Mathematical Analysis of a Ball Bouncing Problem by Using Discrete Morse Flow

メタデータ	言語: jpn
	出版者:
	公開日: 2017-10-05
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者:
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/42338

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.

博　士　論　文

離散勾配流を用いたボールバウンスの数理解析

金沢大学自然科学研究科
数物科学専攻

学籍番号　　　0923102006
氏名　　　　　菊田　　章
主任指導教員名　小俣　正朗

提出年月日　　　2015年1月5日

目 次

第 1 章　序論 **1**

第 2 章　弾性体リング (shell) システムのモデリング **3**

2.1　Shell の弾性エネルギー 4
2.2　Shell の運動エネルギー 6
2.3　内部ガスのエネルギー 6
2.4　重力ポテンシャル 7
2.5　Shell の体積について 7
2.6　Action Integral と第一変分 7
2.7　体積保存問題 12

第 3 章　数値計算 **14**

3.1　数値計算法-双曲型離散勾配流法 14
3.2　数値シミュレーション 15
3.3　数値シミュレーション 2 23

第 4 章　まとめ **32**

第 5 章　付録 **33**

第1章　序論

本研究ではボール (中空の弾性体の殻 (shell)) が平らな障害物に衝突し跳ね返る現象を取り扱う．ボールは重力で自由落下し平面の障害物に局所的な反発係数 0 で衝突する．衝突によりボールが変形することで弾性エネルギーが蓄えられ, これにより跳ね返る現象が起きる．この種の問題について実験・理論ともに様々な研究が行われてきた．殻 (shell) の質量の中心の運動だけを扱う最も簡単なモデル ([17],[3]) から始まり, [2](詳細は [18]) のような, 精巧な有限要素モデルにまで多岐に渡っている．

本論文の目的は, 厳密な数学的解析への発展性があり, 衝突の局所的現象にとどまらず, 体積保存など (ボールの中に非圧縮性流体が入っている場合など) 大域的情報を含むモデルの構築にある．既存の研究として局所的な情報を取り扱ったものとして, [2],[12],[10] などが見受けられる．これらは一部の簡略化された問題で数学的に厳密な結果は存在するが, 一般の場合では数学的結果は得られていない．このような先行研究の中で, 本研究は局所的情報 (運動方程式) と大域的情報 (体積保存 · 位置エネルギー) などを同時にモデリングしたという意味で全く新しい問題であると考えている．

弾性体の振動は数学的には難問であり, 一般のモデルでは厳密な結果は得られていない．そこで殻の厚さを仮想的に 0 にする方法で数値解析の次元を下げるモデルを構築した．殻が十分薄い場合には現象解析に通用するモデルである．次に衝突現象の取り扱いであるが, 数学では難問とされている．先行研究として, 1 次元のストリング (スカラー関数のグラフで書かれている場合) が, 障害物と完全弾性衝突する問題について [15] で扱われている．しかしながら完全弾性衝突では障害物の無い方程式の解を障害物に当たった時に, 折り返せば記述できるので, 問題の焦点は “折り返す部分の測度論的取り扱い” に特化している．従って現象論的なおもしろさは追求できない．そこで現実の問題に近づけるために本論文では殻と平面が局所的には完全非弾性衝突の場合を取り扱うこととした．完全非弾性衝突の場合は, [14],[6],[19] において, (スカラー関数のグラフで書くことが出来ると仮定した) ゴムひもが障害物に衝突する現象を取り扱っており, 一部の問題ではエネルギー評価と解の存在が証明されている．これらの論文では, 退化した双曲型方程式が現れ通常の方法論では解法が構築できず, 変分法に基づく双曲型 (波動型) 離散勾配流を用いて近似解の構成, エネルギー評価, 一次元の場合の解の存在証明などを行っている．離散勾配流は本論文でも主要な方法論として採用しているが, 単純化して説明すると, Lagrangean による action の停留点を求める問題を, 時間方向を離散化することにより, 近似最小化問題としたものが離散勾配流である．最小化法を使うことが出来れば, 退化作用素の取り扱いや大域的取り扱いは大変楽になる場合が多い．

本研究で考慮する殻は, もはやスカラー関数のグラフで書くことは出来ず, ベクトル値関数として殻を表現した．これを用いて, 殻 (shell) のエネルギーは, 弾性エネルギー (曲げ, 伸縮), 殻内部の気体エネルギー, 位置エネルギー, 運動エネルギーである．さらに殻の

囲う体積 (面積) 保存条件を課すこともできる．衝突は障害物の形状に強制的に変形されるものとした．これらから Lagrangian を導出し, 作用積分 (action integral) を定義し停留点を計算することで運動方程式を得ることが出来る．実際の計算は前出の離散勾配流を用いて行っている．弾性エネルギーを考慮していることから荒く言うと空間変数の 4 階微分が出現し加速度の時間 2 階微分との組み合わせでは双曲型に分類されないが前出の双曲型 (波動型) 離散勾配流はほぼそのまま使うことが出来る．しかしながら, 解の存在などについては結果を得ることが出来なかった．本研究全体を俯瞰すると, 衝突を伴う弾性体の運動を破綻無く取り扱うことに成功し, 離散 Lagrangean など呼ぶべき方法論の構築も出来た．また, 3 次元への拡張もそのまま出来るモデルでありこの先の発展も期待できると信じている．

第2章　弾性体リング(shell)システムのモデリング

本章では弾性体の殻 (shell) が障害物にぶつかって跳ね返る現象についてのモデリングを行う．ここでは 2 次元の問題で障害物が水平な直線 (x 軸) である場合を考える．殻は厚さのない弾性体として扱う．厚さがないと “曲げ” のエネルギーがなくなってしまうので, 仮にリングの厚さを考え, 曲げのエネルギーをカウントしてから厚さのないリングへの縮約を行うものとする．殻の厚さは非常に薄いという仮定をして中心線で近似する．また, 殻は常に閉曲線で表されることとする．時刻 $t \geq 0$ における殻の形 (もっと正確には中心

