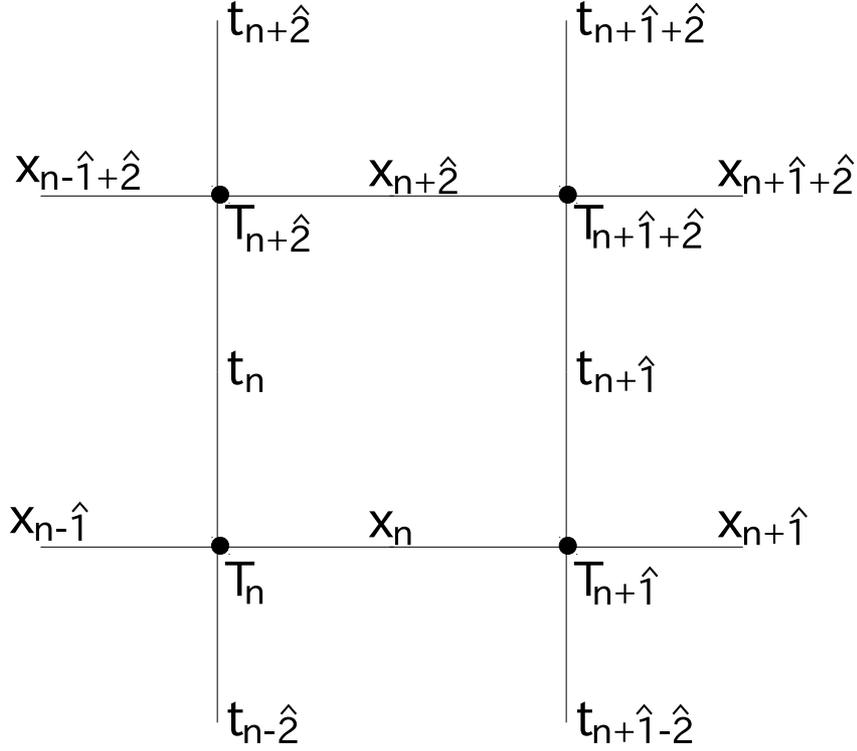


図 2.1: 格子点  $n$  の近くのテンソルネットワークの図である。横軸を第 1 次元方向、縦軸を第 2 次元方向としている。黒丸はテンソルを表す。各格子点上のテンソルが隣接するテンソルとリンク変数を共有することでネットワークを構成する。

### 2.1.1 高温展開表示

高温展開表示は Ising モデルの高温展開に基づくテンソルネットワーク表示である。高温展開表示では、まず、指数関数を

$$e^{\beta\sigma_n\sigma_{n+\hat{\nu}}} = \cosh(\beta\sigma_n\sigma_{n+\hat{\nu}}) + \sinh(\beta\sigma_n\sigma_{n+\hat{\nu}}), \quad \nu = 1, 2 \quad (2.3)$$

と展開する。 $\sigma_n = \pm 1$  であることから

$$\cosh(\beta\sigma_n\sigma_{n+\hat{\nu}}) + \sinh(\beta\sigma_n\sigma_{n+\hat{\nu}}) = \cosh\beta(1 + \sigma_n\sigma_{n+\hat{\nu}}\tanh\beta)$$

とできる。これを

$$e^{\beta\sigma_n\sigma_{n+\hat{1}}} = \cosh\beta \sum_{x_n=0,1} (\sigma_n\sigma_{n+\hat{1}}\tanh\beta)^{x_n} \quad (2.4)$$

$$e^{\beta\sigma_n\sigma_{n+\hat{2}}} = \cosh\beta \sum_{t_n=0,1} (\sigma_n\sigma_{n+\hat{2}}\tanh\beta)^{t_n} \quad (2.5)$$

とすると、分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{x,t\}} \prod_n \cosh^2 \beta (\sigma_n \sigma_{n+\hat{1}} \tanh \beta)^{x_n} (\sigma_n \sigma_{n+\hat{2}} \tanh \beta)^{t_n} \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{x,t\}} \prod_n \cosh^2 \beta \left( \sigma_n \sqrt{\tanh \beta} \right)^{x_n+t_n+x_{n-\hat{1}}+t_{n-\hat{2}}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

とできる。 $\{x, t\}$ を残して $\sigma_n$ の和をとると

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma_n=\pm 1} \sigma_n^{x_n+t_n+x_{n-\hat{1}}+t_{n-\hat{2}}} &= 1 + (-1)^{x_n+t_n+x_{n-\hat{1}}+t_{n-\hat{2}}} \\ &= 2\delta_{(x_n+t_n+x_{n-\hat{1}}+t_{n-\hat{2}}) \bmod 2, 0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

となるので、 $\{x, t\}$ だけで表される分配関数

$$Z = \sum_{\{x,t\}} \prod_n 2 \cosh^2 \beta \left( \sqrt{\tanh \beta} \right)^{x_n+t_n+x_{n-\hat{1}}+t_{n-\hat{2}}} \delta_{(x_n+t_n+x_{n-\hat{1}}+t_{n-\hat{2}}) \bmod 2, 0} \quad (2.8)$$

が得られる。ここで

$$T_{x_n, t_n, x_{n-\hat{1}}, t_{n-\hat{2}}} = 2 \cosh^2 \beta \left( \sqrt{\tanh \beta} \right)^{x_n+t_n+x_{n-\hat{1}}+t_{n-\hat{2}}} \delta_{(x_n+t_n+x_{n-\hat{1}}+t_{n-\hat{2}}) \bmod 2, 0} \quad (2.9)$$

とすれば、テンソルネットワーク表示を与えるテンソルが得られる。

### 2.1.2 ドメインウォール表示

ドメインウォール表示は、ドメインウォール変数

$$\alpha_{n,m} = \sigma_n \sigma_m \quad (2.10)$$

によるテンソルネットワーク表示である。ドメインウォール変数は、双対格子のリンク上に定義されているとするのが自然である。図 2.2 にドメインウォールの一例を示す。

ドメインウォール変数によって分配関数を書き換えると、

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{\{\sigma\}} \exp \left[ \beta \sum_n (\alpha_{n,n+\hat{1}} + \alpha_{n,n+\hat{2}}) \right] \\ &= \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{\alpha\}} \prod_{n,\nu} \delta_{\alpha_{n,n+\hat{\nu}}, \sigma_n \sigma_{n+\hat{\nu}}} \\ &\quad \cdot \prod_n \exp \left[ \frac{\beta}{2} (\alpha_{n,n+\hat{1}} + \alpha_{n+\hat{1},n+\hat{1}+\hat{2}} + \alpha_{n+\hat{1}+\hat{2},n+\hat{2}} + \alpha_{n+\hat{2},n}) \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

とできる。一つの双対格子につながるリンク上のドメインウォール変数を集めると

$$\begin{aligned} \alpha_{n,n+\hat{1}} \alpha_{n+\hat{1},n+\hat{1}+\hat{2}} \alpha_{n+\hat{2},n+\hat{1}+\hat{2}} \alpha_{n,n+\hat{2}} &= \sigma_n \sigma_{n+\hat{1}} \sigma_{n+\hat{1}+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{1}+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{2}} \sigma_n \\ &= 1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

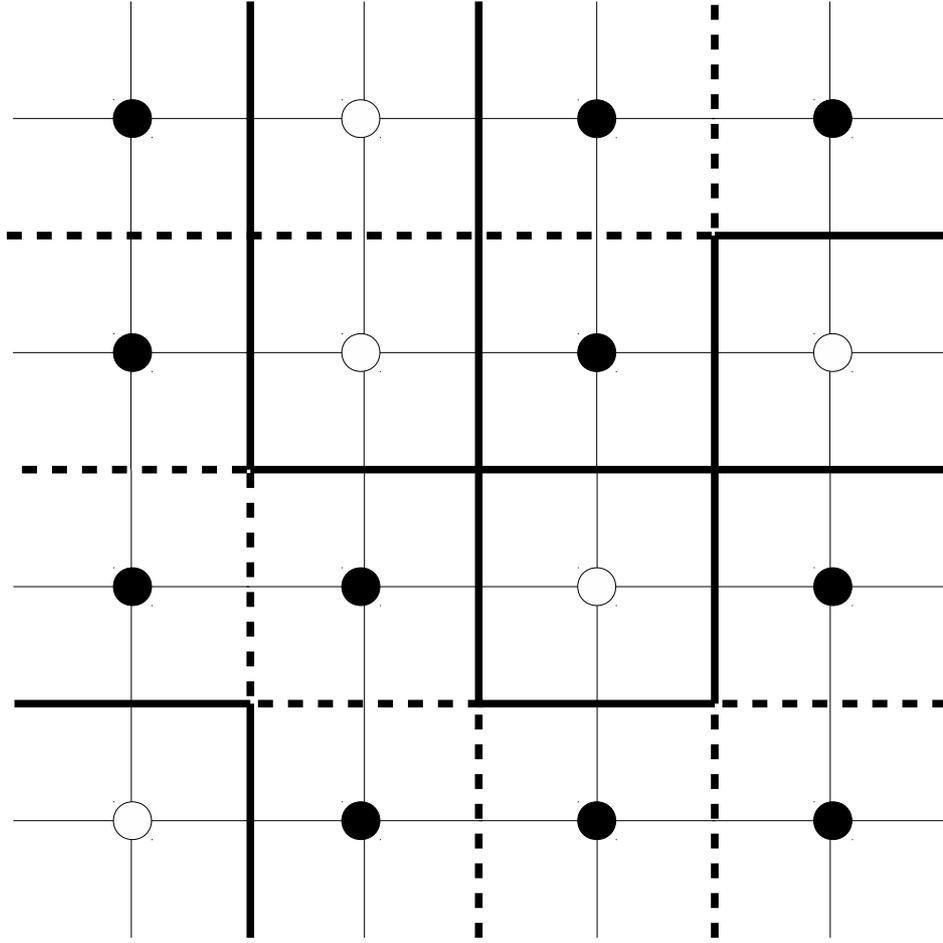


図 2.2: ドメインウォールの一例である。実線は格子を表し、太線は双対格子を表す。白丸は  $\sigma = +1$ 、白丸は  $\sigma = -1$  なるスピン変数を表す。双対格子上で、破線は  $\alpha = +1$ 、実線は  $\alpha = -1$  なるドメインウォール変数を表す。一つの双対格子に入り込む実線の数は必ず偶数になる。

となるので、

$$\frac{1 + \sigma_n \sigma_{n+\hat{1}} \sigma_{n+\hat{1}+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{1}+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{2}} \sigma_n}{2} = 1 \quad (2.13)$$

である。これを式 (2.11) に挿入すると、

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \sum_{\{\alpha\}} \prod_{n,\nu} \delta_{\alpha_{n,n+\hat{\nu}}, \sigma_n \sigma_{n+\hat{\nu}}} \prod_n \frac{1 + \sigma_n \sigma_{n+\hat{1}} \sigma_{n+\hat{1}+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{1}+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{2}} \sigma_{n+\hat{2}} \sigma_n}{2} \cdot \exp \left[ \frac{\beta}{2} \left( \alpha_{n,n+\hat{1}} + \alpha_{n+\hat{1},n+\hat{1}+\hat{2}} + \alpha_{n+\hat{1}+\hat{2},n+\hat{2}} + \alpha_{n+\hat{2},n} \right) \right]$$

となるので、 $\{\sigma\}$ について和をとると、

$$Z = \sum_{\{\alpha\}} \prod_n \frac{1 + \alpha_{n,n+\hat{1}} \alpha_{n+\hat{1},n+\hat{1}+\hat{2}} \alpha_{n+\hat{2},n+\hat{1}+\hat{2}} \alpha_{n,n+\hat{2}}}{2} \cdot \exp \left[ \frac{\beta}{2} \left( \alpha_{n,n+\hat{1}} + \alpha_{n+\hat{1},n+\hat{1}+\hat{2}} + \alpha_{n+\hat{1}+\hat{2},n+\hat{2}} + \alpha_{n+\hat{2},n} \right) \right] \quad (2.14)$$

となる。もはや格子上には変数は残っていないので、双対格子を格子とみなす。このとき、新たな格子点  $n$  につながる第 1 次元方向のリンク上のドメインウォール変数を  $x_n$ 、第 2 次元方向のリンク上のドメインウォール変数を  $t_n$  とする。これらの新しい格子と変数によって、分配関数は

$$Z = \sum_{\{x,t\}} \prod_n \frac{1 + x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}{2} \exp \left[ \frac{\beta}{2} (x_n + t_n + x_{n-\hat{1}} + t_{n-\hat{2}}) \right] \quad (2.15)$$

となる。ここで

$$T_{x_n, t_n, x_{n-\hat{1}}, t_{n-\hat{2}}} = \frac{1 + x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}{2} \exp \left[ \frac{\beta}{2} (x_n + t_n + x_{n-\hat{1}} + t_{n-\hat{2}}) \right] \quad (2.16)$$

とすれば、テンソルネットワーク表示を与えるテンソルが得られる。

## 2.2 テンソルの分解

テンソルの分解では、一つのテンソルを新たな二つのテンソルに近似的に分解する。格子点  $n$  上のテンソルの分解を例として示す。この分解は、二つの自由度を一つの自由度にまとめることで得られる行列

$$M_{x_n t_n, x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}^{13} = T_{x_n t_n, x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} \quad (2.17)$$

に対する SVD

$$M_{x_n t_n, x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}^{13} = \sum_{s=1}^{D^2} U_{x_n t_n, s}^1 \sigma_s^{13} U_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}, s}^{3*} \quad (2.18)$$

によって与えられる。ここで  $x_n, t_n$  の自由度の大きさは一般に  $D$  とした。Ising モデルのテンソルであれば  $D = 2$  である。また、 $U^1, U^3$  はユニタリ行列で、 $\sigma^{13}$  は

$$\sigma_1^{13} \geq \sigma_2^{13} \geq \dots \geq \sigma_{D^2}^{13} \geq 0 \quad (2.19)$$

なる特異値の列である。この  $s$  に対する和を  $D_{\text{cut}} < D^2$  までで打ち切り、

$$M_{x_n t_n, x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}^{13} \simeq \sum_{s=1}^{D_{\text{cut}}} U_{x_n t_n, s}^1 \sigma_s^{13} U_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}, s}^{3*} \quad (2.20)$$

とすることで自由度が大きくなるのを抑える。このとき、SVD の性質から  $s$  が  $D_{\text{cut}}$  で打ちきられた  $U^1, U^3, \sigma^{13}$  は

$$\left| M^{13} - U^1 \text{diag}(\sigma^{13}) U^{3\dagger} \right|^2 \quad (2.21)$$

が最小となるように選ばれている。ここで  $|\cdot|$  は Frobenius ノルムで、ある行列  $M$  に対して

$$|M| = \sqrt{\text{tr}(MM^\dagger)} \quad (2.22)$$

で定義される。この  $U^1, U^3, \sigma^{13}$  によって  $T$  の分解を与えることで、良い近似が得られる。新たに現れた  $s$  を粗視化されたテンソルの自由度とみなす。ここでは

$$T_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} \simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*}=1}^{D_{\text{cut}}} S_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 S_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*}}^3 \quad (2.23)$$

で定義する。ここで

$$S_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 = U_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 \sqrt{\sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}}^{13}} \quad (2.24)$$

$$S_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*}}^3 = U_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*}}^{3*} \sqrt{\sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}}^{13}} \quad (2.25)$$

で定義する。 $n^*$  は粗視化された格子点の座標を表し、 $\hat{1}^*$  は粗視化された格子の第 1 次元方向の単位ベクトルで、元の格子の単位ベクトルとは

$$\hat{1}^* = \hat{1} + \hat{2} \quad (2.26)$$

なる関係がある。

上のように分解したテンソルに隣接するテンソルは、分解の方向を 90 度回転させる。上の  $n$  に対して格子点  $n + \hat{2}$  上のテンソルの分解を例として示す。この分解は、 $M^{13}$  とは成分を入れ替えた行列

$$M_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}}^{24} = T_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_n} \quad (2.27)$$

に対する SVD

$$M_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}}^{24} = \sum_{s=1}^{D^2} U_{t_n x_{n+\hat{2}}, s}^2 \sigma_s^{13} U_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}, s}^{4*} \quad (2.28)$$

によって与えられる。格子点  $n$  における分解と同様に、この  $U^2, U^4, \sigma^{24}$  によって  $T$  の分解を

$$T_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_n} \simeq \sum_{t_{n^*-\hat{2}^*}=1}^{D_{\text{cut}}} S_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}}^2 S_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}}^4 \quad (2.29)$$

で定義する。ここで

$$S_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}}^2 = U_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}}^2 \sqrt{\sigma_{t_{n^*-\hat{2}^*}}^{24}} \quad (2.30)$$

$$S_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}}^4 = U_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}}^{4*} \sqrt{\sigma_{t_{n^*-\hat{2}^*}}^{24}} \quad (2.31)$$

で、 $\hat{2}^*$  は粗視化された格子の第 2 次元方向の単位ベクトルであり、元の格子の単位ベクトルとは

$$\hat{2}^* = \hat{1} - \hat{2} \quad (2.32)$$

なる関係がある。これらの分解を図 2.3 に示す。

標準的な SVD ルーチンの計算量は、SVD をする行列のサイズの 3 乗に比例するので、テンソルの分解に必要な計算量は  $D^6$  に比例することになる。

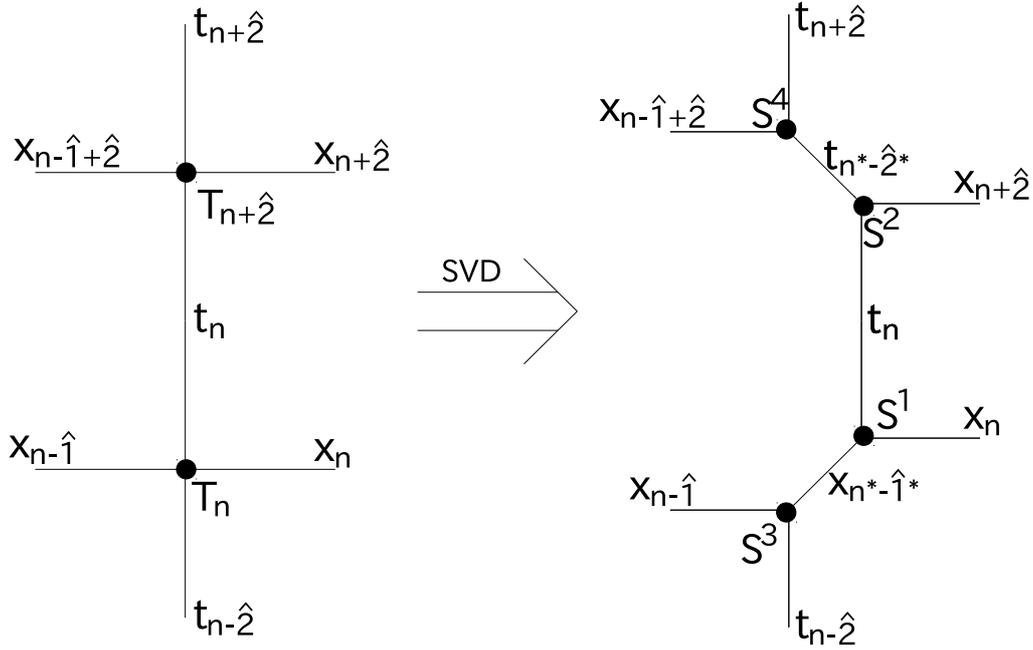


図 2.3: 格子点  $n$  と  $n+2$  における分解の図。粗視化された格子は元の格子から 45 度傾く。

### 2.3 自由度の縮約

テンソルを分解した後、 $S^1, S^2, S^3, S^4$  の元の自由度を縮約することで、粗視化されたテンソルが

$$T_{x_n^* t_n^* x_{n-1}^* t_{n-2}^*} = \sum_{x_n, t_n, x_{n+2}, t_{n+1}} S_{x_n t_n x_{n-1}^*}^1 S_{t_n x_{n+2} t_{n-2}^*}^2 S_{x_{n+2} t_{n+1} x_n^*}^3 S_{t_{n+1} x_n t_n^*}^4 \quad (2.33)$$