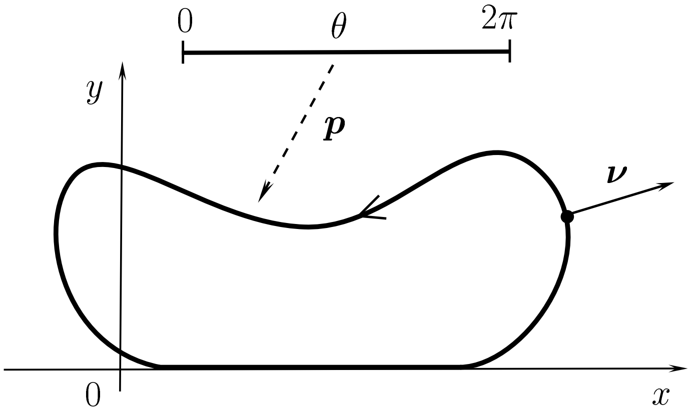

図 2.1: ボール (殻) のパラメータ表示

線の形) は $\theta \in [0, 2\pi]$ をパラメータとする閉曲線 $\boldsymbol{p}(t) = (p^1(t), p^2(t))$ を用いて書くことにする．これにより, $\boldsymbol{p}$ の外向き単位法ベクトルは

$$\boldsymbol{\nu}(\theta) = \frac{1}{|\boldsymbol{p}_\theta(\theta)|}(p^2_\theta(\theta), -p^1_\theta(\theta))$$

と書くことができる．これは $\boldsymbol{p}$ で囲われた領域の外を常に向いている．ここで

$$\boldsymbol{p}_\theta(t,\theta) = (p^1_\theta(t,\theta), p^2_\theta(t,\theta)) = \Big(\frac{\partial p^1}{\partial \theta}(t,\theta), \frac{\partial p^2}{\partial \theta}(t,\theta)\Big),$$

という記号を用いる．接ベクトルは $\boldsymbol{\tau}(\theta) = \boldsymbol{p}_\theta(\theta)/|\boldsymbol{p}_\theta(\theta)|$ で与えられ, 弧長パラメータは

$$s(t,\theta) = \int_0^\theta |\boldsymbol{p}_\theta(t,\vartheta)|\, d\vartheta$$

で与えられる．平衡状態で障害物に接していないときは $\boldsymbol{q}(\theta)$ で形状が与えられるものとする．

2.1 Shell の弾性エネルギー

本モデルでは shell は 1 次元であるが "曲げ" のエネルギーを考慮するために仮想的に "厚み" を考えよう. 下図のように bending と stretching が行われた場合についてエネルギーの計算をする. 原点を不動点として, 点 (x, y) が (x', y') へ変位したとする. $\xi \in (-h/2, h/2)$

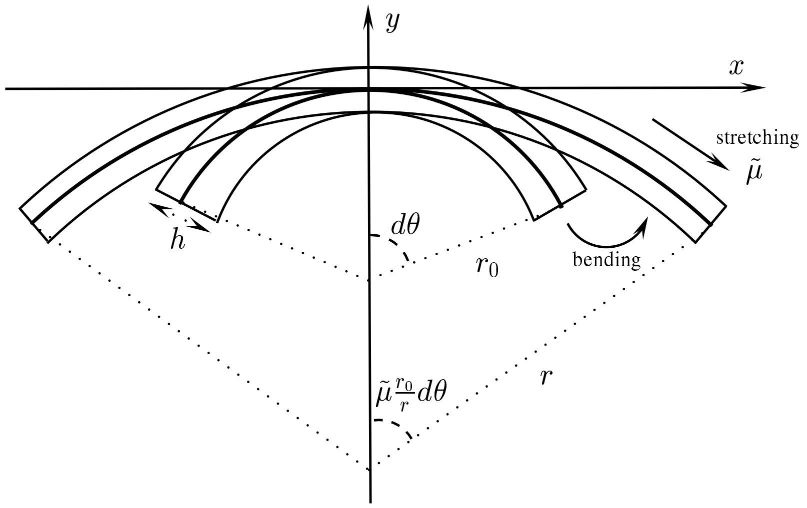

図 2.2: 殻 (shell) の極小部分の曲りと伸縮

を半径方向の "場所" をあらわすパラメータとする. また $\mu = \frac{r_0}{r}\tilde{\mu}$ とおく. すると元の点 (x, y) と変位した点 (x', y') は次のように表現できる.

$$
\begin{aligned}
(x, y) &= \bigl(-(r_0+\xi)\sin\theta, -r_0+(r_0+\xi)\cos\theta\bigr), \qquad \theta \in (-d\theta/2, d\theta/2),\\
(x', y') &= \bigl(-(r+\xi)\sin\mu\theta, -r+(r+\xi)\cos\mu\theta\bigr), \qquad \theta \in (-d\theta/2, d\theta/2).
\end{aligned}
$$

伸縮による幅の変化は無視できるものとする. このとき,

$$
\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\sin\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\cos\theta}{r_0+\xi}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial y} = \cos\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\sin\theta}{r_0+\xi},
$$

なので変位テンソルは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial(x'-x)}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x'-x)}{\partial y} + \frac{\partial(y'-y)}{\partial x}\right) \\ \text{sym.} & \frac{\partial(y'-y)}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\mu\theta + \mu\frac{r+\xi}{r_0+\xi}\cos\theta\cos\mu\theta - 1 & \frac{1}{2}\left(-\sin(1+\mu)\theta + \mu\frac{r+\xi}{r_0+\xi}\sin(1+\mu)\theta\right) \\ \text{sym.} & \cos\theta\cos\mu\theta + \mu\frac{r+\xi}{r_0+\xi}\sin\theta\sin\mu\theta - 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\mu\frac{r+\xi}{r_0+\xi} - 1\right)\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix} + \text{h.o.t.}
\end{aligned}
$$

となる. ε_{12} と ε_{22} は ε_{11} より低い次数なので, 弾性エネルギーを計算するとき, ε_{11} からの影響だけを考慮すると,

$$
dE_e = \frac{1}{2}\int_{-h/2}^{h/2}\int_{-d\theta/2}^{d\theta/2} k\varepsilon_{11}^2 r_0\, d\theta\, d\xi = \frac{1}{2}kr_0\, d\theta\int_{-h/2}^{h/2}\left(\tilde{\mu}\frac{r_0}{r}\frac{r+\xi}{r_0+\xi} - 1\right)^2 d\xi.
$$

ここで, k は弾性率とする．さらに,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{r_0^2}{r^2}\frac{(r+\xi)^2}{(r_0+\xi)^2}\,d\xi = \frac{r_0^2}{r^2}\left(1+\frac{2(r-r_0)}{h}\log\frac{r_0+h/2}{r_0-h/2}+\frac{(r-r_0)^2}{r_0^2-h^2/4}\right)\\ \beta &= \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\frac{r_0}{r}\frac{r+\xi}{r_0+\xi}\,d\xi = \frac{r_0}{r}\left(1+\frac{r-r_0}{h}\log\frac{r_0+h/2}{r_0-h/2}\right),\end{aligned}$$

とおけば,

$$\begin{aligned}dE_e &= \frac{1}{2}khr_0\,d\theta(\alpha\tilde{\mu}^2-2\beta\tilde{\mu}+1)\\ &= \frac{1}{2}khr_0\,d\theta\big\{(\alpha-1+1)(\tilde{\mu}-1)^2+2(\alpha-\beta)(\tilde{\mu}-1)+\alpha-1-2(\beta-1)\big\},\end{aligned}$$

と書ける．対数をテイラー展開の 3 次まで近似すると

$$\log\frac{r_0+h/2}{r_0-h/2} = \frac{h(6r_0^2-9r_0h+5h^2)}{6(r_0-h/2)^3}+\mathrm{h.o.t.},$$

となる．よって

$$\alpha-1 = \frac{h^2r_0^2(r-r_0)(3r-r_0)}{12r^2(r_0-\frac{h}{2})^3(r_0+\frac{h}{2})}+\mathrm{h.o.t.},\qquad \beta-1 = \frac{h^2r_0(r-r_0)}{12r(r_0-\frac{h}{2})^3}+\mathrm{h.o.t.},$$

を得る．さらに計算をすることによって次の式を得る:

$$dE_e = \frac{1}{2}khr_0\,d\theta\Big\{(\tilde{\mu}-1)^2+\frac{1}{6}h^2(\tilde{\mu}-1)\frac{(r_0-r)(2r-r_0)}{r_0^2r^2}+\frac{1}{12}h^2\frac{(r_0-r)^2}{r_0^2r^2}\Big\}+\mathrm{h.o.t.}.$$

簡単な考察により, $\tilde{\mu}-1\approx\frac{h}{2}(1/r-1/r_0)$ を得る．上式の右辺の第 1 項と第 3 項は同じ次数であり, 第 2 項は十分小さい $h>0$ では無視することができる．よって, 弾性エネルギーの総量は,

$$\begin{aligned}E_e(\boldsymbol{p}) &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}kh\Big\{\frac{1}{12}h^2\frac{(r_0-r)^2}{r_0^2r^2}+(\tilde{\mu}-1)^2\Big\}r_0\,d\theta\\ &= \frac{1}{2}kh\int_0^{2\pi}\Big\{\frac{1}{12}h^2(\kappa-\kappa_0)^2+\Big(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|}-1\Big)^2\Big\}|\boldsymbol{q}_\theta|\,d\theta,\end{aligned}$$

となる．最後の等式は, $\tilde{\mu}$ が局所拡張率 $|\boldsymbol{p}_\theta|/|\boldsymbol{q}_\theta|$ であることと $1/r$ が局所曲率 κ であることを用いている．また, $\kappa(0)$ は殻の自然な形での平均曲率である．

$$\kappa(\theta) = -\frac{\partial^2\boldsymbol{p}}{\partial s^2}(\theta)\cdot\boldsymbol{\nu}(\theta) = -\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}(\theta)\cdot A\boldsymbol{p}_\theta(\theta)}{|\boldsymbol{p}_\theta(\theta)|^3},$$

となる．ただし,

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

であり,

$$\boldsymbol{\nu}(\theta) = \frac{A\boldsymbol{p}_\theta(\theta)}{|\boldsymbol{p}_\theta(\theta)|}$$

は $\boldsymbol{p}$ の θ における外向き単位法線ベクトルとなる．上記の弾性エネルギーの積分において，$|\boldsymbol{q}_\theta|\,d\theta$ を $|\boldsymbol{p}_\theta|d\theta$ に変形することができる．実際，$|\boldsymbol{p}_\theta| = |\boldsymbol{q}_\theta| + (\tilde{\mu}-1)|\boldsymbol{q}_\theta|$ であり，考慮している近似オーダーの範囲内で，この変形は積分に影響を与えない．したがって弾性エネルギーは

$$E_e(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{24}kh^3\int_0^{2\pi}(\kappa-\kappa_0)^2|\boldsymbol{p}_\theta|\,d\theta + \frac{1}{2}kh\int_0^{2\pi}\Big(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|}-1\Big)^2|\boldsymbol{q}_\theta|\,d\theta \tag{2.1}$$

と書くことができる．

2.2 Shell の運動エネルギー

さて次に shell の運動エネルギーを見てみよう．殻の定常状態の平均質量密度を σ で表すこととし，殻のある時刻の局所的な密度 $\boldsymbol{p}$ は $\sigma|\boldsymbol{q}_\theta|/|\boldsymbol{p}_\theta|$ と表すことができる．また，力学的エネルギーは

$$E_k(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}h\int_0^{2\pi}\sigma|\boldsymbol{q}_\theta|\,|\boldsymbol{p}_t|^2\chi_{p^2>0}\,d\theta \tag{2.2}$$

で与えられる．ここで特性関数 $\chi_{p^2>0}$ は集合

$$\{p^2>0\} = \{(t,\theta)\in(0,T)\times(0,2\pi);\ p^2(t,\theta)>0\}$$

に対するものである．これは，殻の一部が障害物に接触したときに運動エネルギーが消えるということを意味している．すなわち局所的な反発係数が 0 で，衝突直後殻が障害物に密着した状態になる．

ただ，力学的エネルギーは消滅するが，弾性エネルギーなどはこの限りでは無いが，すべてのエネルギーが 0 となるのは一番易しい近似 (第一近似) であり，これを採用する．

2.3 内部ガスのエネルギー

さらに内部のガスの圧縮によるエネルギーも考慮する．圧縮が十分小さく，断熱変化とすると，圧力変化 $P-P_0$ は

$$P-P_0 \approx c^2(\rho-\rho_0),$$

と近似できる．ただし，P_0 と ρ_0 はそれぞれ殻の外形が自然な場合の「空気圧」と「密度」とする．音速を c とする． 内部ガスの体積は V であるとする．圧力がマイナスに仕事するとすると

$$E_g(\boldsymbol{p}) = -\int_{V_0}^{V}P\,dV = -\int_{V_0}^{V}\Big\{P_0+c_g\big(\frac{1}{V}-\frac{1}{V_0}\big)\Big\}\,dV = -P_0(V-V_0)-c_g\Big(1-\frac{V}{V_0}+\ln\frac{V}{V_0}\Big). \tag{2.3}$$

となる．ここで，定数 c_g はガスの質量と $\sqrt{c}$ をかけたものである．定常状態での体積は V_0 とする．

2.4　重力ポテンシャル

殻が重力で下に落ちて平面と衝突すると仮定すると重力ポテンシャルも考慮する必要がある. 殻の重力ポテンシャルは次の形のものを導入する:

$$E_p(\boldsymbol{p}) = gh\int_0^{2\pi} \sigma|\boldsymbol{q}_\theta|p^2\chi_{p^2>0}\,d\theta. \tag{2.4}$$

2.5　Shell の体積について

また, 殻の体積は

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta)\chi_{p^2>0}\,d\theta$$

で与えられる.