と得られる。図 2.4 にこの縮約を示す。式 (2.33) は直接計算しようとする、その計算量は  $D^4 D_{\text{cut}}^4$  に比例する。しかし、まず

$$S_{x_n x_{n-1}^* x_{n+2} t_{n-2}^*}^{12} = \sum_{t_n} S_{x_n t_n x_{n-1}^*}^1 S_{t_n x_{n+2} t_{n-2}^*}^2 \quad (2.34)$$

$$S_{x_{n+2} x_n^* x_n t_n^*}^{34} = \sum_{t_{n+1}} S_{x_{n+2} t_{n+1} x_n^*}^3 S_{t_{n+1} x_n t_n^*}^4 \quad (2.35)$$

と二つのテンソルを一つのテンソルにすると、この計算に必要な計算量はいずれも  $D^3 D_{\text{cut}}^2$  に比例する。その後、

$$T_{x_n^* t_n^* x_{n-1}^* t_{n-2}^*} = \sum_{x_n, x_{n+2}} S_{x_n x_{n-1}^* x_{n+2} t_{n-2}^*}^{12} S_{x_{n+2} x_n^* x_n t_n^*}^{34} \quad (2.36)$$

とすれば、この計算に必要な計算量は  $D^2 D_{\text{cut}}^4$  に比例する。したがって、自由度を縮約するとき、その過程をこのように 2 段階に分けて行うことで必要な計算量のオーダーを落とすことができる。

粗視化された分配関数は、粗視化されたテンソルによるテンソルネットワーク表示として

$$Z = \sum_{\{x,t\}} \prod_{n^*} T_{x_n^* t_{n^*} x_{n^*-\hat{i}^*} t_{n^*-\hat{j}^*}} \quad (2.37)$$

となる。

図 2.5 に TRG の手続きをまとめたものを示す。

## 2.4 ブルートフォース

ここでは、十分に格子点数が小さくなったときに、ブルートフォースに残った自由度を足しあげることについて説明する。第 1 次元方向にも第 2 次元方向にも周期的境界条件が課された  $2^N \times 2^N$  正方格子 ( $N$  は自然数) に対して、 $D_{\text{cut}}$  を固定して TRG を繰り返したものとする。<sup>2</sup> 格子点数が 1,2,4 になるまで TRG を行った場合を取り上げる。<sup>3</sup>

- 格子点数が 1 の場合

最も格子点数が小さくなるまで TRG を行った場合である。TRG の回数は  $2N$  になる。このとき、分配関数は

$$Z = \sum_{x,t} T_{xtxt} \quad (2.38)$$

となる。この場合、単に対応するテンソルの成分を足しあげていくだけなので、ブルートフォースの計算量のオーダーは 1 になる。

- 格子点数が 2 の場合

TRG を  $2N - 1$  回行った場合である。このとき、分配関数は

$$Z = \sum_{\{x,t\}} T_{x_1 t_1 x_2 t_2} T_{x_2 t_2 x_1 t_1} \quad (2.39)$$

となる。この場合、ブルートフォースの計算量は  $D_{\text{cut}}^4$  に比例する。

- 格子点数が 4 の場合

TRG を  $2N - 2$  回行った場合である。分配関数は

$$Z = \sum_{\{x,t\}} T_{x_1 t_1 x_2 t_2} T_{x_3 t_2 x_4 t_1} T_{x_4 t_3 x_3 t_4} T_{x_2 t_4 x_1 t_3} \quad (2.40)$$

となる。これを直接ブルートフォースで計算しようとするれば、その計算量は  $D_{\text{cut}}^8$  に比例する。しかし、2.3 節で行ったように、まず二つのテンソルを

$$C_{x_1 x_2 x_3 x_4} = \sum_{t_1, t_2} T_{x_1 t_1 x_2 t_2} T_{x_3 t_2 x_4 t_1} \quad (2.41)$$

<sup>2</sup>この場合、1 回の TRG の計算量は  $D_{\text{cut}}^6$  に比例する。

<sup>3</sup>これより大きいとブルートフォースの計算量のオーダーが TRG のそれを超える。

と一つのテンソルにする。この計算量は  $D_{\text{cut}}^6$  に比例する。このテンソル  $C$  によって、分配関数は

$$Z = \sum_{\{x\}} C_{x_1 x_2 x_3 x_4} C_{x_4 x_3 x_2 x_1} \quad (2.42)$$

となる。これを分配関数を計算するために必要な計算量は  $D_{\text{cut}}^4$  に比例する。したがって、全体として必要な計算量は  $D_{\text{cut}}^6$  に比例すると考えられる。

図 2.6 にこれらのテンソルネットワークを示す。

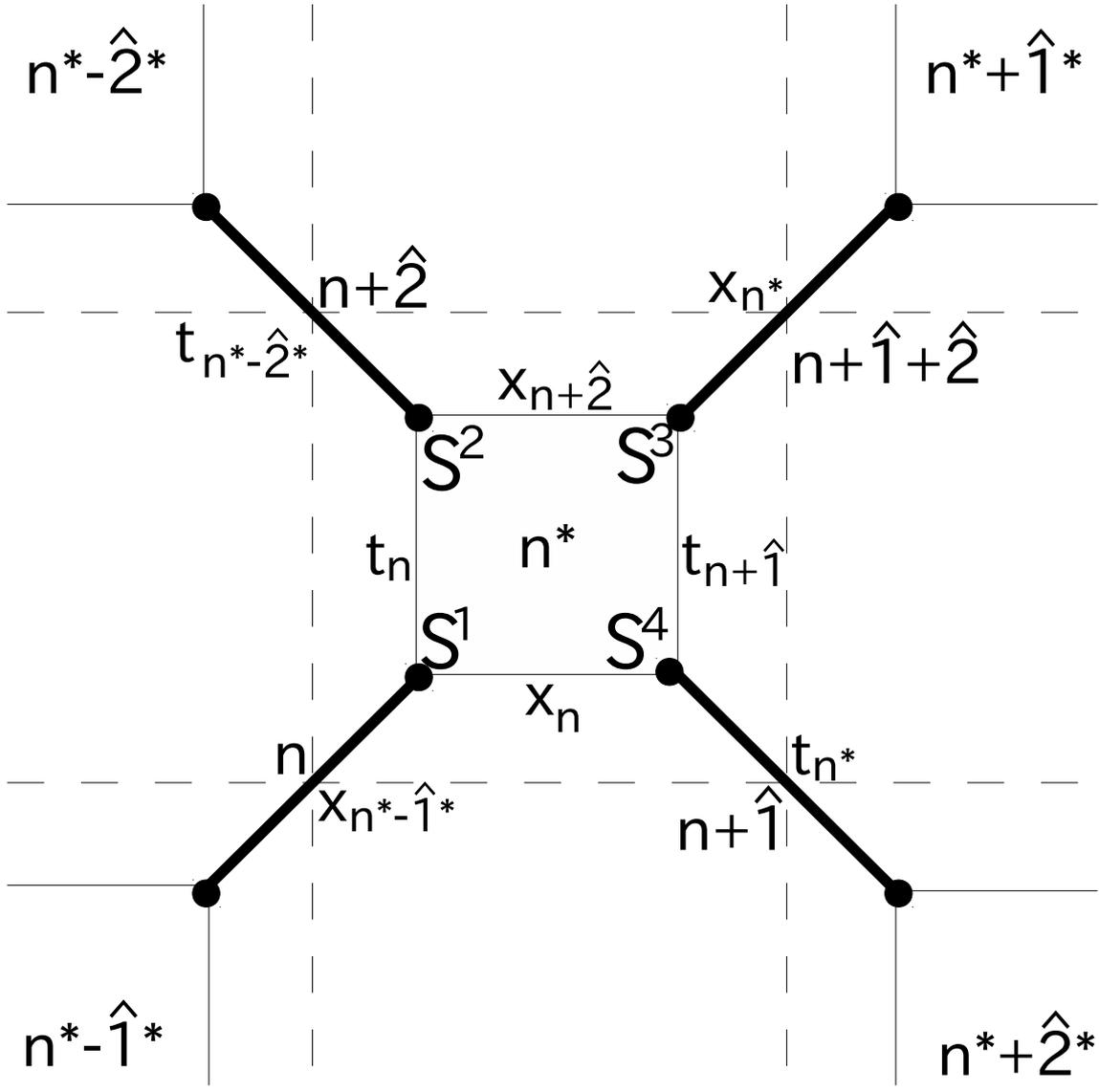


図 2.4: 粗視化された格子点  $n^*$  における縮約の図である。破線は元の格子、実線は縮約される元の自由度、太線は粗視化された格子を示す。

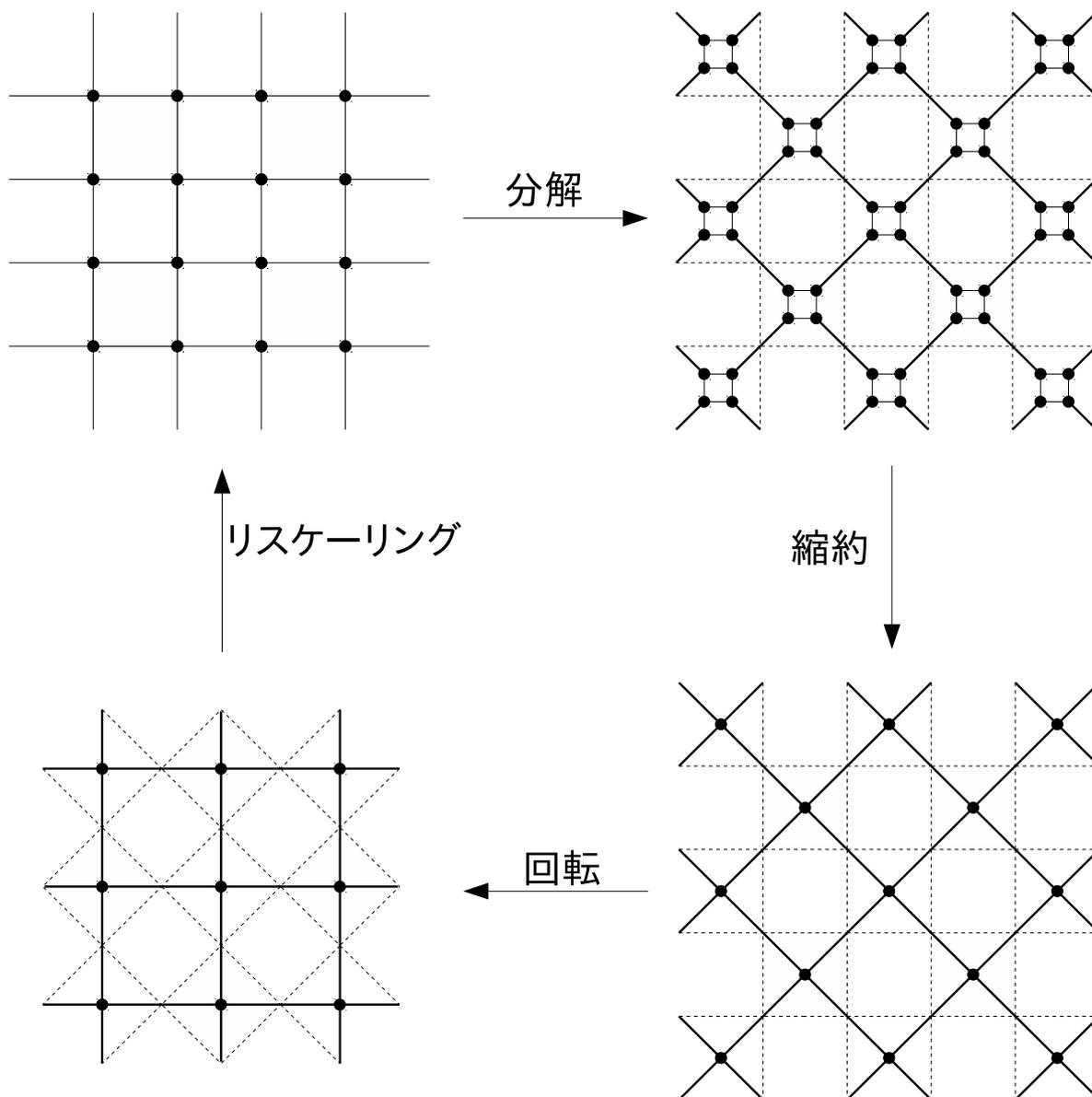


図 2.5: TRG の手続きのまとめ。TRG で粗視化された格子は元の格子から 45 度傾くので回転させる。また、格子間隔は  $\sqrt{2}$  倍になるので、リスケージングする。このとき、格子点の総数は半分になっている。

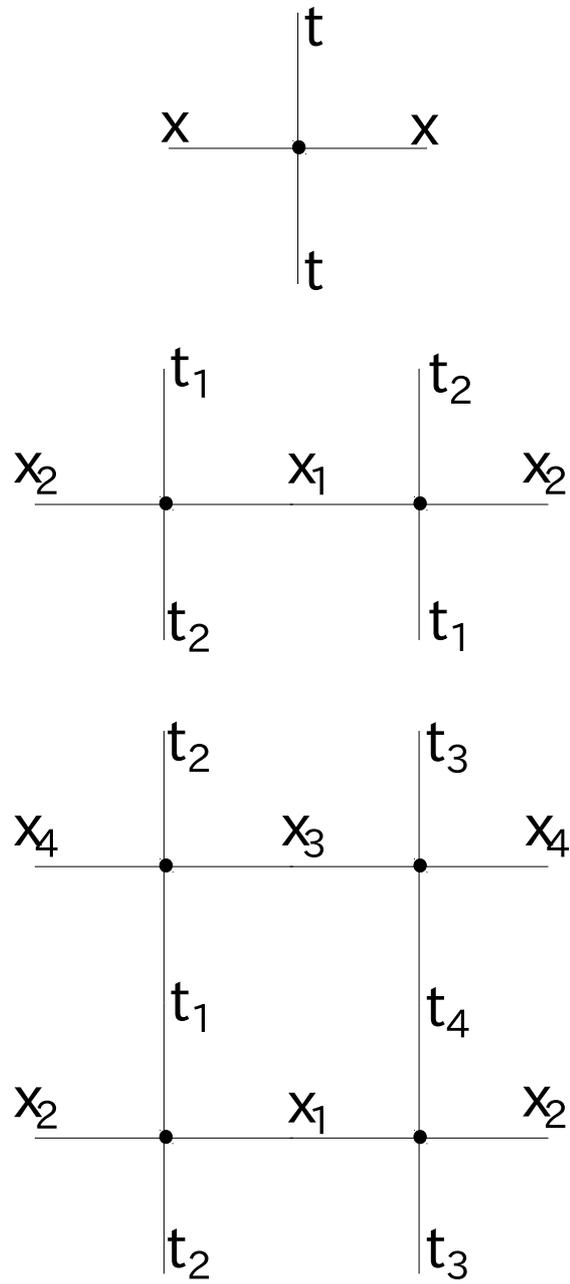


図 2.6: 上から順に格子点数 1、2、4。

# 第3章 Gross-Neveuモデルの Grassmannテンソルくりこみ群

この章では、化学ポテンシャルを持つ Gross-Neveu モデルで GTRG を定式化する。3.1 節では、Wilson フェルミオンによって定式化された化学ポテンシャルを持つ格子 Gross-Neveu モデルの分配関数を与える。3.2 節では、3.1 節で与えた分配関数からテンソルネットワーク表示を求める。3.3 節では、3.2 節で求めたテンソルネットワークに対して GTRG を定式化する。3.4 節では、GTRG における境界条件について扱う。

## 3.1 Gross-Neveu モデル

Euclid 化された連続的な 2 次元時空間における Gross-Neveu モデルのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L}^{\text{GN}} = \bar{\psi}(\not{\partial} + m)\psi - \frac{g^2}{2N} \left[ (\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 \right] \quad (3.1)$$

で定義される。ここで  $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$  は  $N$  個のフレーバーを持つ 2 成分のスピノル場で、 $m$  は質量を、 $g^2$  は結合定数を表す。

格子上での Gross-Neveu モデルの Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{\text{Lat}}^{\text{GN}} = \bar{\psi}_n D \psi_n + \frac{g^2}{2N} \left[ (\bar{\psi}_n \psi_n)^2 + (\bar{\psi}_n i \gamma_5 \psi_n)^2 \right] \quad (3.2)$$

で定義される。ここで  $n = (n_1, n_2)$  は格子点の座標を表す。 $D$  は化学ポテンシャルを含んだ Wilson-Dirac[13, 14, 15] 演算子で、

$$D = \frac{\not{\partial}^+ + \not{\partial}^-}{2} - \frac{\not{\partial}^- \not{\partial}^+}{2} + m \quad (3.3)$$