2.6　Action Integral と第一変分

以上考慮すると action integral は,

$$S(\boldsymbol{p}) = \int_0^T \big(E_e(\boldsymbol{p}) + E_g(\boldsymbol{p}) + E_p(\boldsymbol{p}) - E_k(\boldsymbol{p})\big)\,dt \tag{2.5}$$

と表現することができる.

さて, Hamilton の原理を使うと, 殻の自由に動ける部分の支配方程式は次の第一変分

$$\frac{d}{d\epsilon}S(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\Big|_{\epsilon=0} = 0 \qquad \forall\boldsymbol{\phi}\in\Big[C_0^\infty\big((0,2\pi)\times(0,T)\cap\{p^2>0\}\big)\Big]^2, \tag{2.6}$$

より計算することができる.

局所的な (定常時との相対) 密度を次の $\rho(\theta) = |\boldsymbol{p}_\theta(\theta)|/|\boldsymbol{q}_\theta(\theta)|$ を用いて表現することとする. 実際に第一変分を計算してみよう. 弾性エネルギーの第一変分を計算するために

$$\begin{aligned} E_e(\boldsymbol{p}) &= \frac{kh^3}{24}\int_0^{2\pi}(\kappa^2 - 2\kappa\kappa_0 + \kappa_0^2)|\boldsymbol{p}_\theta|\,d\theta + \frac{kh}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|} - 1\right)^2|\boldsymbol{q}_\theta|\,d\theta \\ &=: \frac{kh^3}{24}\big\{E_{b1}(\boldsymbol{p}) - 2\kappa_0 E_{b2}(\boldsymbol{p}) + \kappa_0^2 E_{b3}(\boldsymbol{p})\big\} + \frac{kh}{2}E_s(\boldsymbol{p}) \end{aligned}$$

とおく. まずは E_{b1} の第一変分を計算する.

$$\begin{aligned} &\frac{dE_{b1}}{d\epsilon}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi}) \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{d}{d\epsilon}\frac{\{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}+\epsilon\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\}^2}{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|^5}\,d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}+\epsilon\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)}{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|^5}\{\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta) + (\boldsymbol{p}_{\theta\theta}+\epsilon\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta\}\,d\theta \\ &\quad -5\int_0^{2\pi}\frac{\{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}+\epsilon\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\}^2}{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|^7}(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta \end{aligned}$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
&\frac{dE_{b1}}{d\epsilon}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0}\\
&=2\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5}\left\{\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta+\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta\right\}d\theta-5\int_0^{2\pi}\frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta)^2}{|\boldsymbol{p}_\theta|^7}\boldsymbol{p}_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta\\
&=-2\int_0^{2\pi}\frac{\kappa}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}A\boldsymbol{p}_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}\,d\theta-2\int_0^{2\pi}\frac{\kappa}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta-5\int_0^{2\pi}\kappa^2\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta\\
&=:\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.
\end{aligned}
$$

となる. 次の等式変形の第 1 式は部分積分と $\boldsymbol{a}\cdot A\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\cdot A\boldsymbol{a}$ を用いて得られる.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}+\mathrm{II} &= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{\kappa}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}A\boldsymbol{p}_\theta\right)_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta+2\int_0^{2\pi}\frac{\kappa}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}A\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta\\
&= 2\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\kappa}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}\right)_\theta A\boldsymbol{p}_\theta+2\frac{\kappa}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}A\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\right\}\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta\\
&= 2\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\kappa_\theta A\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}-\frac{2\kappa(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{p}_\theta)A\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^4}+2\frac{\kappa}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}A\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\right\}\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
A\boldsymbol{p}_{\theta\theta}=\frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{p}_\theta)A\boldsymbol{p}_\theta-(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta)\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}=\frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{p}_\theta)A\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}+\kappa\boldsymbol{\tau}|\boldsymbol{p}_\theta|^2 \tag{2.7}
$$

であることに注意して上式を等式変形すれば,

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_{b1}}{d\epsilon}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0} &= 2\int_0^{2\pi}(\kappa_s\boldsymbol{\nu}+2\kappa^2\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta+\mathrm{III}\\
&= \int_0^{2\pi}(2\kappa_s\boldsymbol{\nu}-\kappa^2\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta\\
&= -\int_0^{2\pi}(2\kappa_s\boldsymbol{\nu}-\kappa^2\boldsymbol{\tau})_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}\,d\theta\\
&= \int_0^{2\pi}(2\kappa_{ss}|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\nu}+2\kappa_s|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\nu}_s-2\kappa\kappa_s|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\tau}-\kappa^2|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\tau}_s)\cdot\boldsymbol{\phi}\,d\theta
\end{aligned}
$$

さらにここで,

$$
\boldsymbol{\nu}_s=\kappa\boldsymbol{\tau},\qquad \boldsymbol{\tau}_s=-\kappa\boldsymbol{\nu}
$$

であることに注意して上式を再度変形すれば, 結局

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_{b1}}{d\epsilon}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0} &= \int_0^{2\pi}(2\kappa_{ss}|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\nu}+\kappa^3|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\nu})\cdot\boldsymbol{\phi}\,d\theta\\
&= \int_{\boldsymbol{p}}(2\kappa_{ss}+\kappa^3)(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu})\,ds
\end{aligned}
$$

が得られる. 次に E_{b2} の第一変分を計算する.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dE_{b2}}{d\epsilon}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi}) \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\epsilon}\frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}+\epsilon\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)}{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|^2}\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)+(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}+\epsilon\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|^2}\,d\theta \\
&\quad +2\int_0^{2\pi} \frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}+\epsilon\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)}{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|^4}(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
&\frac{dE_{b2}}{d\epsilon}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0} \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta+\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}\,d\theta + 2\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^4}\boldsymbol{p}_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{A\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}\right)_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi}\frac{A\boldsymbol{p}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta + 2\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^4}\boldsymbol{p}_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{A\boldsymbol{p}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}-\frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot\boldsymbol{p}_\theta)A\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^4}+\frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta)\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^4}\right)\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta \quad = 0
\end{aligned}
$$

となる. 最後の等号は (2.7) を用いている. 次に E_{b3} の第一変分を計算する.

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_{b3}}{d\epsilon}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0} &= \int_0^{2\pi}\frac{d}{d\epsilon}|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|\,d\theta|_{\epsilon=0} \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|}\,d\theta|_{\epsilon=0} \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{p}_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|}\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|}\right)_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\kappa|\boldsymbol{p}_\theta|(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu})\,d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\kappa(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu})\,ds
\end{aligned}
$$

最後に E_s の第一変分を計算する.

$$
\begin{aligned}
\frac{dE_s}{d\epsilon}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0} &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\epsilon}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|}-1\right)^2 |\boldsymbol{q}_\theta|\,d\theta|_{\epsilon=0} \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|}-1\right)\frac{(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta|}\,d\theta|_{\epsilon=0} \\
&= 2\int_0^{2\pi}(\rho-1)\frac{\boldsymbol{p}_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|}\,d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\left((1-\rho)\frac{\boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|}\right)_\theta\cdot\boldsymbol{\phi}\,d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}((1-\rho)\kappa|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\nu}-\rho_s|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\tau})\cdot\boldsymbol{\phi}\,d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\{(1-\rho)\kappa(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu})-\rho_s(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\tau})\}\,ds
\end{aligned}
$$

したがって弾性エネルギーの第一変分は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\epsilon}E_e(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\big|_{\epsilon=0} \qquad (2.8)\\
&=\frac{1}{24}kh^3\int_{\boldsymbol{p}}(2\kappa_{ss}+\kappa^3-\kappa_0^2\kappa)(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu})\,ds+kh\int_{\boldsymbol{p}}\left[(1-\rho)\kappa(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu})-\rho_s(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\tau})\right]ds
\end{aligned}
$$

次には内部ガスのエネルギーの第一変分を計算する. 十分に小さい ϵ に対して $\{p^2+\epsilon\phi^2>0\}=\{p^2>0\}$ であることに注意して,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon}\{E_g(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\,dt-E_g(\boldsymbol{p})\} \\
&=\frac{1}{\epsilon}\Bigg[-P_0\left\{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\chi_{p^2+\epsilon\phi^2>0}\,d\theta-V_0\right\} \\
&\quad -c_g\left\{1-\frac{1}{2V_0}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\chi_{p^2+\epsilon\phi^2>0}\,d\theta\right. \\
&\quad \left.+\mathrm{In}\left(\frac{1}{2V_0}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\chi_{p^2+\epsilon\phi^2>0}\,d\theta\right)\right\} \\
&\quad +P_0\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta\chi_{p^2>0}\,d\theta-V_0\right) \\
&\quad +c_g\left\{1-\frac{1}{2V_0}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta\chi_{p^2>0}\,d\theta+\mathrm{In}\left(\frac{1}{2V_0}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta\chi_{p^2>0}\,d\theta\right)\right\}\Bigg] \\
&=\left(-\frac{P_0}{2}+\frac{c_g}{2V_0}\right)\int_0^{2\pi}\frac{(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\cdot A(\boldsymbol{p}_\theta+\epsilon\boldsymbol{\phi}_\theta)\chi_{p^2+\epsilon\phi^2>0}-\boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta\chi_{p^2>0}}{\epsilon}\,d\theta \\
&\quad -\frac{c_g}{\epsilon}\mathrm{In}\left(1+\frac{\epsilon}{2V}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{\phi}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta+\boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta)\chi_{p^2+\epsilon\phi^2>0}+\frac{\epsilon^2}{2V}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{\phi}\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta\chi_{p^2>0}\right) \\
&\to\left(-\frac{P_0}{2}+\frac{c_g}{2V_0}-\frac{c_g}{2V}\right)\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{\phi}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta+\boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta)\,d\theta.
\end{aligned}
$$

上式の積分の第 2 項は次のように変形できる.

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{\phi}_\theta \, d\theta &= -\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\phi}_\theta \cdot A\boldsymbol{p}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\phi}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta \, d\theta.\end{aligned}$$

したがって, 内部ガスのエネルギーの第一変分は,

$$\frac{d}{d\epsilon}E_g(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0} = \left\{-P_0 + c_g\left(\frac{1}{V_0}-\frac{1}{V}\right)\right\}\int_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu}\, ds \tag{2.9}$$

となる. 次に重力ポテンシャルの第一変分計算すると,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\epsilon}\left\{E_p(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi}) - E_p(\boldsymbol{p})\right\} \\ &= gh\sigma \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{q}_\theta| \frac{(p^2+\epsilon\phi^2)\chi_{p^2+\epsilon\phi^2>0} - p^2\chi_{p^2>0}}{\epsilon}\, d\theta \\ &\to gh\sigma \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{q}_\theta|\phi^2\, d\theta \\ &= gh\sigma \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho}\phi^2\, ds\end{aligned}$$

となる. したがって重力ポテンシャルの第一変分は,

$$\frac{d}{d\epsilon}E_p(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0} = gh\sigma\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}\phi^2\, ds \tag{2.10}$$

となる. 最後に運動エネルギーの第一変分を計算する. 先ほどと同様に十分に小さい ϵ に対して $\{p^2+\epsilon\phi^2>0\} = \{p^2>0\}$ であることに注意する.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\epsilon}\left\{E_k(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\, dt - E_k(\boldsymbol{p})\right\} \\ &= \frac{h\sigma}{2}\int_0^{2\pi} |\boldsymbol{q}_\theta| \frac{|\boldsymbol{p}_t+\epsilon\boldsymbol{\phi}_t|^2\chi_{p^2+\epsilon\phi^2>0} - |\boldsymbol{p}_t|^2\chi_{p^2>0}}{\epsilon}\, d\theta \\ &\to h\sigma\int_0^{2\pi}|\boldsymbol{q}_\theta|\boldsymbol{p}_t\cdot\boldsymbol{\phi}_t\, d\theta \\ &= h\sigma\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}\boldsymbol{p}_t\cdot\boldsymbol{\phi}_t\, ds.\end{aligned}$$

したがって運動エネルギーの第一変分は,

$$\frac{d}{d\epsilon}E_k(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})|_{\epsilon=0} = h\sigma\int_0^{2\pi}\frac{1}{\rho}\boldsymbol{p}_t\cdot\boldsymbol{\phi}_t\, ds \tag{2.11}$$

となる. 以上の第一変分の結果より, 殻の自由に動ける部分の支配方程式

$$\begin{aligned}\sigma\boldsymbol{p}_{tt} &= \big\{-\tfrac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss}+\tfrac{1}{2}\kappa(\kappa^2-\kappa_0^2)) - k\rho(\rho-1)\kappa + \frac{\rho}{h}\big(P_0 + c_g(\tfrac{1}{V}-\tfrac{1}{V_0})\big)\big\}\boldsymbol{\nu} \\ &\quad + k\rho\rho_s\boldsymbol{\tau} + g\sigma\boldsymbol{e}_2, \qquad (t,\theta)\in(0,T)\times[0,2\pi]\cap\{p^2>0\}, &(2.12)\\ \kappa &= 0, \qquad \text{in} \quad (0,T)\times[0,2\pi]\cap\{p^2\le 0\}, &(2.13)\end{aligned}$$