と与えられる。 $\not{\partial}^+, \not{\partial}^-$  は、第 1 次元については前方、後方差分演算子として

$$\not{\partial}_1^+ \psi_n = \psi_{n+\hat{1}} - \psi_n \quad (3.4)$$

$$\not{\partial}_1^- \psi_n = \psi_n - \psi_{n-\hat{1}} \quad (3.5)$$

と定義する。第 2 次元については、化学ポテンシャル [16] を含んで

$$\not{\partial}_2^+ \psi_n = e^\mu \psi_{n+\hat{2}} - \psi_n \quad (3.6)$$

$$\not{\partial}_2^- \psi_n = \psi_n - e^{-\mu} \psi_{n-\hat{2}} \quad (3.7)$$

と定義する。\$D\$ を行列の形式で表すと、Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_{\text{Lat}}^{\text{GN}} = \sum_{n'} \bar{\psi}_n D_{n,n'} \psi_{n'} + \frac{g^2}{2N} \left[ (\bar{\psi}_n \psi_n)^2 + (\bar{\psi}_n i\gamma_5 \psi_n)^2 \right] \quad (3.8)$$

となり、\$D\_{n,n'}\$ は

$$D_{n,n'} = (m+2)\delta_{n,n'} - \frac{1}{2}(1+\gamma_1)\delta_{n,n'+\hat{1}} - \frac{1}{2}(1-\gamma_1)\delta_{n,n'-\hat{1}} \\ - \frac{1}{2}e^{-\mu}(1+\gamma_2)\delta_{n,n'+\hat{2}} - \frac{1}{2}e^{\mu}(1-\gamma_2)\delta_{n,n'-\hat{2}} \quad (3.9)$$

となる。このなかで、異なる格子点上をつないでいる第2項以降の項をホッピング項と呼ぶ。

以下では、\$N\_1 \times N\_2\$ の2次元格子を考える。また、ここでは簡単のために、第1次元方向にも第2次元方向にも周期的境界条件を課す。化学ポテンシャルを持つ格子 Gross-Neveu モデルの分配関数は

$$Z_P = \int D\psi D\bar{\psi} \exp \left( - \sum_n \mathcal{L}_{\text{Lat}}^{\text{GN}} \right) \quad (3.10)$$

で与えられる。

### 3.2 テンソルネットワーク表示

ここでは、格子 Gross-Neveu モデルの分配関数に対するテンソルネットワーク表示を求める。以下では、フレーバー数を \$N=1\$ に制限し、ガンマ行列の表現として

$$\gamma_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\gamma_2 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

を選ぶ。このようにガンマ行列を選ぶと、第2次元方向のホッピング項は

$$\frac{1}{2}e^{-\mu}\bar{\psi}_n(1+\gamma_2)\psi_{n-\hat{2}} = e^{-\mu}\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n-\hat{2},1}, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{2}e^{\mu}\bar{\psi}_n(1-\gamma_2)\psi_{n+\hat{2}} = e^{\mu}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n+\hat{2},2}, \quad (3.15)$$

となって、スピノル空間に対して対角的になる。一方、第1次元方向のホッピング項については

$$\bar{\psi}_n(1+\gamma_1)\psi_{n-\hat{1}} = \bar{\psi}_n \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \psi_{n-\hat{1}}, \quad (3.16)$$

$$\bar{\psi}_n(1-\gamma_1)\psi_{n+\hat{1}} = \bar{\psi}_n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \psi_{n+\hat{1}} \quad (3.17)$$

となるので、対角的にはなっていない。しかし、新たな基底として

$$\chi_{n,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n,1} + \psi_{n,2}), \quad (3.18)$$

$$\chi_{n,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n,1} - \psi_{n,2}), \quad (3.19)$$

$$\bar{\chi}_{n,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_{n,1} + \bar{\psi}_{n,2}), \quad (3.20)$$

$$\bar{\chi}_{n,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_{n,1} - \bar{\psi}_{n,2}), \quad (3.21)$$

をとることで

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}_n(1 + \gamma_1)\psi_{n-\hat{1}} = \bar{\chi}_{n,1}\chi_{n-\hat{1},1}, \quad (3.22)$$

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}_n(1 - \gamma_1)\psi_{n+\hat{1}} = \bar{\chi}_{n,2}\chi_{n+\hat{1},2} \quad (3.23)$$

と対角的にすることができる。また、この  $\chi, \bar{\chi}$  についても反交換関係

$$\{\chi_{n,i}, \bar{\chi}_{n',j}\} = \{\chi_{n,i}, \chi_{n',j}\} = \{\bar{\chi}_{n,i}, \bar{\chi}_{n',j}\} = 0, \quad \forall n, n', i, j \quad (3.24)$$

が満たされている。この第1次元方向のホッピング項への変数変換を施すと、Lagrangian 密度は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Lat}}^{\text{GN}} = & (m+2)\bar{\psi}_n\psi_n - 2g^2\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2} \\ & - \bar{\chi}_{n,1}\chi_{n-\hat{1},1} - \bar{\chi}_{n,2}\chi_{n+\hat{1},2} - e^{-\mu}\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n-\hat{2},1} - e^{\mu}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n+\hat{2},2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

と書き直される。したがって、分配関数は

$$\begin{aligned} Z_{\text{P}} &= \int D\psi D\bar{\psi} \exp\left(-\sum_n \mathcal{L}_{\text{Lat}}^{\text{GN}}\right) \\ &= \int D\psi D\bar{\psi} \prod_n e^{-(m+2)\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}} e^{-(m+2)\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2}} e^{2g^2\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2}} \\ &\quad \cdot e^{\bar{\chi}_{n+\hat{1},1}\chi_{n,1}} e^{\bar{\chi}_{n,2}\chi_{n+\hat{1},2}} e^{-\mu\bar{\psi}_{n+\hat{2},1}\psi_{n,1}} e^{\mu\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n+\hat{2},2}} \end{aligned} \quad (3.26)$$

で与えられる。

テンソルネットワーク表示を得るための手続きとしては、次のようなものがある。

- 被積分関数の中の各指数関数を展開し、展開の次数として現れる整数を新たな自由度とする。
- 元の自由度を積分すると、新たな自由度に依存した形で結果が得られる。これをテンソルの成分とみなす。

まず、被積分関数の中にある各指数関数を級数展開する。このとき、2乗すると0になるという Grassmann 数の性質から 0 次の項と 1 次の項だけが残るので、

$$\begin{aligned}
Z_P = & \sum_{\{s,x,t=0,1\}} \int D\psi D\bar{\psi} \prod_n \\
& \cdot [-(m+2)\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}]^{s_{n,1}} [-(m+2)\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2}]^{s_{n,2}} (2g^2\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2})^{s_{n,3}} \\
& \cdot (\bar{\chi}_{n+\hat{1},1}\chi_{n,1})^{x_{n,1}} (\bar{\chi}_{n,2}\chi_{n+\hat{1},2})^{x_{n,2}} (e^{-\mu}\bar{\psi}_{n+\hat{2},1}\psi_{n,1})^{t_{n,1}} (e^{\mu}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n+\hat{2},2})^{t_{n,2}}
\end{aligned} \tag{3.27}$$

となる。ここで  $\{s, x, t\}$  は展開の次数で、 $\{x, t\}$  はテンソルの添字に対応する新たな自由度になる。 $\{s\}$  については、一つの格子点上の Grassmann 数にだけかかる指数であり、各格子点において足し合わせる事ができるので、

$$\begin{aligned}
\Psi_n = & \sum_{s_{n,1}, s_{n,2}, s_{n,3}=0,1} [-(m+2)\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}]^{s_{n,1}} [-(m+2)\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2}]^{s_{n,2}} \\
& \cdot (2g^2\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2})^{s_{n,3}}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

として、

$$\begin{aligned}
Z_P = & \sum_{\{x,t\}} \int D\psi D\bar{\psi} \prod_n \Psi_n \\
& \cdot (\bar{\chi}_{n+\hat{1},1}\chi_{n,1})^{x_{n,1}} (\bar{\chi}_{n,2}\chi_{n+\hat{1},2})^{x_{n,2}} (e^{-\mu}\bar{\psi}_{n+\hat{2},1}\psi_{n,1})^{t_{n,1}} (e^{\mu}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n+\hat{2},2})^{t_{n,2}}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

と表す。

次に、元の自由度である  $\psi, \bar{\psi}$  を積分することで、Gross-Neveu モデルの分配関数に対するテンソルネットワーク表示が得られる。この積分を行うとき、Grassmann 数の反交換関係からくる符号を扱いやすくするために、共通のべき指数を持つ Grassmann 数の組になっている構造を保つようにする。そのために、新しい Grassmann 変数  $\{\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}\}$  を導入する。格子点  $n$  上の Grassmann 変数  $\bar{\psi}_n, \psi_n$  を積分する場合、

$$(\bar{\chi}_{n+\hat{1},1}\chi_{n,1})^{x_{n,1}} = (\chi_{n,1}d\eta_{m,1})^{x_{n,1}} (\bar{\chi}_{n+\hat{1},1}\eta_{m,1})^{x_{n,1}}, \tag{3.30}$$

$$(\bar{\chi}_{n,2}\chi_{n+\hat{1},2})^{x_{n,2}} = (\bar{\chi}_{n,2}d\bar{\eta}_{m,2})^{x_{n,2}} (\bar{\eta}_{m,2}\chi_{n+\hat{1},2})^{x_{n,2}}, \tag{3.31}$$

$$(e^{-\mu}\bar{\psi}_{n+\hat{2},1}\psi_{n,1})^{t_{n,1}} = (e^{-\frac{\mu}{2}}\psi_{n,1}d\xi_{n,1})^{t_{n,1}} (e^{-\frac{\mu}{2}}\bar{\psi}_{n+\hat{2},1}\xi_{n,1})^{t_{n,1}}, \tag{3.32}$$

$$(e^{\mu}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n+\hat{2},2})^{t_{n,2}} = (e^{\frac{\mu}{2}}\bar{\psi}_{n,2}d\bar{\xi}_{n,2})^{t_{n,2}} (\bar{\xi}_{n,2}e^{\frac{\mu}{2}}\psi_{n+\hat{2},2})^{t_{n,2}}, \tag{3.33}$$

$$(\bar{\chi}_{n,1}\chi_{n-\hat{1},1})^{x_{n-\hat{1},1}} = (\bar{\chi}_{n,1}d\bar{\eta}_{m,1})^{x_{n-\hat{1},1}} (\bar{\eta}_{m,1}\chi_{n-\hat{1},1})^{x_{n-\hat{1},1}}, \tag{3.34}$$

$$(\bar{\chi}_{n-\hat{1},2}\chi_{n,2})^{x_{n-\hat{1},2}} = (\chi_{n,2}d\eta_{m,2})^{x_{n-\hat{1},2}} (\bar{\chi}_{n-\hat{1},2}\eta_{m,2})^{x_{n-\hat{1},2}}, \tag{3.35}$$

$$(e^{-\mu}\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n-\hat{2},1})^{t_{n-\hat{2},1}} = (e^{-\frac{\mu}{2}}\bar{\psi}_{n,1}d\bar{\xi}_{n,1})^{t_{n-\hat{2},1}} (\bar{\xi}_{n,1}e^{-\frac{\mu}{2}}\psi_{n-\hat{2},1})^{t_{n-\hat{2},1}}, \tag{3.36}$$

$$(e^{\mu}\bar{\psi}_{n-\hat{2},2}\psi_{n,2})^{t_{n-\hat{2},2}} = (e^{\frac{\mu}{2}}\psi_{n,2}d\xi_{n,2})^{t_{n-\hat{2},2}} (e^{\frac{\mu}{2}}\bar{\psi}_{n-\hat{2},2}\xi_{n,2})^{t_{n-\hat{2},2}} \tag{3.37}$$

と  $\eta_n, \xi_n, \bar{\eta}_n, \bar{\xi}_n$  を挿入する。これによって、それぞれの Grassmann 数の組にある異なる格子点にある元の自由度を分離できる。このとき、化学ポテンシャルを含んだ指数関数も二つに分けることにする。分配関数の中の  $\psi_n$  と  $\bar{\psi}_n$  に関わる全ての寄与を符号が現れることなく集めることができ、その積分は

$$\begin{aligned} & \int d\psi_{n,1} d\bar{\psi}_{n,1} d\psi_{n,2} d\bar{\psi}_{n,2} \Psi_n \\ & \cdot (\chi_{n,1} d\eta_{n,1})^{x_{n,1}} (\bar{\chi}_{n,2} d\bar{\eta}_{n,2})^{x_{n,2}} \left( e^{-\frac{\mu}{2}} \psi_{n,1} d\xi_{n,1} \right)^{t_{n,1}} \left( e^{\frac{\mu}{2}} \bar{\psi}_{n,2} d\bar{\xi}_{n,2} \right)^{t_{n,2}} \\ & \cdot (\bar{\chi}_{n,1} d\bar{\eta}_{n,1})^{x_{n-1,1}} (\chi_{n,2} d\eta_{n,2})^{x_{n-1,2}} \left( e^{-\frac{\mu}{2}} \bar{\psi}_{n,1} d\bar{\xi}_{n,1} \right)^{t_{n-2,1}} \left( e^{\frac{\mu}{2}} \psi_{n,2} d\xi_{n,2} \right)^{t_{n-2,2}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。他の格子点  $n' \neq n$  上の元の Grassmann 数  $\psi_{n'}, \bar{\psi}_{n'}$  はここにはない。積分を行うときは組の構造が壊れて符号が現れることになるが、これは計算が可能な程度である。その積分の結果は、新しい Grassmann 数の測度を残して、べき指数に依存するので、それを表すテンソルとして  $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  を

$$(3.38) = T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} d\bar{\eta}_{n,2}^{x_{n,2}} d\eta_{n,1}^{x_{n,1}} d\bar{\xi}_{n,2}^{t_{n,2}} d\xi_{n,1}^{t_{n,1}} d\eta_{n,2}^{x_{n-1,2}} d\bar{\eta}_{n,1}^{x_{n-1,1}} d\xi_{n,2}^{t_{n-2,2}} d\bar{\xi}_{n,1}^{t_{n-2,1}} \quad (3.39)$$

で定義する。以下では、 $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  をボソンテンソルと呼ぶ。ここでボソンテンソルの添字は、2成分をまとめて

$$x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}) \quad (3.40)$$

$$t_n = (t_{n,1}, t_{n,2}) \quad (3.41)$$

としている。Grassmann 数の積分の性質

$$\int d\psi_n 1 = \int d\bar{\psi}_n 1 = 0, \quad \forall n \quad (3.42)$$

から、 $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  は

$$\left[ \sum_{i=1}^2 \left( x_{n,i} + t_{n,i} + x_{n-1,i} + t_{n-2,i} \right) \right] \bmod 2 = 0 \quad (3.43)$$

なる成分のみ 0 でない値を持ちうる。 $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  の明示的な形は appendix A で与える。この操作を他の全ての格子点で繰り返すことで、 $\{\eta, \bar{\eta}, \chi, \bar{\chi}\}$  で書き換えられた分配関数のテンソルネットワーク表示が得られる。係数と Grassmann 数をまとめたテンソルを

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} \\ & = T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} d\bar{\eta}_{n,2}^{x_{n,2}} d\eta_{n,1}^{x_{n,1}} d\bar{\xi}_{n,2}^{t_{n,2}} d\xi_{n,1}^{t_{n,1}} d\eta_{n,2}^{x_{n-1,2}} d\bar{\eta}_{n,1}^{x_{n-1,1}} d\xi_{n,2}^{t_{n-2,2}} d\bar{\xi}_{n,1}^{t_{n-2,1}} \\ & \cdot \left( \bar{\eta}_{n+1,1} \eta_{n,1} \right)^{x_{n,1}} \left( \bar{\eta}_{n,2} \eta_{n+1,2} \right)^{x_{n,2}} \left( \bar{\xi}_{n+2,1} \xi_{n,1} \right)^{t_{n,1}} \left( \bar{\xi}_{n,2} \xi_{n+2,2} \right)^{t_{n,2}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

とすると、

$$Z_P = \sum_{\{x,t\}} \int \prod_n \mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}, \quad (3.45)$$

となる。

### 3.3 Grassmann テンソルくりこみ群

この節では、前節で得られた Gross-Neveu モデルのテンソルネットワークに対する GTRG の手順を示す。テンソルに Grassmann 数が含まれている場合、分解したテンソルを縮約をとるために自由に配列を変えることはできず、単純に TRG を適用すれば反交換関係からくる符号の問題が生じる。GTRG はそのような符号が現れないように Grassmann 数を含めて TRG を定式化した手法である。

#### 3.3.1 テンソルの分解

まず、通常の TRG と同様にボソンテンソル  $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  を SVD によって分解する。格子点  $n$  において、

$$\begin{aligned} M_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}^{13} &= T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} \\ &\simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}=1}^{D_{\text{cut}}} U_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^1 \sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^{13} U_{x_{n-1} t_{n-2} x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^{3*} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} \simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}=1}^{D_{\text{cut}}} S_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^1 S_{x_{n-1} t_{n-2} x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^3 \quad (3.47)$$

$$S_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^1 = U_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^1 \sqrt{\sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^{13}} \quad (3.48)$$

$$S_{x_{n-1} t_{n-2} x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^3 = U_{x_{n-1} t_{n-2} x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^{3*} \sqrt{\sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}}^{13}} \quad (3.49)$$

となる。Grassmann 数は二つの部分に分け、粗視化された格子上に符号の因子を扱うために、粗視化された格子上の点  $n^*, n^* - \hat{1}^*$  に Grassmann 数  $\bar{\eta}_{n^*}, \eta_{n^*-\hat{1}^*}$  を導入する。これによって、

$$\begin{aligned} &d\bar{\eta}_{n,2}^{x_{n,2}} d\eta_{n,1}^{x_{n,1}} d\bar{\xi}_{n,2}^{t_{n,2}} d\xi_{n,1}^{t_{n,1}} d\eta_{n,2}^{x_{n-1,2}} d\bar{\eta}_{n,1}^{x_{n-1,1}} d\xi_{n,2}^{t_{n-2,2}} d\bar{\xi}_{n,1}^{t_{n-2,1}} \\ &\cdot \left(\bar{\eta}_{n+1,1} \eta_{n,1}\right)^{x_{n,1}} \left(\bar{\eta}_{n,2} \eta_{n+1,2}\right)^{x_{n,2}} \left(\bar{\xi}_{n+2,1} \xi_{n,1}\right)^{t_{n,1}} \left(\bar{\xi}_{n,2} \xi_{n+2,2}\right)^{t_{n,2}} \\ &= \left(D_{x_n t_n}^1 d\bar{\eta}_{n^*}^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}}\right) \left(D_{x_{n-1} t_{n-2}}^3 d\eta_{n^*-\hat{1}^*}^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}}\right) \left(\bar{\eta}_{n^*} \eta_{n^*-\hat{1}^*}\right)^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる。ここで  $D^1$  と  $D^3$  は

$$\begin{aligned} D_{x_n t_n}^1 &= d\bar{\eta}_{n,2}^{x_{n,2}} d\eta_{n,1}^{x_{n,1}} d\bar{\xi}_{n,2}^{t_{n,2}} d\xi_{n,1}^{t_{n,1}} \\ &\cdot \left(\bar{\eta}_{n+1,1} \eta_{n,1}\right)^{x_{n,1}} \left(\bar{\eta}_{n,2} \eta_{n+1,2}\right)^{x_{n,2}} \left(\bar{\xi}_{n+2,1} \xi_{n,1}\right)^{t_{n,1}} \left(\bar{\xi}_{n,2} \xi_{n+2,2}\right)^{t_{n,2}} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$D_{x_{n-1} t_{n-2}}^3 = d\eta_{n,2}^{x_{n-1,2}} d\bar{\eta}_{n,1}^{x_{n-1,1}} d\xi_{n,2}^{t_{n-2,2}} d\bar{\xi}_{n,1}^{t_{n-2,1}} \quad (3.52)$$