を得る．ただし, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)^T$ は y 軸における距離の基底ベクトルとする．以上のエネルギーと障害物を考慮すると殻の変形を表す (一番易しい近似) 方程式は

$$\begin{aligned} \sigma\chi_{p^2>0}\boldsymbol{p}_{tt} &= \big\{-\frac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss}+\frac{1}{2}\kappa^3)\chi_{p^2>0}+\frac{1}{24}kh^2\kappa_0^2\rho\kappa - k\rho(\rho-1)\kappa\chi_{p^2>0}\big\}\boldsymbol{\nu} \\ &\quad +\frac{\rho}{h}\big(P_0+c_g(\frac{1}{V}-\frac{1}{V_0})\big)\chi_{p^2>0}\boldsymbol{\nu}+k\rho\rho_s\chi_{p^2>0}\boldsymbol{\tau}+g\sigma\chi_{p^2>0}\boldsymbol{e}_2, \qquad \text{in} \quad (0,T)\times[0,2\pi] \end{aligned} \tag{2.14}$$

となる．よって $\{p^2 \le 0\}$ 上で,

$$\frac{1}{24}kh^2\kappa_0^2\rho\kappa\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}$$

となっている．

2.7 体積保存問題

本章では shell の囲う体積 (今, 2 次元の問題なので面積) が一定であるという制約条件をつけた問題を考えることとする．これは殻が非圧縮正の流体を囲い込んでいる場合などが当てはまる．体積保存条件は

$$\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{p}(t,\theta)\cdot A\boldsymbol{p}_\theta(t,\theta))\chi_{p^2>0}(t,\theta)\,d\theta = 0 \qquad \forall t\in(0,T)$$

とかくことができる ([12])．体積 (面積) 保存条件を課した方程式を導出する場合はテスト関数に体積保存制約条件を与えてなければならない．ここでは一般のテスト関数 $\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\phi}\in\big[C_0^\infty\big((0,2\pi)\times(0,T)\cap\{p^2>0\}\big)\big]^2$ に対して, 摂動パラメータの第一次近似まで体積保存する摂動を $\boldsymbol{p}^\epsilon = \sqrt{1/(1+\epsilon\omega)}\ (\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})$ で与えることとする．ここで, ω は

$$\omega = \frac{1}{2V}\int_0^{2\pi}\big[(A\boldsymbol{p}_\theta)\cdot\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{p}\cdot(A\boldsymbol{\phi}_\theta)\big]\,d\theta = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}(A\boldsymbol{p}_\theta)\cdot\boldsymbol{\phi}\,d\theta = \frac{1}{V}\int_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds$$

となり, $\boldsymbol{\phi}$ による体積変化率と呼ぶべき量である．$\boldsymbol{p}^\epsilon$ は $\epsilon=0$ の近傍で ϵ の 1 次より大きな次数で体積保存を近似したことになっている．さらに今

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\Big\{\sqrt{\frac{1}{1+\epsilon\omega}}-1\Big\} = -\frac{1}{2}\omega,$$

に注意すると, この摂動は十分小さな ϵ に対して障害物 $\{p^2=0\}$ を超えない．ここで, 制約条件に沿った第一変分を計算をすると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}E_e(\boldsymbol{p}^\epsilon)\big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon}E_e(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\big|_{\epsilon=0}+\frac{kh^3}{48}\omega\int_{\boldsymbol{p}}(\kappa^2-\kappa_0^2)\,ds-\frac{kh}{2}\omega\int_{\boldsymbol{p}}(\rho-1)\,ds \\ \frac{d}{d\epsilon}E_p(\boldsymbol{p}^\epsilon)\big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon}E_p(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\big|_{\epsilon=0}-\frac{1}{2}gh\sigma\omega\int_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\rho}\,p^2\,ds \\ \frac{d}{d\epsilon}E_k(\boldsymbol{p}^\epsilon)\big|_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon}E_k(\boldsymbol{p}+\epsilon\boldsymbol{\phi})\big|_{\epsilon=0}-\frac{1}{2}h\sigma\int_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{\rho}\,(\omega\boldsymbol{p})_t\cdot\boldsymbol{p}_t\,ds \end{aligned}$$

を得る．

よって, 殻が自由に動く部分では強い方程式は

$$
\begin{aligned}
\sigma \boldsymbol{p}_{tt} &= \big\{ -\frac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss}+\frac{1}{2}\kappa(\kappa^2-\kappa_0^2)) - k\rho(\rho-1)\kappa + \rho\lambda \big\}\boldsymbol{\nu} \\
&\qquad + k\rho\rho_s\boldsymbol{\tau} + g\sigma\boldsymbol{e}_2, \qquad (t,\theta)\in(0,T)\times[0,2\pi]\cap\{p^2>0\}, \quad (2.15) \\
\kappa &= 0 \qquad \text{in} \quad (0,T)\times[0,2\pi]\cap\{p^2\le 0\} \quad (2.16)
\end{aligned}
$$

となる. ここで,

$$
\lambda = \frac{1}{2V}\int_{\boldsymbol{p}} \Big\{ \frac{\sigma}{\rho}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}_{tt}) - \frac{1}{24}kh^2(\kappa^2-\kappa_0^2) + k(\rho-1) + \frac{\sigma}{\rho}gp^2 \Big\}\, ds
$$

であり, これは体積保存条件から来る Lagrange multiplier と考えることができる. すると, 障害物を考慮した方程式は

$$
\begin{aligned}
\sigma\chi_{p^2>0}\boldsymbol{p}_{tt} &= \big\{ -\frac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss}+\frac{1}{2}\kappa^3)\chi_{p^2>0} + \frac{1}{24}kh^2\kappa_0^2\rho\kappa - k\rho(\rho-1)\kappa\chi_{p^2>0} + \rho\lambda\chi_{p^2>0} \big\}\boldsymbol{\nu} \\
&\qquad + k\rho\rho_s\chi_{p^2>0}\boldsymbol{\tau} + g\sigma\chi_{p^2>0}\boldsymbol{e}_2, \qquad \text{in} \quad (0,T)\times[0,2\pi]\cap\{p^2>0\} \\
&\qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

となる.