で定義する。また、 $n^*$  と  $n^* - \hat{1}^*$  をつなぐリンク上に新たな Grassmann 数のべき指数として  $x_{n^* - \hat{1}^*, f}$  が導入される。これは

$$x_{n^* - \hat{1}^*, f} = \left[ \sum_{i=1}^2 (x_{n,i} + t_{n,i}) \right] \bmod 2 \quad (3.53)$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^2 (x_{n-\hat{1},i} + t_{n-\hat{2},i}) \right] \bmod 2 \quad (3.54)$$

とすることで、 $D^1$  と  $d\bar{\eta}$ 、 $D^3$  と  $d\eta$  が偶数個の Grassmann 数を持つ組となる。なお、式 (3.53) と式 (3.54) が等号で結ばれるのは式 (3.43) による。これらの定義から

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} &\simeq \sum_{x_{n^* - \hat{1}^*, b}=1}^{D_{\text{cut}}} \sum_{x_{n^* - \hat{1}^*, f}=0}^1 \int \\ &\mathcal{S}_{x_n t_n x_{n^* - \hat{1}^*}}^1 \mathcal{S}_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^* - \hat{1}^*}}^3 (\bar{\eta}_{n^*} \eta_{n^* - \hat{1}^*})^{x_{n^* - \hat{1}^*, f}} \\ &\cdot \delta_{\sum_i (x_{n,i} + t_{n,i}) \bmod 2, x_{n^* - \hat{1}^*, f}} \delta_{\sum_i (x_{n-\hat{1},i} + t_{n-\hat{2},i}) \bmod 2, x_{n^* - \hat{1}^*, f}} \end{aligned} \quad (3.55)$$

と分解される。ここで

$$x_{n^*} = (x_{n^*, b}, x_{n^*, f}) \quad (3.56)$$

であり、

$$\mathcal{S}_{x_n t_n x_{n^* - \hat{1}^*}}^1 = \mathcal{S}_{x_n t_n x_{n^* - \hat{1}^*, b}}^1 D_{x_n t_n}^1 d\bar{\eta}_{n^*}^{x_{n^* - \hat{1}^*, f}}, \quad (3.57)$$

$$\mathcal{S}_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^* - \hat{1}^*}}^3 = \mathcal{S}_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^* - \hat{1}^*, b}}^3 D_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}^3 d\eta_{n^* - \hat{1}^*}^{x_{n^* - \hat{1}^*, f}} \quad (3.58)$$

である。分解したテンソル  $\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^3$  は Grassmann 数を含んでいるが、それらはそれぞれ  $D_1$  と  $d\bar{\eta}$ 、 $D_3$  と  $d\eta$  の組なので、必ず偶数個含まれている。そのため、 $\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^3$  は自由に動かすことができる。

90 度回転させた分解についても同様に与えられる。新たな Grassmann 数として  $\bar{\xi}_{n^*}$  と  $\xi_{n^* - \hat{2}^*}$  を導入することで、格子点  $n + \hat{2}$  上のテンソル  $\mathcal{T}_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_n}$  を

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_n} &\simeq \sum_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}=1}^{D_{\text{cut}}} \sum_{t_{n^* - \hat{2}^*, f}=0}^1 \int \\ &\cdot \mathcal{S}_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^* - \hat{2}^*}}^2 \mathcal{S}_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^* - \hat{2}^*}}^4 (\bar{\xi}_{n^*} \xi_{n^* - \hat{2}^*})^{t_{n^* - \hat{2}^*, f}} \\ &\cdot \delta_{\sum_i (t_{n,i} + x_{n+\hat{2},i}) \bmod 2, t_{n^* - \hat{2}^*, f}} \delta_{\sum_i (t_{n+\hat{2},i} + x_{n-\hat{1}+\hat{2},i}) \bmod 2, t_{n^* - \hat{2}^*, f}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

と分解する。ここで  $\mathcal{S}^2$  と  $\mathcal{S}^4$  は

$$\mathcal{S}_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^* - \hat{2}^*}}^2 = \mathcal{S}_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^* - \hat{2}^*, b}}^2 D_{t_n x_{n+\hat{2}}}^2 d\bar{\xi}_{n^*}^{t_{n^* - \hat{2}^*, f}} \quad (3.60)$$

$$\mathcal{S}_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^* - \hat{2}^*}}^4 = \mathcal{S}_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^* - \hat{2}^*, b}}^4 D_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}}^4 d\xi_{n^* - \hat{2}^*}^{t_{n^* - \hat{2}^*, f}} \quad (3.61)$$

であり、 $D_{t_n x_{n+\hat{2}}}^2$  と  $D_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}}^4$  は

$$D_{t_n x_{n+\hat{2}}}^2 = d\xi_{n+\hat{2},2}^{t_n,2} d\bar{\xi}_{n+\hat{2},1}^{t_n,1} d\bar{\eta}_{n+\hat{2},2}^{x_{n+\hat{2},2}} d\eta_{n+\hat{2},1}^{x_{n+\hat{2},1}} \cdot \left(\bar{\eta}_{n+\hat{1}+\hat{2},1} \eta_{n+\hat{2},1}\right)^{x_{n+\hat{2},1}} \left(\bar{\eta}_{n+\hat{2},2} \eta_{n+\hat{1}+\hat{2},2}\right)^{x_{n+\hat{2},2}}, \quad (3.62)$$

$$D_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}}^4 = d\bar{\xi}_{n+\hat{2},2}^{t_{n+\hat{2}},2} d\xi_{n+\hat{2},1}^{t_{n+\hat{2}},1} d\eta_{n+\hat{2},2}^{x_{n-\hat{1}+\hat{2},2}} d\bar{\eta}_{n+\hat{2},1}^{x_{n-\hat{1}+\hat{2},1}} \cdot \left(\bar{\xi}_{n+2\cdot\hat{2},1} \xi_{n+\hat{2},1}\right)^{t_{n+\hat{2},1}} \left(\bar{\xi}_{n+2\cdot\hat{2},2} \xi_{n+2\cdot\hat{2},2}\right)^{t_{n+\hat{2},2}} \quad (3.63)$$

である。また、 $t_{n^*-\hat{2},f}$  は  $D^2$  と  $d\bar{\xi}$ 、 $D^4$  と  $d\xi$  が偶数個の Grassmann 数を含む組になるように

$$t_{n^*-\hat{2},f} = \left[ \sum_{i=1}^2 \left( t_{n,i} + x_{n+\hat{2},i} \right) \right] \bmod 2 \quad (3.64)$$

$$= \left[ \sum_{i=1}^2 \left( t_{n+\hat{2},i} + x_{n-\hat{1}+\hat{2},i} \right) \right] \bmod 2 \quad (3.65)$$

とする。ボソンテンソルの分解から生じる  $S^2$  と  $S^4$  は、 $S^1, S^3$  の場合と同様に SVD によって

$$M_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}} = (-1)^{t_n,1+t_n,2} T_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_n} \simeq \sum_{t_{n^*-\hat{2},b}=1}^{D_{\text{cut}}} U_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_{n^*-\hat{2},b}}^2 \sigma_{t_{n^*-\hat{2},b}}^{24} U_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}, t_{n^*-\hat{2},b}}^{4*} \quad (3.66)$$

$$T_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_n} \simeq \sum_{t_{n^*-\hat{2},b}} S_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2},b}}^2 S_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2},b}}^4 \quad (3.67)$$

$$S_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2},b}}^2 = U_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2},b}}^2 \sqrt{\sigma_{t_{n^*-\hat{2},b}}^{24}} \quad (3.68)$$

$$S_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2},b}}^4 = U_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2},b}}^{4*} \sqrt{\sigma_{t_{n^*-\hat{2},b}}^{24}} \quad (3.69)$$

で与えられる。ここで通常の TRG の場合に加えて符号の因子があるのは、Grassmann 数の測度の入れ替えによって符号が生じるためである。

### 3.3.2 自由度の縮約

前小節で定式化したテンソルの分解によって、 $S^1, S^2, S^3, S^4$  は偶数個の Grassmann 数を含んでいるので、縮約をとるために自由に順序を入れ替えられるようになった。そのため、粗視化されたテンソルは、必要な  $S^1, S^2, S^3, S^4$  を集めて元の自由度の縮約と Grassmann

数の積分をとることで、

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{x_n^* t_n^* x_{n^*-\hat{1}}^* t_{n^*-\hat{2}}^*} &= \sum_{x_n, t_n, x_{n+\hat{2}}, t_{n+\hat{1}}} \int \mathcal{S}_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}}^*}^1 \mathcal{S}_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}}^*}^2 \mathcal{S}_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{1}} x_n^*}^3 \mathcal{S}_{t_{n+\hat{1}} x_n t_n^*}^4 \\
&\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^*+\hat{1}} \eta_{n^*})^{x_n^*, f} (\bar{\xi}_{n^*+\hat{2}} \xi_{n^*})^{t_n^*, f} \\
&\quad \cdot \delta_{\sum_i (x_{n,i} + t_{n,i}) \bmod 2, x_{n^*-\hat{1}}^*, f} \delta_{\sum_i (t_{n,i} + x_{n+\hat{2},i}) \bmod 2, t_{n^*-\hat{2}}^*, f} \\
&\quad \cdot \delta_{\sum_i (x_{n+\hat{2},i} + t_{n+\hat{1},i}) \bmod 2, x_{n^*}, f} \delta_{\sum_i (t_{n+\hat{1},i} + x_{n,i}) \bmod 2, t_n^*, f} \quad (3.70)
\end{aligned}$$

によって得られる。この縮約と積分をとるためには、元の Grassmann 数の測度の順序の入れ替えが必要で、そこから符号がでてくることになるが、それらは計算が可能な程度のものである。それらの符号も含めた結果を粗視化されたボソンテンソル  $T_{x_n^* t_n^* x_{n^*-\hat{1}}^* t_{n^*-\hat{2}}^*}$  とすれば、粗視化されたテンソルは

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{x_n^* t_n^* x_{n^*-\hat{1}}^* t_{n^*-\hat{2}}^*} &= T_{x_n^* t_n^* x_{n^*-\hat{1}}^* t_{n^*-\hat{2}}^*} d\eta^{x_n^*, f} d\xi^{t_n^*, f} d\bar{\eta}^{x_{n^*-\hat{1}}^*, f} d\bar{\xi}^{t_{n^*-\hat{2}}^*, f} \\
&\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^*+\hat{1}} \eta_{n^*})^{x_n^*, f} (\bar{\xi}_{n^*+\hat{2}} \xi_{n^*})^{t_n^*, f} \quad (3.71)
\end{aligned}$$

となる。ここで得られた粗視化されたボソンテンソルには、元のボソンテンソルと同様に、

$$(x_{n^*, f} + t_{n^*, f} + x_{n^*-\hat{1}, f} + t_{n^*-\hat{2}, f}) \bmod 2 = 0 \quad (3.72)$$

なる成分のみ 0 でない値を持ちうるという条件がある。

### 3.4 境界条件

以下では、第 1 次元方向に周期的境界条件

$$\psi_{n+N_1 \hat{1}} = \psi_n \quad (3.73)$$

$$\bar{\psi}_{n+N_1 \hat{1}} = \bar{\psi}_n \quad (3.74)$$

を課し、第 2 次元方向に反周期的境界条件

$$\psi_{n+N_2 \hat{2}} = -\psi_n \quad (3.75)$$

$$\bar{\psi}_{n+N_2 \hat{2}} = -\bar{\psi}_n \quad (3.76)$$

を課す。ここでは、この非等方的な境界条件による GTRG への影響を示す。結論としては、ここでの定式化では、奇数回のくりこみを行うと非自明な条件が現れるが、偶数回のくりこみを行うと元の境界条件に戻る。このことを 1 回目と 2 回目のくりこみに分けて説明する。

#### 3.4.1 1 回目のくりこみ

まず、上のような境界条件によって、分配関数のテンソルネットワーク表示は

$$B_{t_n' t_{n-\hat{2}}} = \begin{cases} (-1)^{t_{n,1} + t_{n,2}} \delta_{t_n', t_{n-\hat{2}}} & \text{if } n_2 = 0, \\ \delta_{t_n', t_{n-\hat{2}}} & \text{else.} \end{cases} \quad (3.77)$$

として

$$Z = \sum_{\{x,t,t'\}} \int \prod_n \mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-1} t'_n} B_{t'_n t_n - \hat{2}} \quad (3.78)$$

となる。この変更は、テンソルの分解には影響を及ぼさないが、自由度の縮約では  $B$  も含めて行わなければならない。その結果、 $n_2 = N_2 - 1$  なる格子点上で縮約される粗視化されたテンソルは修正を受ける。それを  $\mathcal{A}_{x_n^* t_n^* x_{n-1}^* t_{n-2}^*}^{(1)}$  とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{x_n^* t_n^* x_{n-1}^* t_{n-2}^*}^{(1)} &= \sum_{x_n, t_n, x_{n+2}, t_{n+1}} \int (-1)^{t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n+1,1} + t_{n+1,2}} \\ &\quad \cdot \mathcal{S}_{x_n t_n x_{n-1}^*}^1 \mathcal{S}_{t_n x_{n+2} t_{n-2}^*}^2 \mathcal{S}_{x_{n+2} t_{n+1} x_n^*}^3 \mathcal{S}_{t_{n+1} x_n t_n^*}^4 \\ &\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^*+1} \eta_{n^*})^{x_n^*, f} (\bar{\xi}_{n^*+2} \xi_{n^*})^{t_n^*, f} \\ &\quad \cdot \delta_{\sum_i (x_{n,i} + t_{n,i}) \bmod 2, x_n^* - \hat{1}^*, f} \delta_{\sum_i (t_{n,i} + x_{n+2,i}) \bmod 2, t_n^* - \hat{2}^*, f} \\ &\quad \cdot \delta_{\sum_i (x_{n+2,i} + t_{n+1,i}) \bmod 2, x_n^*, f} \delta_{\sum_i (t_{n+1,i} + x_n, i) \bmod 2, t_n^*, f} \end{aligned} \quad (3.79)$$

となる。このまま  $\mathcal{A}^{(1)}$  を扱うと、非一様なテンソルネットワークを扱うことになり、定式化や実際の計算が複雑になる。そこで、新たに加えられた符号の因子は元の自由度に依存しているが、これを、境界条件による修正を受けていない粗視化されたテンソルに粗視化された自由度に依存する符号の因子がかかった式に等価に変えるを考える。式 (3.79) に含まれる

$$\delta_{\sum_i (t_{n,i} + x_{n+2,i}) \bmod 2, t_n^* - \hat{2}^*, f} \delta_{\sum_i (x_{n+2,i} + t_{n+1,i}) \bmod 2, x_n^*, f}$$

は、 $x_{n+2}$  を共有することから、等価に

$$\begin{aligned} &\delta_{\sum_i (t_{n,i} + x_{n+2,i}) \bmod 2, t_n^* - \hat{2}^*, f} \delta_{\sum_i (x_{n+2,i} + t_{n+1,i}) \bmod 2, x_n^*, f} \\ &= \delta_{\sum_i (t_{n,i} + x_{n+2,i}) \bmod 2, t_n^* - \hat{2}^*, f} \delta_{\sum_i (t_{n,i} + t_{n+1,i}) \bmod 2, (x_n^*, f + t_n^* - \hat{2}^*, f) \bmod 2} \end{aligned} \quad (3.80)$$

とできる。これによって、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{x_n^* t_n^* x_{n-1}^* t_{n-2}^*}^{(1)} &= \sum_{x_n, t_n, x_{n+2}, t_{n+1}} \int (-1)^{t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n+1,1} + t_{n+1,2}} \\ &\quad \cdot \mathcal{S}_{x_n t_n x_{n-1}^*}^1 \mathcal{S}_{t_n x_{n+2} t_{n-2}^*}^2 \mathcal{S}_{x_{n+2} t_{n+1} x_n^*}^3 \mathcal{S}_{t_{n+1} x_n t_n^*}^4 \\ &\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^*+1} \eta_{n^*})^{x_n^*, f} (\bar{\xi}_{n^*+2} \xi_{n^*})^{t_n^*, f} \\ &\quad \cdot \delta_{\sum_i (x_{n,i} + t_{n,i}) \bmod 2, x_n^* - \hat{1}^*, f} \delta_{\sum_i (t_{n,i} + x_{n+2,i}) \bmod 2, t_n^* - \hat{2}^*, f} \\ &\quad \cdot \delta_{\sum_i (t_{n,i} + t_{n+1,i}) \bmod 2, (x_n^*, f + t_n^* - \hat{2}^*, f) \bmod 2} \\ &\quad \cdot \delta_{\sum_i (t_{n+1,i} + x_n, i) \bmod 2, t_n^*, f} \\ &= (-1)^{x_n^*, f + t_n^* - \hat{2}^*, f} \mathcal{T}_{x_n^* t_n^* x_{n-1}^* t_{n-2}^*} \\ &\quad \cdot d\eta^{x_n^*, f} d\xi^{t_n^*, f} d\bar{\eta}^{x_n^* - \hat{1}^*, f} d\bar{\xi}^{t_n^* - \hat{2}^*, f} \\ &\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^*+1} \eta_{n^*})^{x_n^*, f} (\bar{\xi}_{n^*+2} \xi_{n^*})^{t_n^*, f} \\ &= (-1)^{x_n^*, f + t_n^* - \hat{2}^*, f} \mathcal{T}_{x_n^* t_n^* x_{n-1}^* t_{n-2}^*} \end{aligned} \quad (3.81)$$

とすることができる。したがって、1回くりこまれた分配関数は

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= \sum_{\{x,t\}} \int \prod_{n:n_1 \neq n_2} \mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} \prod_{n:n_1 = n_2} \mathcal{A}_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}^{(1)} \\ &= \sum_{\{x,x',t,t'\}} \int \prod_n \mathcal{T}_{x'_n t'_n x_{n-\hat{1}} t'_n} B_{x'_n x_n}^1 B_{t'_n t_{n-\hat{2}}}^2 \end{aligned} \quad (3.82)$$

と得られる。ここで

$$B_{x'_n x_n}^1 = \begin{cases} (-1)^{x'_n, f} \delta_{x'_n, x_n} & \text{if } n_1 = n_2, \\ \delta_{x'_n, x_n} & \text{else,} \end{cases} \quad (3.83)$$

$$B_{t'_n t_{n-\hat{2}}}^2 = \begin{cases} (-1)^{t'_n, f} \delta_{t'_n, t_{n-\hat{2}}} & \text{if } n_1 = n_2, \\ \delta_{t'_n, t_{n-\hat{2}}} & \text{else.} \end{cases} \quad (3.84)$$

である。

1回目のくりこみにおける境界条件による影響をまとめたものを図 3.1 に示す。

### 3.4.2 2回目のくりこみ

前小節で得られた1回くりこまれた分配関数のテンソルネットワーク表示から、同様にして、2回くりこまれた分配関数のテンソルネットワーク表示を求める。

2回目のくりこみでは、 $n_1 = n_2$  なる格子点上で縮約されたテンソルが修正を受ける。それを  $\mathcal{A}_{x_n^* t_n^* x_{n-\hat{1}}^* t_{n-\hat{2}}^*}^{(2)}$  とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{x_n^* t_n^* x_{n-\hat{1}}^* t_{n-\hat{2}}^*}^{(2)} &= \sum_{x_n, t_n, x_{n+\hat{2}}, t_{n+\hat{1}}} \int (-1)^{x_{n+\hat{2}}, f + t_n, f} \\ &\quad \cdot \mathcal{S}_{x_n t_n x_{n-\hat{1}}^*}^1 \mathcal{S}_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n-\hat{2}}^*}^2 \mathcal{S}_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{1}} x_n^*}^3 \mathcal{S}_{t_{n+\hat{1}} x_n t_n^*}^4 \\ &\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^*+\hat{1}} \eta_{n^*})^{x_n^*, f} (\bar{\xi}_{n^*+\hat{2}} \xi_{n^*})^{t_n^*, f} \\ &\quad \cdot \delta_{(x_n, f + t_n, f) \bmod 2, x_{n-\hat{1}}^*, f} \delta_{(t_n, f + x_{n+\hat{2}}, f) \bmod 2, t_{n-\hat{2}}^*, f} \\ &\quad \cdot \delta_{(x_{n+\hat{2}}, f + t_{n+\hat{1}}, f) \bmod 2, x_n^*, f} \delta_{(t_{n+\hat{1}}, f + x_n, f) \bmod 2, t_n^*, f} \end{aligned} \quad (3.85)$$

となる。前小節と同様にこの式を、境界条件による修正を受けていない粗視化されたテンソルに粗視化された自由度に依存する符号の因子がかかった式に書きかえる。式 (3.85) に含まれる

$$\delta_{(t_n, f + x_{n+\hat{2}}, f) \bmod 2, t_{n-\hat{2}}^*, f}$$

によって、

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{x_n^* t_n^* x_{n-\hat{1}}^* t_{n-\hat{2}}^*}^{(2)} &= (-1)^{t_{n-\hat{2}}^*, f} \mathcal{T}_{x_n^* t_n^* x_{n-\hat{1}}^* t_{n-\hat{2}}^*} \\ &\quad \cdot d\eta^{x_n^*, f} d\xi^{t_n^*, f} d\bar{\eta}^{x_{n-\hat{1}}^*, f} d\bar{\xi}^{t_{n-\hat{2}}^*, f} \\ &\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^*+\hat{1}} \eta_{n^*})^{x_n^*, f} (\bar{\xi}_{n^*+\hat{2}} \xi_{n^*})^{t_n^*, f} \\ &= (-1)^{t_{n-\hat{2}}^*, f} \mathcal{T}_{x_n^* t_n^* x_{n-\hat{1}}^* t_{n-\hat{2}}^*} \end{aligned} \quad (3.86)$$

とすることができる。したがって、2回くりこまれた分配関数は

$$\begin{aligned} Z^{(2)} &= \sum_{\{x,t\}} \int \prod_{n:n_2 \neq 0} \mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} \prod_{n:n_2=0} \mathcal{A}_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}^{(2)} \\ &= \sum_{\{x,x',t,t'\}} \int \prod_n \mathcal{T}_{x'_n t'_n x_{n-1} t'_n} B_{t'_n t_{n-2}} \end{aligned} \quad (3.87)$$

となる。 $B$ は式(3.77)で与えられ、境界条件に関しては最初の条件に戻っていることになる。したがって、境界条件は2回くりこみを行う度に元の条件に戻る。2回目のくりこみにおける境界条件による影響をまとめたものを図3.2に示す。

このことから、境界条件については最後にブルートフォースをするときに取り込めばよい。格子点数を1にまでする場合は、

$$Z = \sum_{x,t} \int (-1)^{t_f} \mathcal{T}_{xtxt} \quad (3.88)$$

となる。格子点数を4にまでする場合は、

$$Z = \sum_{\{x,t\}} \int (-1)^{t_{1,f}+t_{3,f}} \mathcal{T}_{x_1 t_1 x_2 t_2} \mathcal{T}_{x_3 t_2 x_4 t_1} \mathcal{T}_{x_4 t_3 x_3 t_4} \mathcal{T}_{x_2 t_4 x_1 t_3} \quad (3.89)$$

となる。あるいは、

$$\mathcal{C}_{x_1 x_2 x_3 x_4}^A = \sum_{t_1, t_2} \int_{t_1, f, t_{f,2}} (-1)^{t_{2,f}} \mathcal{T}_{x_1 t_1 x_2 t_2} \mathcal{T}_{x_3 t_2 x_4 t_1} \quad (3.90)$$

として

$$Z = \sum_{\{x\}} \int_{x_1, f, x_2, f, x_3, f, x_4, f} \mathcal{C}_{x_1 x_2 x_3 x_4} \mathcal{C}_{x_4 x_3 x_2 x_1} \quad (3.91)$$

となる。ここで  $\int$  の添字は積分する Grassmann 変数のべき指数を意味する。

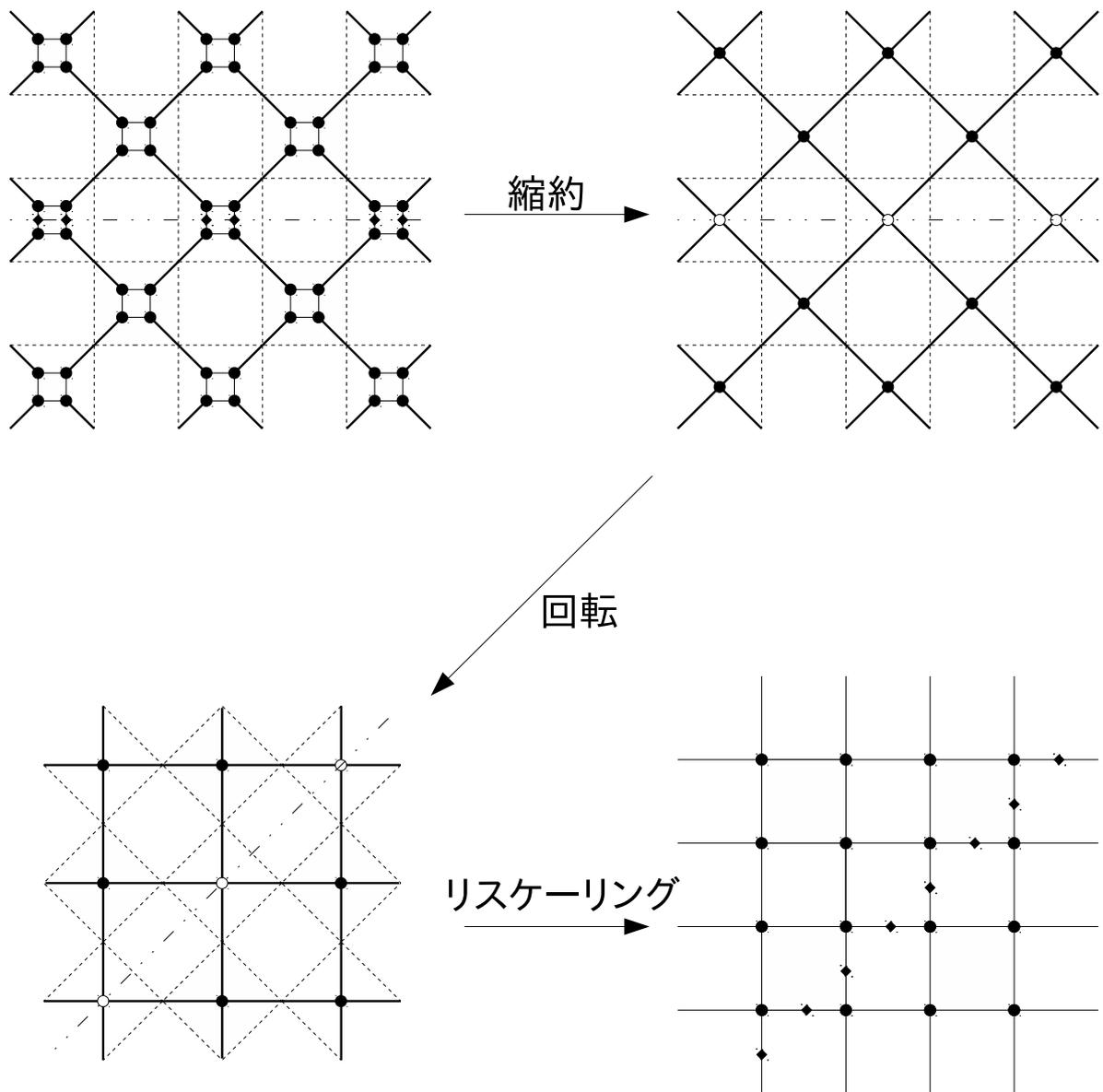


図 3.1: 1 回目のくりこみにおける境界条件による影響を示す。黒丸はテンソル  $T$  を表し、白丸はテンソル  $A$  を表す。菱形はテンソル  $B, B^1, B^2$  を表す。

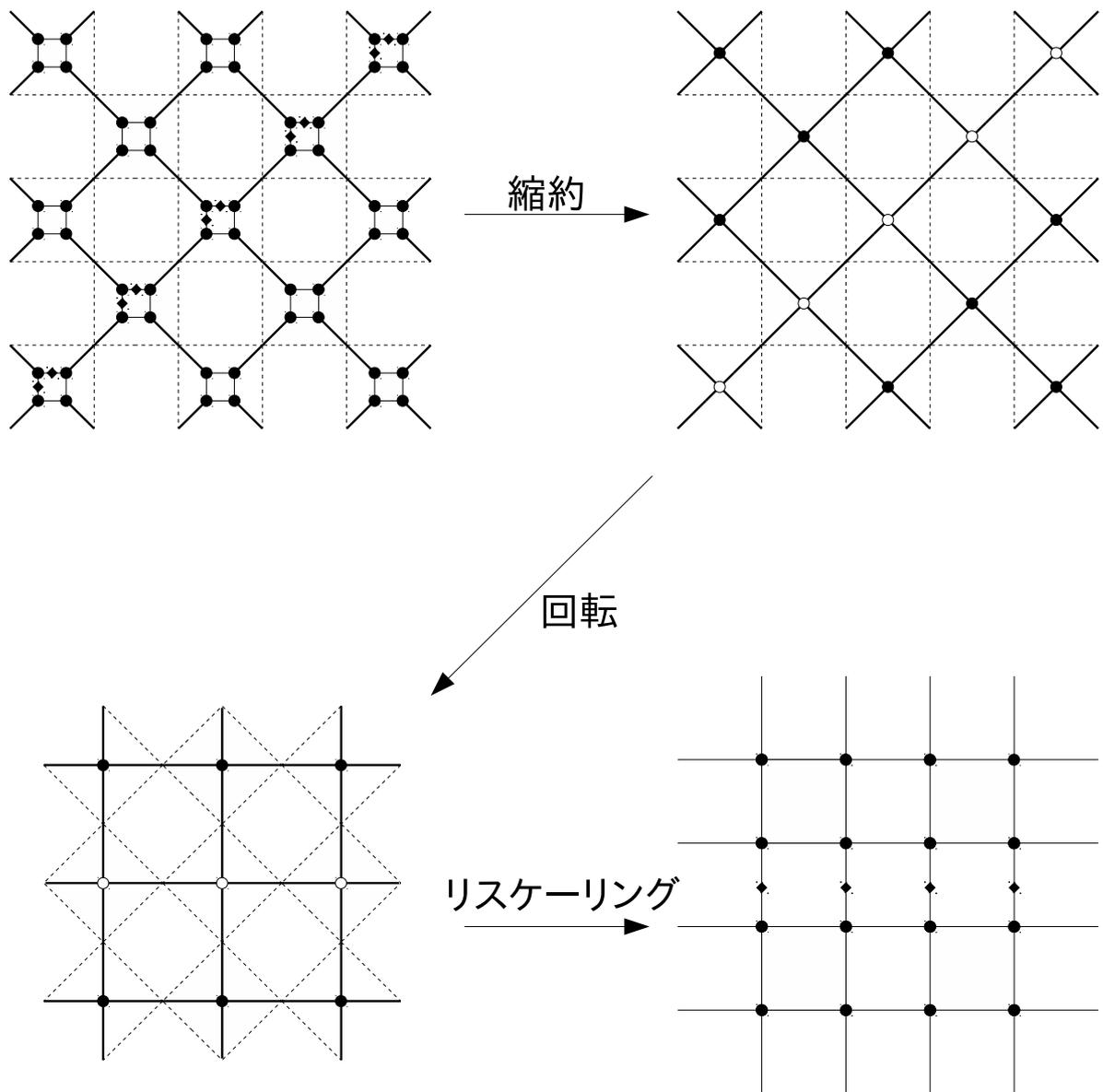


図 3.2: 2回目のくりこみにおける境界条件による影響を示す。黒丸はテンソル  $T$  を表し、菱形はテンソル  $B, B^1, B^2$  を表す。

## 第4章 計算結果

この章では、第3章で定式化した有限密度 Gross-Neveu モデルの GTRG を実装し、計算を行った結果を示す。この研究では、自由エネルギー、フェルミオン密度とその感受率を計算した。ここでは、格子点数が4になるまでくりこんだ後、ブルートフォースに分配関数を計算した。

4.1節では、自由エネルギーの厳密値と GTRG による数値計算から得られた値との比較の結果を示す。4.2節では、フェルミオン密度を GTRG で計算した結果を示す。4.3節では、4.2の結果からフェルミオン密度の感受率を計算し、有限サイズスケーリングを行った結果を示す。

### 4.1 自由エネルギー

#### 4.1.1 厳密値の計算

$g = 0$  の場合に、分配関数の厳密な値を計算した方法を示す。簡単のために、第1次元にも第2次元にも周期的境界条件を課す。このとき、分配関数は

$$Z_P = \int D\psi D\bar{\psi} \exp\left(-\sum_n \bar{\psi}_n D\psi_n\right) \quad (4.1)$$

となる。 $\psi_n, \bar{\psi}_n$  を Fourier 展開すると

$$\psi_n = \sum_p \exp\left[2\pi i \left(\frac{p_1 n_1}{N_1} + \frac{p_2 n_2}{N_2}\right)\right] \varphi_p \quad (4.2)$$

$$\bar{\psi}_n = \sum_p \exp\left[-2\pi i \left(\frac{p_1 n_1}{N_1} + \frac{p_2 n_2}{N_2}\right)\right] \bar{\varphi}_p \quad (4.3)$$

となる。ここで

$$p = (p_1, p_2) \quad (4.4)$$

である。すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial_1^- \partial_1^+}{2} \psi_n &= \frac{\psi_{n+\hat{1}} + \psi_{n-\hat{1}}}{2} - \psi_n \\ &= \sum_p \left[ \cos\left(\frac{2\pi p_1}{N_1}\right) - 1 \right] \exp\left[2\pi i \left(\frac{p_1 n_1}{N_1} + \frac{p_2 n_2}{N_2}\right)\right] \varphi_p\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial_2^- \partial_2^+}{2} \psi_n &= \frac{e^\mu \psi_{n+\hat{2}} + e^{-\mu} \psi_{n-\hat{2}}}{2} - \psi_n \\ &= \sum_p \left[ \cos\left(\frac{2\pi p_2}{N_2} - i\mu\right) - 1 \right] \exp\left[2\pi i \left(\frac{p_1 n_1}{N_1} + \frac{p_2 n_2}{N_2}\right)\right] \varphi_p\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_1 \partial_1^+ + \gamma_1 \partial_1^-}{2} \psi_n &= \gamma_1 \frac{\psi_{n+\hat{1}} - \psi_{n-\hat{1}}}{2} \\ &= \sum_p i\gamma_1 \sin\left(\frac{2\pi p_1}{N_1}\right) \exp\left[2\pi i \left(\frac{p_1 n_1}{N_1} + \frac{p_2 n_2}{N_2}\right)\right] \varphi_p\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}\frac{\gamma_2 \partial_2^+ + \gamma_2 \partial_2^-}{2} \psi_n &= \gamma_2 \frac{e^\mu \psi_{n+\hat{2}} - e^{-\mu} \psi_{n-\hat{2}}}{2} \\ &= \sum_p i\gamma_2 \sin\left(\frac{2\pi p_2}{N_2} - i\mu\right) \exp\left[2\pi i \left(\frac{p_1 n_1}{N_1} + \frac{p_2 n_2}{N_2}\right)\right] \varphi_p\end{aligned}\quad (4.8)$$

となるので、Wilson-Dirac 演算子を

$$\begin{aligned}\sum_n \bar{\psi}_n D \psi_n &= \sum_{n,p',p} \bar{\varphi}_{p'} \left[ i\gamma_1 \sin\left(\frac{2\pi p_1}{N_1}\right) + i\gamma_2 \sin\left(\frac{2\pi p_2}{N_2} - i\mu\right) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{2\pi p_1}{N_1}\right) - \cos\left(\frac{2\pi p_2}{N_2} - i\mu\right) + m + 2 \right] \\ &\quad \cdot \exp\left[2\pi i \left(\frac{p_1 - p'}{N_1} n_1 + \frac{p_2 - p'_2}{N_2} n_2\right)\right] \varphi_p \\ &= \sum_p \bar{\varphi}_p \left[ i\gamma_1 \sin\left(\frac{2\pi p_1}{N_1}\right) + i\gamma_2 \sin\left(\frac{2\pi p_2}{N_2} - i\mu\right) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{2\pi p_1}{N_1}\right) - \cos\left(\frac{2\pi p_2}{N_2} - i\mu\right) + m + 2 \right] \varphi_p\end{aligned}\quad (4.9)$$