第3章　数値計算

3.1　数値計算法-双曲型離散勾配流法

問題 (2.15) と (2.17) は偏微分方程式の形で解くのは困難である．そこで, 数値解法として変分法に基づく手法を導入する．ここでは, 方程式 (2.17) のみを取り扱う．体積制約のない方程式 (2.15) も同様の方法で取り扱うことができる．さらに, 簡単のため平衡状態を半径 r_0 の円形とする．

有限時刻 $T > 0$ とし, $\Delta t = T/N$, $t = n\Delta t$ $(n = 0, 1, \cdots, N)$ とする． $\boldsymbol{p}^0$ を初期データとし, $\boldsymbol{p}^1$ を初期速度 $\boldsymbol{p}_t$ を用いて $\boldsymbol{p}^1(\theta) = \boldsymbol{p}^0(\theta) + \boldsymbol{p}_t(0,\theta)\Delta t$ と近似する．残りの $\boldsymbol{p}_n$, $n = 2, 3, \cdots, N$ は, 汎関数

$$J_n(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}h\sigma r_0 \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{p}\cdot(\frac{1}{2}\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2})}{(\Delta t)^2}\chi_{p^2>0}\, d\theta + E_e(\boldsymbol{p}) + E_p(\boldsymbol{p}) \tag{3.1}$$

を帰納的に最小化関数列をとして決定する．体積制約条件下で最小化する場合の許容関数集合は

$$\mathcal{K} = \Big\{\boldsymbol{p} \in \big[H^2_{\mathrm{per}}((0,2\pi))\big]^2;\ p^2 \geq 0,\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta\, d\theta = V\Big\}.$$

となる． すなわち, $\boldsymbol{p}^2$ は J_2 の minimizer として定め, 以下 $\boldsymbol{p}^n$ は $\mathcal{K}$ 上の汎関数 J_n の minimizer として帰納的に定めていく．今,

$$J_n(\boldsymbol{p}) \geq -\frac{1}{2}h\sigma r_0 \int_0^{2\pi} \frac{|-2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2}|^2}{2(\Delta t)^2}\, d\theta = \mathrm{const}, \tag{3.2}$$

なので, 下限は有限値であり, 最小化問題として well-defined である．今のところ 上記の汎関数の minimizer の存在と一意性定理は確立されていない．有力な仕事として, [16] は制約条件のないケースで $\kappa_0 = 0$ の場合は存在定理を示している．また最近の仕事として, [1] は (3.1) のよく似た汎関数を制約条件付きで取り扱っているが, 軸対称の場合に限られている．

J_n の minimizer $\boldsymbol{p}$ が以下の式を $\{p^2 > 0\}$ 上で満たすことを簡単に確かめることができる．

$$\begin{aligned}\sigma\frac{\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2}}{(\Delta t)^2} &= \Big\{-\tfrac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss} + \tfrac{1}{2}\kappa(\kappa^2 - \kappa_0^2)) - k\rho(\rho-1)\kappa + \rho\lambda\Big\}\boldsymbol{\nu} \\ &\qquad + k\rho\rho_s\boldsymbol{\tau} + g\sigma\boldsymbol{e}_2,\end{aligned}$$

ただし,

$$\lambda = \frac{1}{2V}\int_{\boldsymbol{p}} \Big\{\frac{\sigma}{\rho}(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2}}{(\Delta t)^2}) - \tfrac{1}{24}kh^2(\kappa^2 - \kappa_0^2) + k(\rho - 1) + \frac{\sigma}{\rho}gp^2\Big\}\, ds.$$

また,

$$\kappa = 0 \qquad \text{in} \quad (0,T)\times[0,2\pi]\cap\{p^2\le 0\}$$

とする．上式は方程式 (2.15) の時間と差分化したものである．以上の方法により, 与えられた汎関数の minimizer によって差分方程式の解が求められる．(しばしば, 離散勾配流法または, Rothe の方法と呼ばれる.) 最小化問題の解は, 2 分法などの導入による最急降下探索法で得ることができる．その探索アルブリズムは [5],[20] に示されている．

3.2　数値シミュレーション

本節では, 平均状態が半径 r_0 の円形リングを高さ H から初期速度 $(0,-v_0)$ で落とし, 水平な面に衝突し, 跳ね返る現象の数値シミュレーションを行った結果を紹介する．初期圧力を $P_0=0$ とする．$\boldsymbol{p}^0(\theta)=\boldsymbol{q}(\theta)=(r_0\cos\theta, r_0\sin\theta+H)$, $\boldsymbol{p}^1(\theta)=(r_0\cos\theta, r_0\sin\theta+H-v_0\Delta t)$, $\theta\in(0,2\pi)$ である．時間スケールを

$$\tau=\frac{r_0^2}{h}\sqrt{\frac{12\sigma}{k}}$$

とし, 空間スケールを平衡状態の半径 r_0 とすると方程式 (2.15) は

$$\begin{aligned}\chi_{p^2>0}\boldsymbol{p}_{tt} &= \Big\{-|\boldsymbol{p}_\theta|(\kappa_{ss}+\tfrac12\kappa^3)\chi_{p^2>0}+\tfrac12|\boldsymbol{p}_\theta|\kappa-a_1|\boldsymbol{p}_\theta|(|\boldsymbol{p}_\theta|-1)\kappa\chi_{p^2>0}\Big\}\boldsymbol{\nu}\\ &\quad +a_2|\boldsymbol{p}_\theta|\big(\tfrac1V-\tfrac1\pi\big)\chi_{p^2>0}\boldsymbol{\nu}+a_1|\boldsymbol{p}_\theta|\,|\boldsymbol{p}_\theta|_s\chi_{p^2>0}\boldsymbol{\tau}+a_3\chi_{p^2>0}\boldsymbol{e}_2, \qquad (3.3)\\ \nu &= 0 \qquad (0,T)\times[0,2\pi]\cap\{p^2\le 0\} \qquad (3.4)\end{aligned}$$

と表させる．ここで, a_1,a_2,a_3 はそれぞれ

$$a_1=12\frac{r_0^2}{h^2},\quad a_2=12\frac{r_0c_g}{kh^3},\quad a_3=12\frac{g\sigma r_0^3}{kh^2}$$

で与えられる．$a_1=15000$, $a_2=a_3=0$, $H=1$, $v_0=2$ として, 曲線上の $N=256$ のノードで実行した結果を示す．図 3.1 は重心が一時的に動かなくなり, 最も大きく歪む時刻 $t=1.0$ までの数値結果を示している．二つ目の図は跳ね返りの過程を示している．