と対角化できる。ここで

$$\begin{aligned}D_p &= i\gamma_1 \sin\left(\frac{2\pi p_1}{N_1}\right) + i\gamma_2 \sin\left(\frac{2\pi p_2}{N_2} - i\mu\right) \\ &\quad - \cos\left(\frac{2\pi p_1}{N_1}\right) - \cos\left(\frac{2\pi p_2}{N_2} - i\mu\right) + m + 2\end{aligned}\quad (4.10)$$

とすると、

$$\sum_n \bar{\psi}_n D \psi_n = \sum_p \bar{\varphi}_p D_p \varphi_p$$

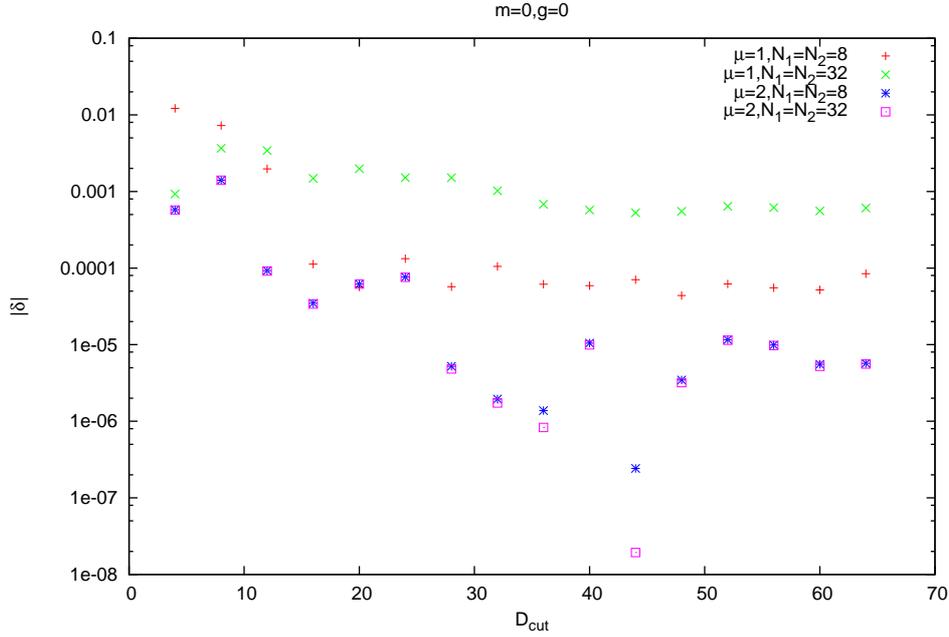


図 4.1:  $D_{\text{cut}}$  に対する  $\delta$  の変化。

となる。分配関数を  $\varphi, \bar{\varphi}$  で書きかえると、

$$\begin{aligned}
 Z_P &= \int D\varphi D\bar{\varphi} \exp\left(-\sum_p \bar{\varphi}_p D_p \varphi_p\right) \\
 &= \prod_p \det D_p
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

とできる。この計算量は  $N_1 N_2$  程度になるので、ブルートフォースに計算することできる。

#### 4.1.2 厳密値との比較

まず、 $D_{\text{cut}}$  を変えながら、GTRG による数値計算から得られた  $\ln Z$  と厳密値  $\ln Z_{\text{exact}}$  との相対誤差

$$\delta = \frac{\ln Z - \ln Z_{\text{exact}}}{\ln Z_{\text{exact}}}, \tag{4.12}$$

を計算した。図 4.1 にその結果を示す。 $D_{\text{cut}}$  を大きくしていけば、GTRG による結果は厳密値に近づいていくはずなので、相対誤差は 0 に向かって収束していくことが期待される。図 4.1 の結果は、 $\mu = 1$  の場合にも、 $\mu = 2$  の場合にも、単調ではないが大きな傾向としては 0 に近づいており、妥当な結果と考えられる。

$\mu = 1$  での相対誤差の収束は、 $\mu = 2$  での場合に比べて遅い。また、 $\mu = 2$  の相対誤差の収束性は  $N_1 = N_2 = 8$  でも  $N_1 = N_2 = 32$  でもほとんど変わらず、相対誤差の格子体積への依存はみられない。一方、 $\mu = 1$  の場合は、 $N_1 = N_2 = 8$  の場合に比べると  $N_1 = N_2 = 32$  の場合は収束性が悪くなっており、相対誤差は全体的に 1 桁ほど落ちてい

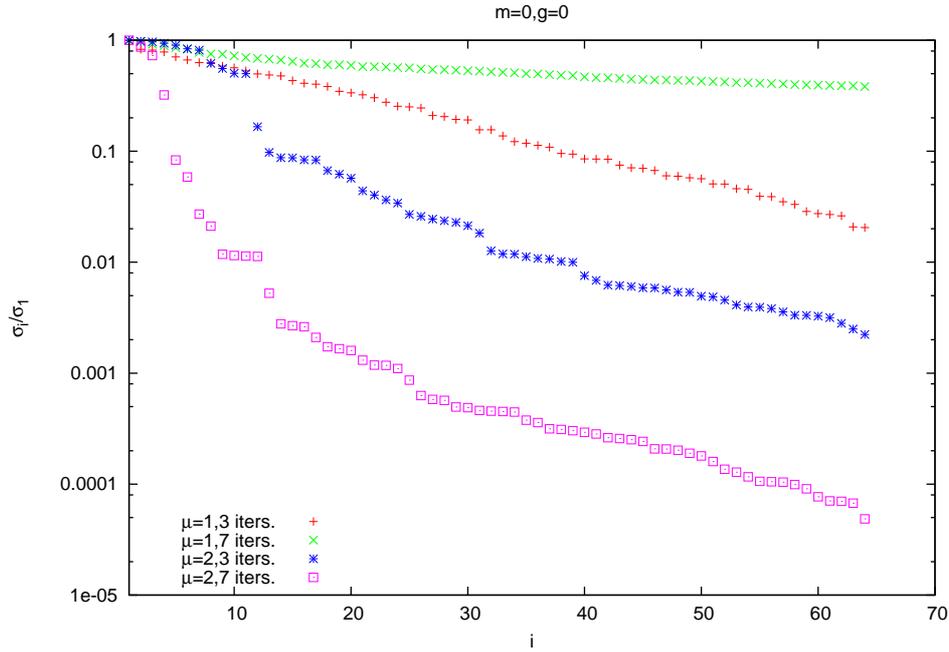


図 4.2: ボソンテンソルの特異値。

る。この収束性の問題の詳細を見るために、テンソルを分解するときの SVD の特異値を調べた。その結果を図 4.2 に示す。 $\mu = 2$  の場合、GTRG が 3 回目でも 7 回目でも、明確に特異値の階層性がみられる。一方、 $\mu = 1$  の場合、3 回目ではまだ階層性がみられるが、7 回目では非常になだらかになっており、ほとんど特異値が縮退しているように見える。

次に、 $D_{\text{cut}} = 64$  と固定して、 $\mu$  を変えながら相対誤差を計算した。その結果を 4.3 に示す。 $\mu = 0.3$  と  $\mu = 1$  の近くで急速に相対誤差が増加している。後にみるように、 $\mu = 0.3$  と  $\mu = 1$  は相転移のような振る舞いがみられる。 $N_1 = N_2 = 4$  では、マシン精度の範囲で厳密な値と一致しており、この計算の妥当性を示していると考えられる。

## 4.2 フェルミオン密度

ここでは、フェルミオン密度を計算した結果を示す。フェルミオン密度は

$$n = \frac{1}{N_1 N_2} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mu} \quad (4.13)$$

で定義される。

MonteCarlo 法では配位空間に定義された物理量であれば計算することができるが、TRG では直接計算できるのは分配関数に限られる。そのため、通常、自由エネルギーを数値微分することによって物理量を計算する。数値微分は 3 点公式を用いて、

$$n(\mu) = \frac{\ln Z(\mu + \Delta\mu) - \ln Z(\mu - \Delta\mu)}{2N_1 N_2 \Delta\mu} \quad (4.14)$$

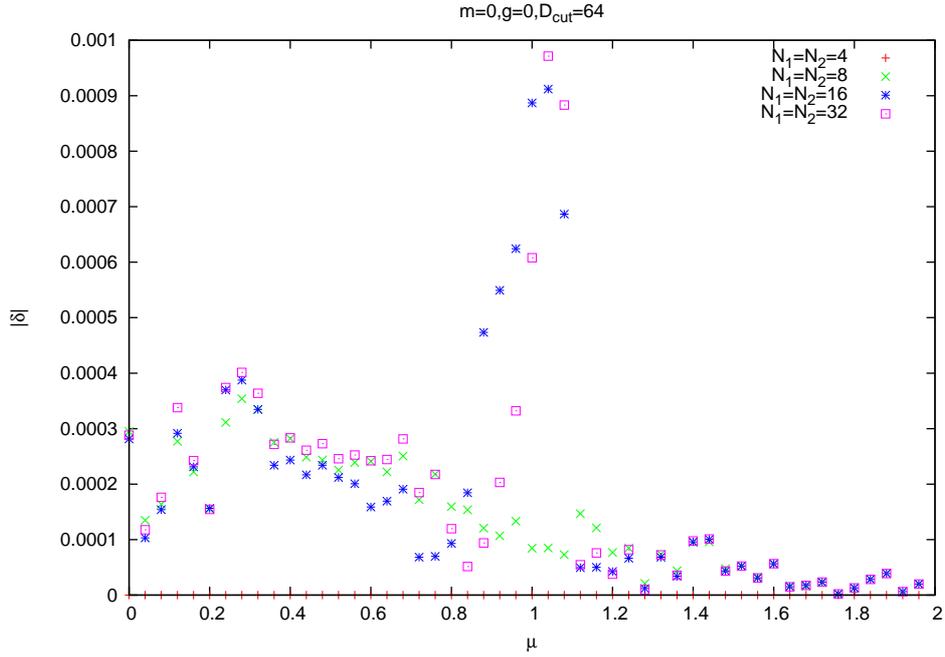


図 4.3:  $D_{\text{cut}} = 64$  に固定した場合の  $\mu$  に対する  $\delta$  の変化。

と計算した。図 4.4 は、いくつかの非自明なパラメータにおいて、 $\mu$  を変えながらフェルミオン密度を計算した結果を示す。2次元系でフレーバー数が1なので、飽和密度は1になるはずである。結果はいずれのパラメータの場合でも1で飽和に至っているので、妥当であると考えられる。

### 4.3 感受率

ここでは、フェルミオン密度の感受率を計算し、有限サイズスケーリングを行う。フェルミオン密度の感受率は

$$\chi = \frac{1}{N_1 N_2} \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \mu^2}. \quad (4.15)$$

で定義される。数値微分は前節で求めたフェルミオン密度から、3点近似公式によって

$$\chi(\mu) = \frac{n(\mu + \Delta\mu) - n(\mu - \Delta\mu)}{2\Delta\mu} \quad (4.16)$$

と計算した。

$m = 0, N_2 = 32, D_{\text{cut}} = 64$  と固定して、いくつかの  $N_1, g$  について  $\mu$  を変えながら相対誤差を計算した。その結果を図 4.5 に示す。 $g = 0$  でも  $g = 0.7$  でも、二つのピークが現れたが、ピークの高さに  $N_1$  に対する依存性は見られなかった。そのため、これらの相転移のような振る舞いはクロスオーバーであると考えられる。 $m = 0$  の場合、ピークの近く ( $\mu \approx 0.3$  と  $\mu \approx 1$ ) では、図 4.3 では自由エネルギーの相対誤差が大きくなっていた。TRG が相転移点の近くで精度が落ちることは知られていたが、今回、同じようなことがクロスオーバーでも現れることが分かった。

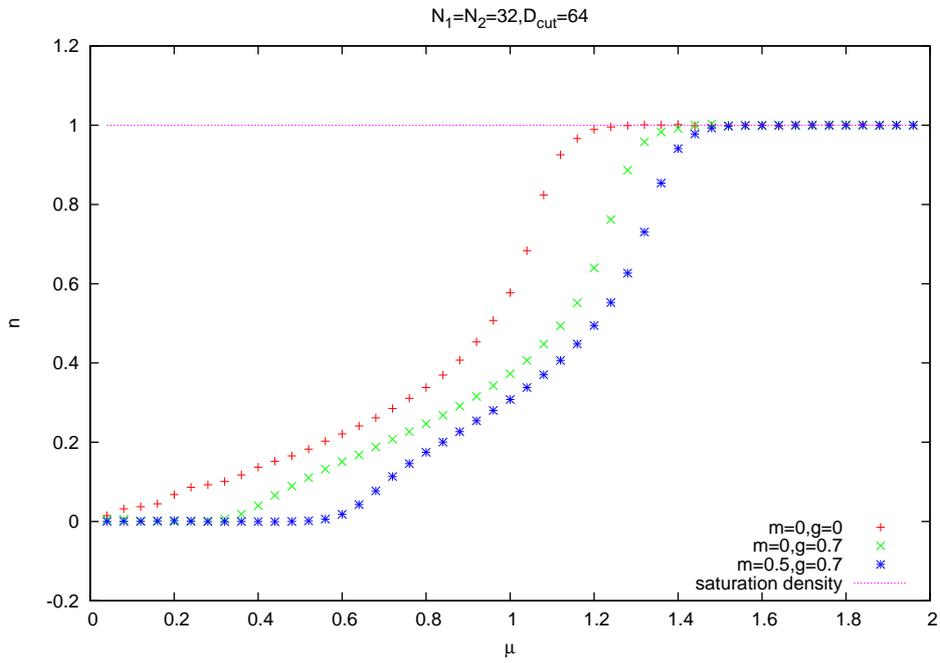


図 4.4:  $N_1 = N_2 = 32, D_{\text{cut}} = 64$ と固定した  $\mu$  に対する  $n$  の変化。

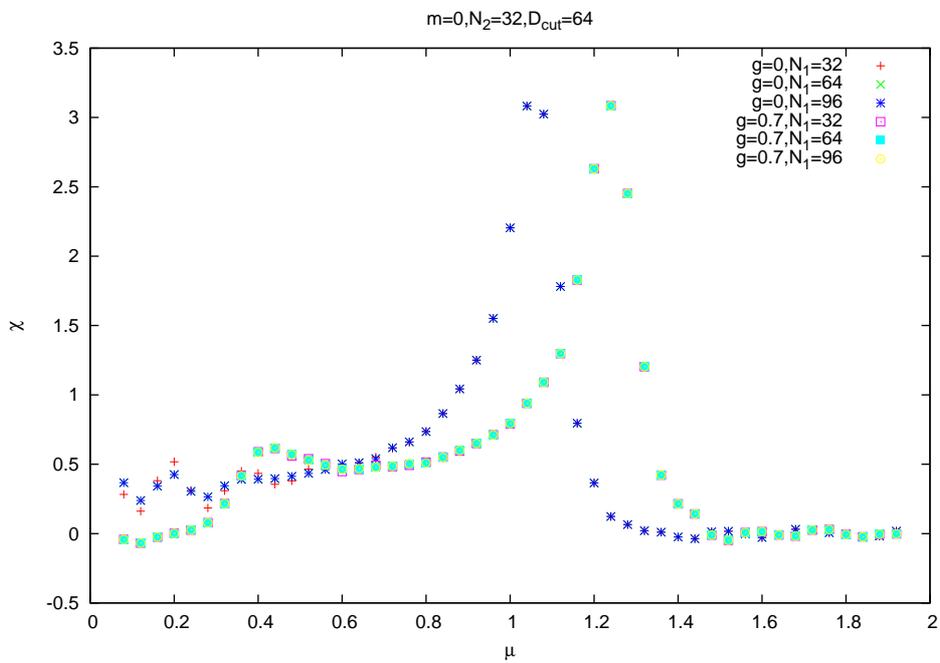


図 4.5: 有限サイズスケーリング

## 第5章 再重み付け法

この章では、MonteCarlo 法における再重み付け法のある種のアナロジーとなる TRG の計算手法を示す。この手法は、あるパラメータにおける SVD の結果から別のパラメータでの TRG を行うもので、通常の TRG よりも計算量のオーダーは落ちるが、近似の良さは悪くなることが予想される。この TRG の計算手法についても、再重み付け法と呼ぶことにする。

5.1 節では、MonteCarlo 法における再重み付け法について簡単に説明する。5.2 節では、TRG における再重み付け法の定式化について説明する。5.3 節では、TRG における再重み付け法を GTRG に拡張する。5.4 節では、Gross-Neveu モデルで再重み付け法の計算を行った結果を示す。

### 5.1 MonteCarlo 法の再重み付け法

配位空間  $\Omega$  のパラメータ  $p$  における分配関数

$$Z(p) = \sum_{\omega \in \Omega} W[\omega; p] \quad (5.1)$$

が与えられているとき、物理量  $O(p)$  の期待値

$$\langle O(p) \rangle = \frac{\sum_{\omega \in \Omega} O[\omega; p] W[\omega; p]}{\sum_{\omega \in \Omega} W[\omega; p]} \quad (5.2)$$

を MonteCarlo 法で計算することを考える。MonteCarlo 法では、重点サンプリングがされるように、確率

$$P[w; p] = \frac{W[w; p]}{Z(p)} \quad (5.3)$$

に従う配位を集めてサンプル集団

$$\Omega_{\text{MC}}(p) \subset \Omega \quad (5.4)$$

を生成した後、

$$\langle O \rangle \simeq \langle O \rangle_{\Omega_{\text{MC}}(p)} = \sum_{\omega \in \Omega_{\text{MC}}(p)} O[\omega; p] \quad (5.5)$$

とする。

再重み付け法は、パラメータ  $p$  で生成した  $\Omega_{\text{MC}}$  から、別のパラメータ  $p'$  での期待値  $\langle O(p') \rangle$  を計算する手法である。その基本となっているのは、

$$\begin{aligned}\langle O(p') \rangle &= \frac{\sum_{\omega \in \Omega} O[\omega; p'] W[\omega; p']}{\sum_{\omega \in \Omega} W[\omega; p']} \\ &= \frac{\sum_{\omega \in \Omega} \left( O[\omega; p'] \frac{W[\omega; p']}{W[\omega; p]} \right) W[\omega; p]}{\sum_{\omega \in \Omega} \left( \frac{W[\omega; p']}{W[\omega; p]} \right) W[\omega; p]} \\ &= \frac{\langle O(p') R(p', p) \rangle}{\langle R(p', p) \rangle}\end{aligned}\quad (5.6)$$

$$R(p', p) = \frac{W[\omega; p']}{W[\omega; p]} \quad (5.7)$$

というように、別のパラメータとの重みの比を物理量とみなすことである。このようにすることで、

$$\langle O(p') \rangle \simeq \frac{\langle O(p') R(p', p) \rangle_{\Omega_{\text{MC}}(p)}}{\langle R(p', p) \rangle_{\Omega_{\text{MC}}(p)}} \quad (5.8)$$

という形で計算できる。

## 5.2 TRG の再重み付け法

ここでは、TRG の再重み付け法を定式化する。元となるパラメータにおけるテンソルを  $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  とし、求めたい別のパラメータにおけるテンソルを  $T'_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  とする。

### 5.2.1 テンソルの分解

$T$  に対して式 (2.17) で定義された  $M^{13}$  に対する SVD を

$$\begin{aligned}M_{x_n t_n, x_{n-1} t_{n-2}}^{13} &= \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*}} U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 \sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}}^{13} U_{x_{n-1} t_{n-2}, x_{n^*-\hat{1}^*}}^{3^*} \\ &\simeq \sum_{\substack{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}=1 \\ D_{\text{cut}}}} U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 \left( \sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}}^{13} \delta_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}} \right) U_{x_{n-1} t_{n-2}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^{3^*}\end{aligned}\quad (5.9)$$

とし、 $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  の分解を

$$T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} \simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^{D_{\text{cut}}} U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 \Sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^{13} U_{x_{n-1} t_{n-2}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^{3^*} \quad (5.10)$$

とする。ここで

$$\Sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}} = \sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}}^{13} \delta_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}} \quad (5.11)$$

である。\$U^1, U^3\$ はユニタリ一行列なので、

$$U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 U_{x_t, x_{n^*-\hat{1}^*}}^{1*} = \delta_{x_n t_n, x_t} \quad (5.12)$$

$$U_{x_t, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^3 U_{x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^{3*} = \delta_{x_t, x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}} \quad (5.13)$$

である。これらによって、\$T'\_{x\_n t\_n x\_{n-\hat{1}t\_{n-\hat{2}}}}\$ は

$$\begin{aligned} T'_{x_n t_n x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}} &= \sum_{x, t, x', t', x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}} \delta_{x_n t_n, x_t} T'_{x_t x' t'} \delta_{x' t', x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}} \\ &= \sum_{x, t, x', t', x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}} \left( U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 U_{x_t, x_{n^*-\hat{1}^*}}^{1*} \right) \\ &\quad \cdot T'_{x_t x' t'} \left( U_{x' t', x'_{n^*-\hat{1}^*}}^3 U_{x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^{3*} \right) \\ &= \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}} U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 \Sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}'^{13} U_{x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^{3*} \end{aligned} \quad (5.14)$$

とできる。ここで

$$\Sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}'^{13} = \sum_{x, t, x', t'} U_{x_t, x_{n^*-\hat{1}^*}}^{1*} T'_{x_t x' t'} U_{x' t', x'_{n^*-\hat{1}^*}}^3 \quad (5.15)$$

である。\$x\_{n^\*-\hat{1}^\*}, x'\_{n^\*-\hat{1}^\*}\$ を \$D\_{\text{cut}}\$ までで打ちきると、\$T'\$ の分解が形式的に

$$\begin{aligned} T'_{x_n t_n x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}} &\simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}=1}^{D_{\text{cut}}} U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 \Sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}'^{13} U_{x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}, x'_{n^*-\hat{1}^*}}^{3*} \end{aligned} \quad (5.16)$$

と定義できる。図 5.1 にこれらの分解を示す。当然ながら、この分解は SVD を用いては  
いないので、

$$M_{x_n t_n, x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}}'^{13} = T'_{x_n t_n x_{n-\hat{1}t_{n-\hat{2}}}}$$

として

$$\left| M'^{13} - U^1 \Sigma'^{13} U^{3\dagger} \right|^2$$

が最小化されているわけではなく、精度の高い近似がされている保証はない。しかし、パラメータを近づけていけば最適な分解に近づいていくはずなので、パラメータの差が小さければ十分な精度で近似が得られることが期待できる。

同様に、方向を 90 度回転させた分解については、式 (2.27) で定義された \$M^{24}\$ から SVD によって

$$\begin{aligned} M_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}}^{24} &= \sum_{t_{n^*-\hat{2}^*}} U_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_{n^*-\hat{2}^*}}^2 \sigma_{t_{n^*-\hat{2}^*}}^{24} U_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}, t_{n^*-\hat{2}^*}}^{4*} \\ &\simeq \sum_{t_{n^*-\hat{2}^*}, t'_{n^*-\hat{2}^*}=1}^{D_{\text{cut}}} U_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_{n^*-\hat{2}^*}}^2 \Sigma_{t_{n^*-\hat{2}^*}, t'_{n^*-\hat{2}^*}}^{24} U_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}, t'_{n^*-\hat{2}^*}}^{4*} \end{aligned} \quad (5.17)$$

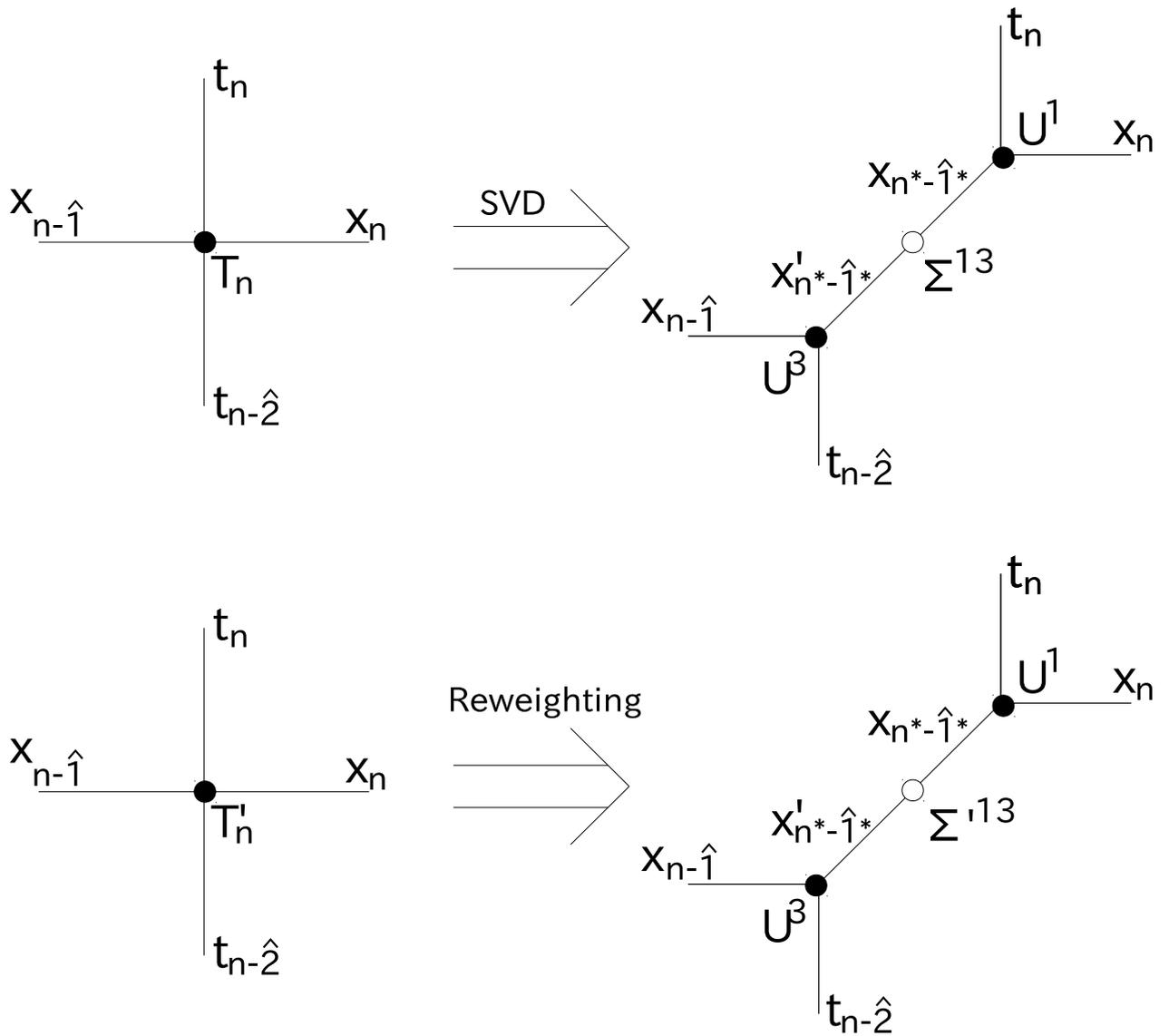


図 5.1: 再重み付け法の分解を示す。ユニタリ行列  $U^1, U^3$  を 3 階のテンソルとみなしている。この分解では、新たに  $\Sigma$  という 2 階のテンソルが現れる。白丸は  $\Sigma$  を表す。

$$\Sigma_{t_n^*-\hat{2}^*, t_n^*-\hat{2}^*}^{24} = \sigma_{t_n^*-\hat{2}^*}^{24} \delta_{t_n^*-\hat{2}^*, t_n^*-\hat{2}^*} \quad (5.18)$$

とし、 $T_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}}$  を

$$T_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}} \simeq \sum_{t_n^*-\hat{2}^*, t_n^*-\hat{2}^*=1}^{D_{\text{cut}}} U_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_n^*-\hat{2}^*}^2 \Sigma_{t_n^*-\hat{2}^*, t_n^*-\hat{2}^*}^{24} U_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}, t_n^*-\hat{2}^*}^{4*} \quad (5.19)$$

と分解する。 $T'$  に対しては、

$$T'_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}} \simeq \sum_{t_n^*-\hat{2}^*, t_n^*-\hat{2}^*=1}^{D_{\text{cut}}} U_{t_n x_{n+\hat{2}}, t_n^*-\hat{2}^*}^2 \Sigma_{t_n^*-\hat{2}^*, t_n^*-\hat{2}^*}^{24} U_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}}, t_n^*-\hat{2}^*}^{4*} \quad (5.20)$$

$$\Sigma_{t_n^*-\hat{2}^*, t_n^*-\hat{2}^*}^{24} = \sum_{x, t, x', t'} U_{tx, x_{n^*-\hat{1}^*}}^{2*} T'_{xt'x't} U_{t'x', x'_{n^*-\hat{1}^*}}^4 \quad (5.21)$$

とする。このようにすると、 $T$  に対する SVD の結果である  $U^1, U^2, U^3, U^4$  があれば、形式的には、 $T'$  は SVD をすることなしに分解される。この計算に必要な計算量は  $D^4 D_{\text{cut}}$  に比例する。

### 5.2.2 自由度の縮約

自由度の縮約をとるときは、まず、 $T$  の SVD から得られた  $U^1, U^2, U^3, U^4$  から中間テンソルと呼ぶものをつくる。中間テンソルは

$$\begin{aligned} & \tilde{T}_{x_n' t_n' x_{n^*-\hat{1}^*} t_n^*-\hat{2}^*} \\ &= \int \sum_{x_n, t_n, x_{n+\hat{2}}, t_{n+\hat{2}}} U_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*}}^1 U_{t_n x_{n+\hat{2}} t_n^*-\hat{2}^*}^2 U_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n^*}}^3 U_{t_{n+\hat{2}} x_n t_n^*}^4 \end{aligned} \quad (5.22)$$

で定義される特異値を含まない形で縮約をとったテンソルである。粗視化されたテンソルは、この中間テンソルと  $\Sigma^{13}, \Sigma^{24}$  から

$$T_{x_n^* t_n^* x_{n^*-\hat{1}^*} t_n^*-\hat{2}^*} = \sum_{x_n^*, t_n^*} \Sigma_{x_n^*, x_n^*}^{13} \Sigma_{t_n^*, t_n^*}^{24} \tilde{T}_{x_n' t_n' x_{n^*-\hat{1}^*} t_n^*-\hat{2}^*} \quad (5.23)$$

と求められる。 $T'$  についても、粗視化されたテンソルは、 $T$  の場合と同じ中間テンソルと  $\Sigma'^{13}, \Sigma'^{24}$  から

$$T'_{x_n^* t_n^* x_{n^*-\hat{1}^*} t_n^*-\hat{2}^*} = \sum_{x_n^*, t_n^*} \Sigma'^{13}_{x_n^*, x_n^*} \Sigma'^{24}_{t_n^*, t_n^*} \tilde{T}_{x_n' t_n' x_{n^*-\hat{1}^*} t_n^*-\hat{2}^*} \quad (5.24)$$

と求めることができる。これらの縮約を図 5.2 に示す。したがって、中間テンソルがあれば、縮約をとらずに  $\Sigma'$  をつなげるだけで粗視化されたテンソルが得られる。この計算に必要な計算量は  $D_{\text{cut}}^5$  に比例する。

TRG の再重み付け法の手順をまとめると、

- 元となるパラメータにおける TRG において、SVD のユニタリ行列  $U^1, U^2, U^3, U^4$  と中間テンソル  $\tilde{T}$  を保存しておく。

- $U^1, U^2, U^3, U^4$  と  $T'$  から  $\Sigma'^{13}, \Sigma'^{24}$  をつくる。
- 中間テンソル  $\tilde{T}$  に  $\Sigma'^{13}, \Sigma'^{24}$  をつなげて、粗視化された  $T'$  を得る。

となる。 $D = D_{\text{cut}}$  とすれば、 $D_{\text{cut}}^5$  に比例する計算量が必要となる。通常の TRG に必要な計算量は  $D_{\text{cut}}^6$  に比例するので、計算量のオーダーが一つ落ちることになる。図??に TRG の再重み付け法の手順をまとめたものを示す。

### 5.3 GTRG の再重み付け法

この節では、前節で定式化した再重み付け法を GTRG へ拡張する。基本的には、ボソンテンソルに TRG の再重み付け法を適用することになる。元となるパラメータにおけるテンソルを  $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  とし、求めたい別のパラメータにおけるテンソルを  $T'_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  とする。

#### 5.3.1 テンソルの分解

まず、ボソンテンソル  $T$  に対する分解は、

$$\begin{aligned} M_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}^{13} &= T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} \\ &= \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}} U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*, b}}^1 \sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{13} U_{x_{n-1} t_{n-2}, x_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{3*} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} \simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{D_{\text{cut}}} U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*, b}}^1 \Sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{13} U_{x_{n-1} t_{n-2}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{3*} \quad (5.26)$$

$$\Sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}} = \sigma_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{13} \delta_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}} \quad (5.27)$$

である。これらによってボソンテンソル  $T'$  は

$$T'_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}} \simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}=1}^{D_{\text{cut}}} U_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*, b}}^1 \Sigma'_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{13} U_{x_{n-1} t_{n-2}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{3*} \quad (5.28)$$

$$\Sigma'_{x_{n^*-\hat{1}^*, b}, x'_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{13} = \sum_{x, t, x', t'} U_{x t, x_{n^*-\hat{1}^*, b}}^{1*} T'_{x t x' t'} U_{x' t', x'_{n^*-\hat{1}^*, b}}^3 \quad (5.29)$$

同様に、方向を 90 度回転させた分解については、 $T$  を

$$\begin{aligned} M_{t_n x_{n+2}, t_{n+2} x_{n-1+2}}^{24} &= (-1)^{t_{n,1}+t_{n,2}} T_{t_n x_{n+2}, t_{n+2} x_{n-1+2}} \\ &\simeq \sum_{t_{n^* - \hat{2}^*, b} = 1}^{D_{\text{cut}}} U_{t_n x_{n+2}, t_{n^* - \hat{2}^*, b}}^2 \sigma_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{24} U_{t_{n+2} x_{n-1+2}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{4*} \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$T_{t_n x_{n+2}, t_{n+2} x_{n-1+2}} \simeq \sum_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b} = 1}^{D_{\text{cut}}} U_{t_n x_{n+2}, t_{n^* - \hat{2}^*, b}}^2 \Sigma_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{24} U_{t_{n+2} x_{n-1+2}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{4*} \quad (5.31)$$

$$\Sigma_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{24} = \sigma_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{24} \delta_{t_{n^* - \hat{2}^*}, t'_{n^* - \hat{2}^*}, b} \quad (5.32)$$

と分解し、 $T'$  に対しては、

$$T'_{t_n x_{n+2}, t_{n+2} x_{n-1+2}} \simeq \sum_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b} = 1}^{D_{\text{cut}}} U_{t_n x_{n+2}, t_{n^* - \hat{2}^*, b}}^2 \Sigma'_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{24} U_{t_{n+2} x_{n-1+2}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{4*} \quad (5.33)$$

$$\Sigma'_{t_{n^* - \hat{2}^*, b}, t'_{n^* - \hat{2}^*, b}}^{24} = \sum_{x, t, x', t'} U_{tx, x_{n^* - \hat{1}^*}, b}^{2*} T'_{xt'x't} U_{t'x', x'_{n^* - \hat{1}^*}, b}^4 \quad (5.34)$$

とする。Grassmann 数については、3.3 と同様である。

### 5.3.2 自由度の縮約

通常の TRG における再重み付け法と同様に、まず、中間テンソルをつくる。ボソントンソルの SVD から得たユニタリ行列と Grassmann 数から

$$U_{x_n t_n x_{n^* - \hat{1}^*}}^1 = U_{x_n t_n, x_{n^* - \hat{1}^*}, b}^1 D_{x_n t_n}^1 d\bar{\eta}_{n^*}^{x_{n^* - \hat{1}^*}, f}, \quad (5.35)$$

$$U_{t_n x_{n+2}, t_{n^* - \hat{2}^*}}^2 = U_{t_n x_{n+2}, t_{n^* - \hat{2}^*}, b}^2 D_{t_n x_{n+2}}^2 d\bar{\xi}_{n^*}^{t_{n^* - \hat{2}^*}, f}, \quad (5.36)$$

$$U_{x_{n+2}, t_{n+1}, x'_{n^*}}^3 = U_{x_{n+2}, t_{n+1}, x'_{n^*}, b}^3 D_{x_{n+2}, t_{n+1}}^3 d\eta_{n^*}^{x'_{n^*}, f}, \quad (5.37)$$

$$U_{t_{n+1}, x_n, t'_{n^*}}^4 = U_{t_{n+1}, x_n, t'_{n^*}, b}^4 D_{t_{n+1}, x_n}^4 d\xi_{n^*}^{t'_{n^*}, f}. \quad (5.38)$$

なるテンソルを定義する。中間テンソルは、これらのテンソルから

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{x'_n, t'_n, x_{n^* - \hat{1}^*}, t_{n^* - \hat{2}^*}} &= \int \sum_{\{x_n, t_n\}} U_{x_n t_n x_{n^* - \hat{1}^*}}^1 U_{t_n x_{n+2}, t_{n^* - \hat{2}^*}}^2 U_{x_{n+2}, t_{n+1}, x'_{n^*}}^3 U_{t_{n+1}, x_n, t'_{n^*}}^4 \\ &\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^* + \hat{1}^*} \eta_{n^*})^{x'_{n^*}, f} (\bar{\xi}_{n^* + \hat{2}^*} \xi_{n^*})^{t'_{n^*}, f} \\ &\quad \cdot \delta_{\sum_i (x_{n, i} + t_{n, i}) \bmod 2, x_{n^* - \hat{1}^*}, b} \delta_{\sum_i (t_{n, i} + x_{n+2, i}) \bmod 2, t_{n^* - \hat{2}^*}, b} \\ &\quad \cdot \delta_{\sum_i (x_{n+2, i} + t_{n+1, i}) \bmod 2, x'_{n^*}, b} \delta_{\sum_i (t_{n+1, i} + x_{n, i}) \bmod 2, t'_{n^*}, b} \\ &= \tilde{T}_{x'_n, t'_n, x_{n^* - \hat{1}^*}, t_{n^* - \hat{2}^*}} d\eta_{n^*}^{x'_{n^*}, f} d\xi_{n^*}^{t'_{n^*}, f} d\bar{\eta}_{n^* - \hat{1}^*}, f d\bar{\xi}_{n^* - \hat{2}^*}, f \\ &\quad \cdot (\bar{\eta}_{n^* + \hat{1}^*} \eta_{n^*})^{x'_{n^*}, f} (\bar{\xi}_{n^* + \hat{2}^*} \xi_{n^*})^{t'_{n^*}, f} \end{aligned} \quad (5.39)$$

と得られる。粗視化されたテンソルは、この中間テンソルから

$$\mathcal{T}_{x_n^* t_n^* x_{n^*-\hat{1}}^* t_{n^*-\hat{2}}^*} = \sum_{x_{n^*}^*, t_{n^*}^*} \Sigma_{x_n^*, b, x_{n^*}^*, b}^{\prime 13} \delta_{x_n^*, f, x_{n^*}^*, f} \Sigma_{t_n^*, b, t_{n^*}^*, b}^{\prime 24} \delta_{t_n^*, f, t_{n^*}^*, f} \tilde{\mathcal{T}}_{x_{n^*}^* t_{n^*}^* x_{n^*-\hat{1}}^* t_{n^*-\hat{2}}^*}, \quad (5.40)$$

$$\mathcal{T}'_{x_n^* t_n^* x_{n^*-\hat{1}}^* t_{n^*-\hat{2}}^*} = \sum_{x_{n^*}^*, t_{n^*}^*} \Sigma_{x_n^*, b, x_{n^*}^*, b}^{\prime 13} \delta_{x_n^*, f, x_{n^*}^*, f} \Sigma_{t_n^*, b, t_{n^*}^*, b}^{\prime 24} \delta_{t_n^*, f, t_{n^*}^*, f} \tilde{\mathcal{T}}_{x_{n^*}^* t_{n^*}^* x_{n^*-\hat{1}}^* t_{n^*-\hat{2}}^*} \quad (5.41)$$

と得られる。

## 5.4 計算結果

自由エネルギーの再重み付け法と厳密値との相対誤差

$$\delta = \frac{\ln Z_{\text{RW}} - \ln Z_{\text{exact}}}{\ln Z_{\text{exact}}}, \quad (5.42)$$

を  $\mu$  を変えながら計算した結果を 5.3 に示す。相対誤差は元のパラメータから遠くなるほど、また、格子サイズが大きくなるほど大きくなる傾向が見られた。特に元のパラメータが相転移点近くの場合 ( $\mu = 1$ ) では、転移点から離れている場合 ( $\mu = 0, \mu = 2$ ) よりもすみやかに相対誤差が大きくなった。

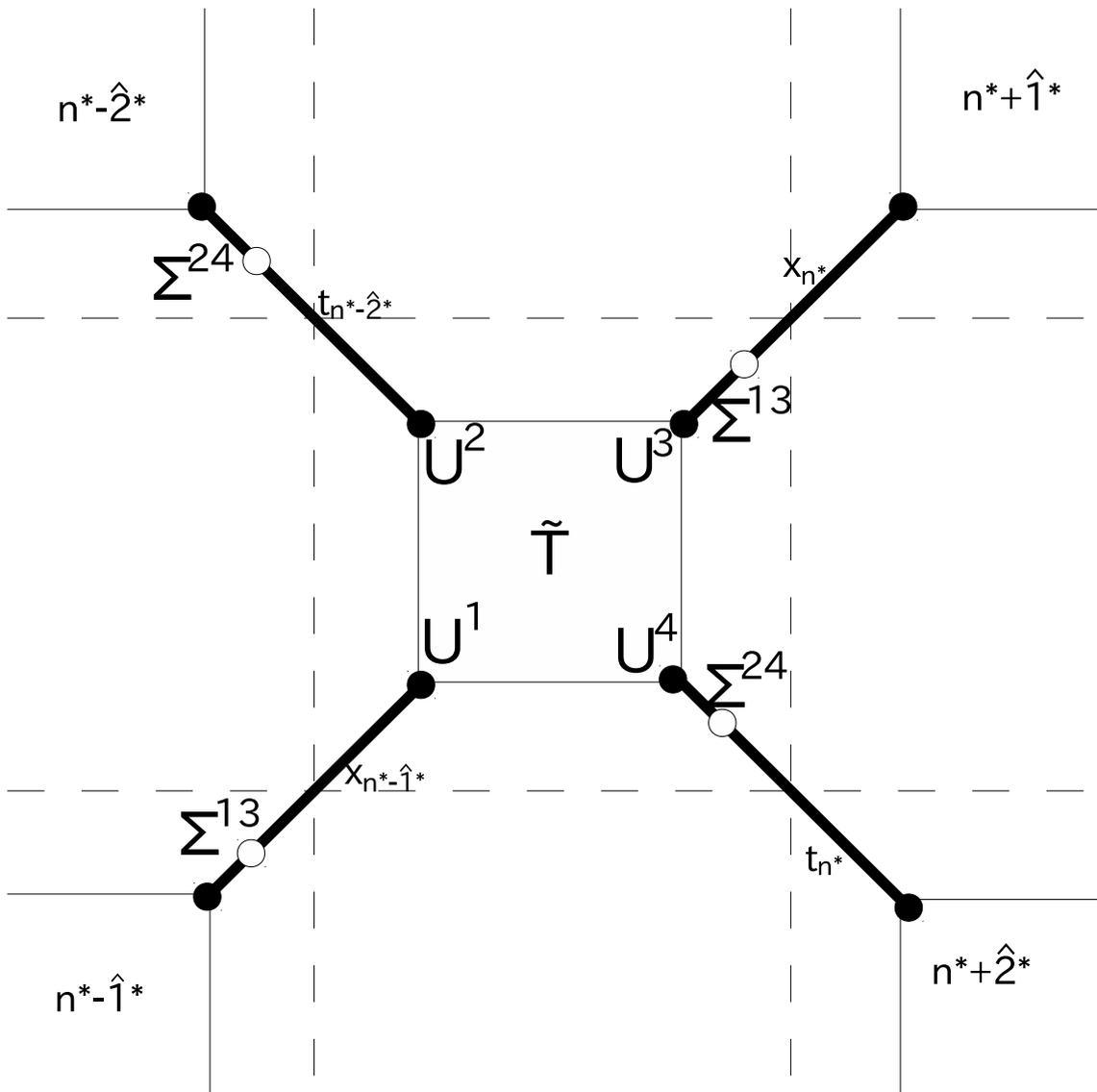


図 5.2: 粗視化された格子点  $n^*$  における縮約の図である。まず  $U^1, U^2, U^3, U^4$  から  $\tilde{T}$  をつくり、そこに  $\Sigma^{13}, \Sigma^{24}$  をつなぐ。

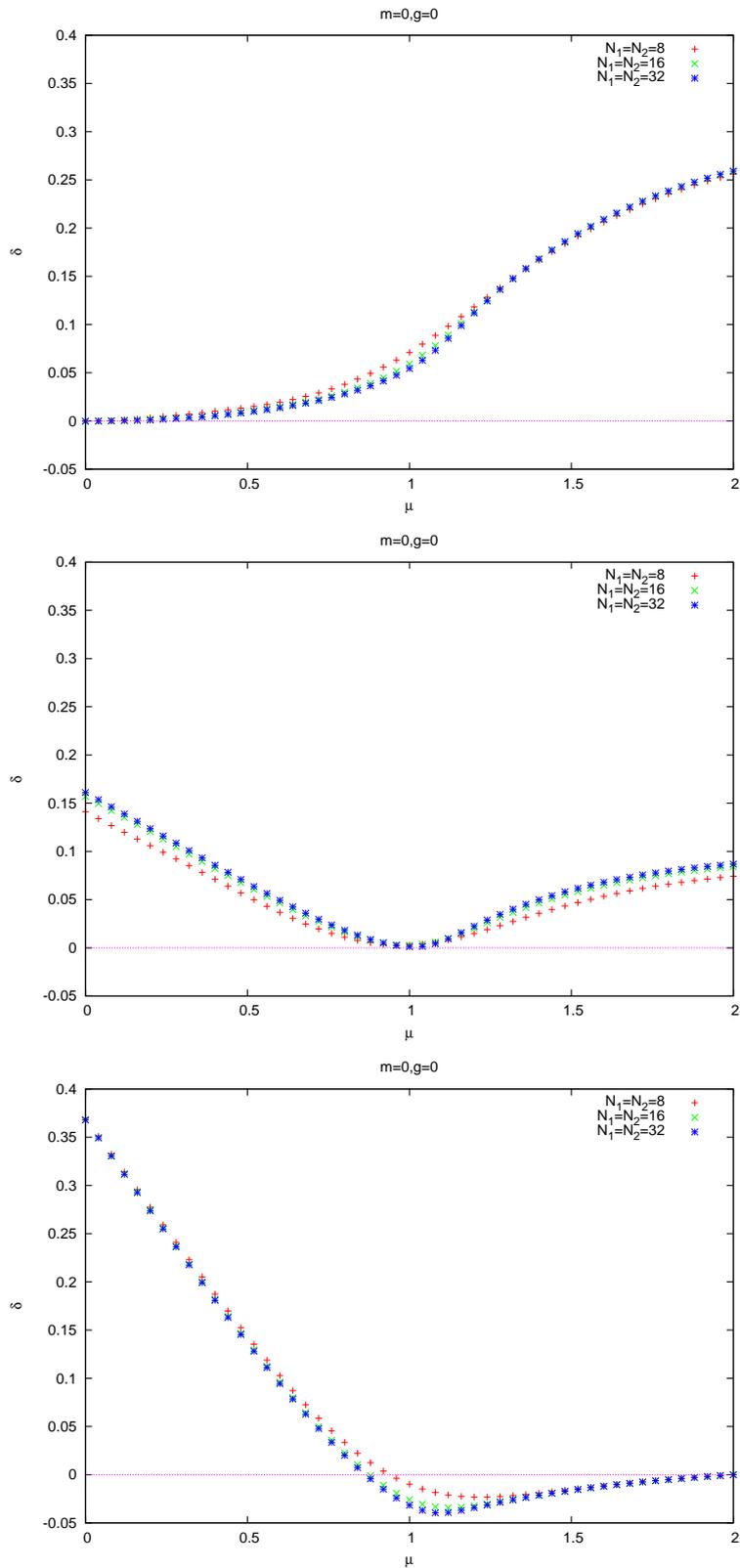


図 5.3:  $D_{\text{cut}} = 64$  に固定した再重み付け法による計算結果と厳密値との相対誤差の  $\mu$  に対する変化を示す。元にしたパラメータは上から  $\mu = 0, 1, 2$  である。

## 第6章 まとめと展望

この研究では、GTRGを Wilson フェルミオンによって定式化した化学ポテンシャルを持つ 1 フレーバーの格子 Gross-Neveu モデルに適用した。有限のフェルミオン密度が現れる非自明なパラメータにおいて、相転移のような振る舞いがあったが、有限サイズスケールリングの結果、それがクロスオーバーであることが分かった。また、TRG は相転移点近傍で精度が落ちることが知られていたが、クロスオーバーであっても精度が落ちることが分かった。

TRG の再重み付け法を導入し、いくつかのパラメータで計算を試みた。その結果、誤差は元のパラメータから遠くなるほど、また、格子サイズが大きくなるほど大きくなる傾向が見られた。また、元のパラメータが転移点近くの場合では、転移点から離れている場合よりもすみやかに誤差が大きくなった。

この研究は、初めて GTRG を有限密度系に適用したものである。今後、ここでの定式化を他の有限密度系へと拡張していきたい。

## 付録 A ボソンテンソルの詳細

この付録 A では、式 (3.39) で与えたボソンテンソル  $T_{x_n t_n x_{n-1} t_{n-2}}$  の成分を明示する。添字については、

$$T_{x_n, 1 x_n, 2 t_n, 1 t_n, 2 x_{n-1}, 1 x_{n-1}, 2 t_{n-2}, 1 t_{n-2}, 2} \quad (\text{A.1})$$

とする。

$$\begin{aligned}
 T_{00000000} &= (m+2)^2 + 2g^2, & T_{00000110} &= -\frac{(m+2)}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{00001001} &= \frac{(m+2)}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, \\
 T_{00001111} &= \frac{-1}{2}, & T_{10001000} &= -(m+2), & T_{00000010} &= \frac{-(m+2)}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, \\
 T_{00001110} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{00001011} &= \frac{-1}{2}, & T_{01000100} &= (m+2), \\
 T_{00000001} &= -\frac{(m+2)}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, & T_{00001101} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, & T_{00000111} &= \frac{-1}{2}, \\
 T_{11001100} &= 1, & T_{00000110} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{00001001} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, \\
 T_{00000011} &= \frac{-1}{2}, & T_{00101000} &= \frac{-(m+2)}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{00000010} &= -(m+2)e^\mu, \\
 T_{00001110} &= \frac{-1}{2}e^\mu, & T_{00001011} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{10101010} &= \frac{-1}{2}e^\mu, \\
 T_{01100000} &= \frac{(m+2)}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{00001100} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{00000110} &= \frac{1}{2}e^\mu, \\
 T_{00001001} &= 1, & T_{00000011} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{11101000} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, \\
 T_{00000010} &= \frac{1}{2}e^\mu, & T_{00010100} &= \frac{-(m+2)}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, & T_{00000001} &= (m+2)e^{-\mu}, \\
 T_{00001101} &= \frac{-1}{2}e^{-\mu}, & T_{00000111} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, & T_{10010000} &= -\frac{(m+2)}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, \\
 T_{00001100} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, & T_{00000110} &= 1, & T_{00001001} &= \frac{1}{2}e^{-\mu}, \\
 T_{00000011} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, & T_{01010101} &= \frac{-1}{2}e^{-\mu}, & T_{11010100} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, \\
 T_{00000001} &= \frac{1}{2}e^{-\mu}, & T_{00111100} &= \frac{-1}{2}, & T_{00000110} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, \\
 T_{00001001} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, & T_{00000011} &= 1, & T_{10111000} &= \frac{1}{2}, \\
 T_{00000010} &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\mu}{2}}, & T_{01110100} &= \frac{1}{2}, & T_{00000001} &= \frac{-1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\mu}{2}}, \\
 T_{11110000} &= \frac{-1}{2}
 \end{aligned}$$

ここに示さなかった成分は全て 0 をとるため、ここでは省略した。このように成分が疎になるのは、式 (3.43) の条件があることが理由の一つである。

4 点相互作用のカップリング  $g^2$  が最初の成分にのみ含まれることに注意すべきである。この著しい性質は、フレーバー数を 1 に固定したことによる。フレーバー数を増やせば、ボソンテンソルの構造も複雑になり、他の成分にも  $g^2$  が現れることが予想される。

## 参考文献

- [1] M. Levin and C. P. Nave, Phys. Rev. Lett. 99, 120601 (2007)
- [2] Z.-C. Gu, Phys. Rev. B 88, 115139 (2013)
- [3] J. F. Yu, Z. Y. Xie, Y. Meurice, Y. Liu, A. Denbleyker, H. Zou, M. P. Qin, J. Chen, and T. Xiang, Phys. Rev. E 89, 013308 (2014)
- [4] J. Unmuth-Yockey, Y. Meurice, J. Osborn, H. Zou, arXiv:1411.4213 [hep-lat]
- [5] Y. Shimizu, Mod. Phys. Lett. A 27, 1250035 (2012)
- [6] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, Phys. Rev. D. 90, 014508 (2014)
- [7] Z. Y. Xie, H. C. Jiang, Q. N. Chen, Z. Y. Weng, T. Xiang, Phys. Rev. Lett. 103 160601 (2009)
- [8] Z. Y. Xie, J. Chen, M. P. Qin, J. W. Zhu, L. P. Yang, T. Xiang, Phys. Rev. B 86, 045139 (2012)
- [9] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, Phys. Rev. D. 90, 074503 (2014)
- [10] D. J. Gross, A. Neveu, Phys. Rev. D 10, 3235 (1974)
- [11] H.H. Zhao, Z.Y. Xie, Q.N. Chen, Z.C. Wei, J.W. Cai, T. Xiang, Physical Review B 81, 174411 (2010)
- [12] Ken-Ichi Aoki, Tamao Kobayashi, Hiroshi Tomita, Int.J.M.Phys.B, 119 (2009)3739-3751
- [13] T. Eguchi and R. Nakayama, Phys. Lett. B 126, 89 (1983).
- [14] S. Aoki and K. Higashijima, Prog. Theor. Phys. 76, 521 (1986).
- [15] T. Izubuchi, J. Noaki and A. Ukawa, Phys. Rev. D. 58, 114507 (1998)
- [16] J. B. Kogut, H. Matsuoka, M. Stone, H. W. Wyld, S. Shenker, J. Shigemitsu, D. K. Sinclair, Nucl. Phys. B225 [FS], 93 (1983) ; P. Hasenfratz F. Karsch, Phys. Lett. 125B, 308 (1983)

## 謝辞

指導して下さった青木健一先生、武田真滋先生をはじめとして、Latticeグループの中本智洋さん、河内比花留さん、坂井涼さん、八木健太さん、RGグループの小林玉青さん、藤井康弘さん、佐藤大輔さんには、大変お世話になりました。理化学研究所計算科学研究機構の藏増嘉伸さん、清水裕也さんにはとても有用なアドバイスを頂きました。大変感謝しております。スタッフの久保治輔先生、末松大二郎先生、青木真由美先生にはゼミやセミナーを通して、大変有用なコメントをいただきました。また、秘書の西川涼子さんにも多くのサポートを頂きました。感謝しています。