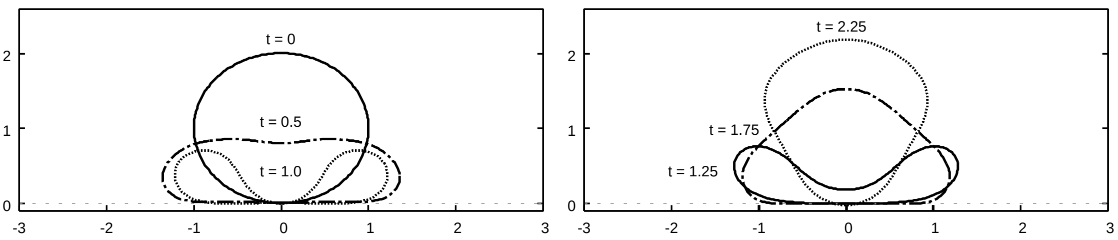

図 3.1: バウンスする現象 (歪みと反発) に対する数値結果

図 3.2 は, 薄い弾性リングのバウンス実験の時刻 0.0, 0.5, 1.0, 1.4, 1.8, 2.25 における写真である．これらの時刻は, 最も大きな変形をする時刻 $t=1.0$ として, 相対的に計算して

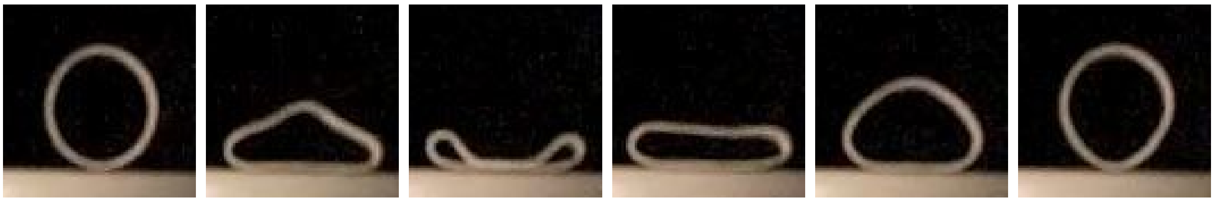

図 3.2: 簡単な実験結果から得られた弾性リングの形状

決めている．上の数値計算結果と非常によくに似ていることが見て取れる．ここでは, 係数は近似的に実験的設定に合うように選んでいる．

なお, 比較のために, 同じパラメータで体積保存制条件を考慮した方程式 (2.17) の数値シミュレーション結果を図 3.3 に示す．リバウンドに必要とされる時間は図 3.1 よりはっきりと短くなっていることがわかる．実験データによる比較は 3 次元モデルの実践を必要とするので, 今後の研究課題とする．

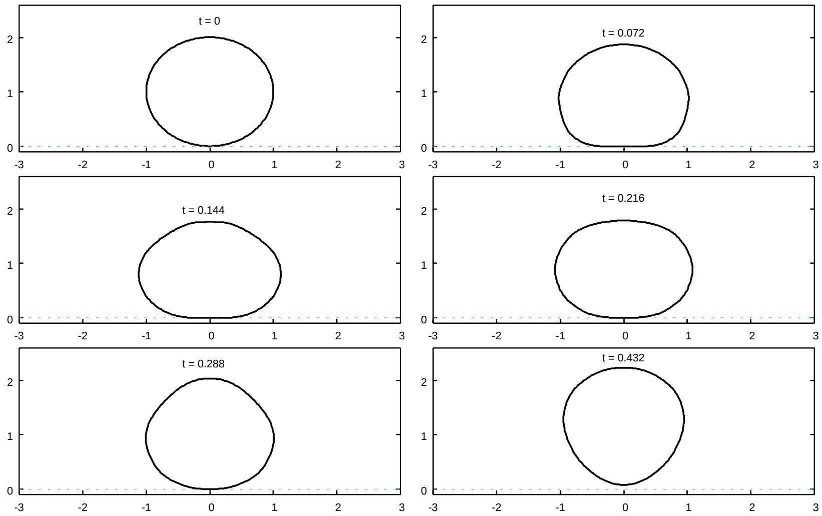

図 3.3: 体積制約のある弾むリングに対する数値結果

バウンスする shell の囲まれた体積の影響を解析するために, $a_2 = 0$, $a_2 = 384$, $a_2 = 98304$ を選び数値実験をした. ここで, $v_0 = 16$ としている.

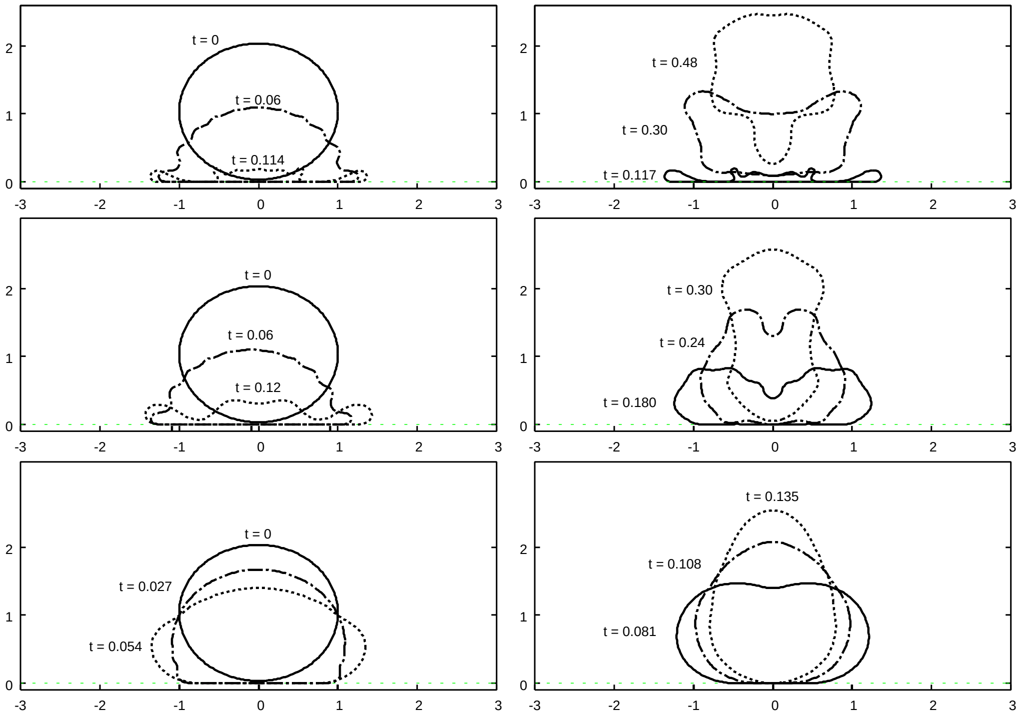

図 3.4: パラメータ a_2 ($a_2 = 0, 384, 98304$) に対する弾性リングの歪みと跳ね返り (反発)

次に, $\boldsymbol{p}^0 = \boldsymbol{q}(\theta) = (r_0 \cos\theta, r_0 \sin\theta + H)$, $\boldsymbol{p}^1(\theta) = (r_0 \cos\theta, r_0 \sin + H - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2)$ とし, ここでは $r_0 = 0.1$, $H = 3.5r_0$ を選ぶ.

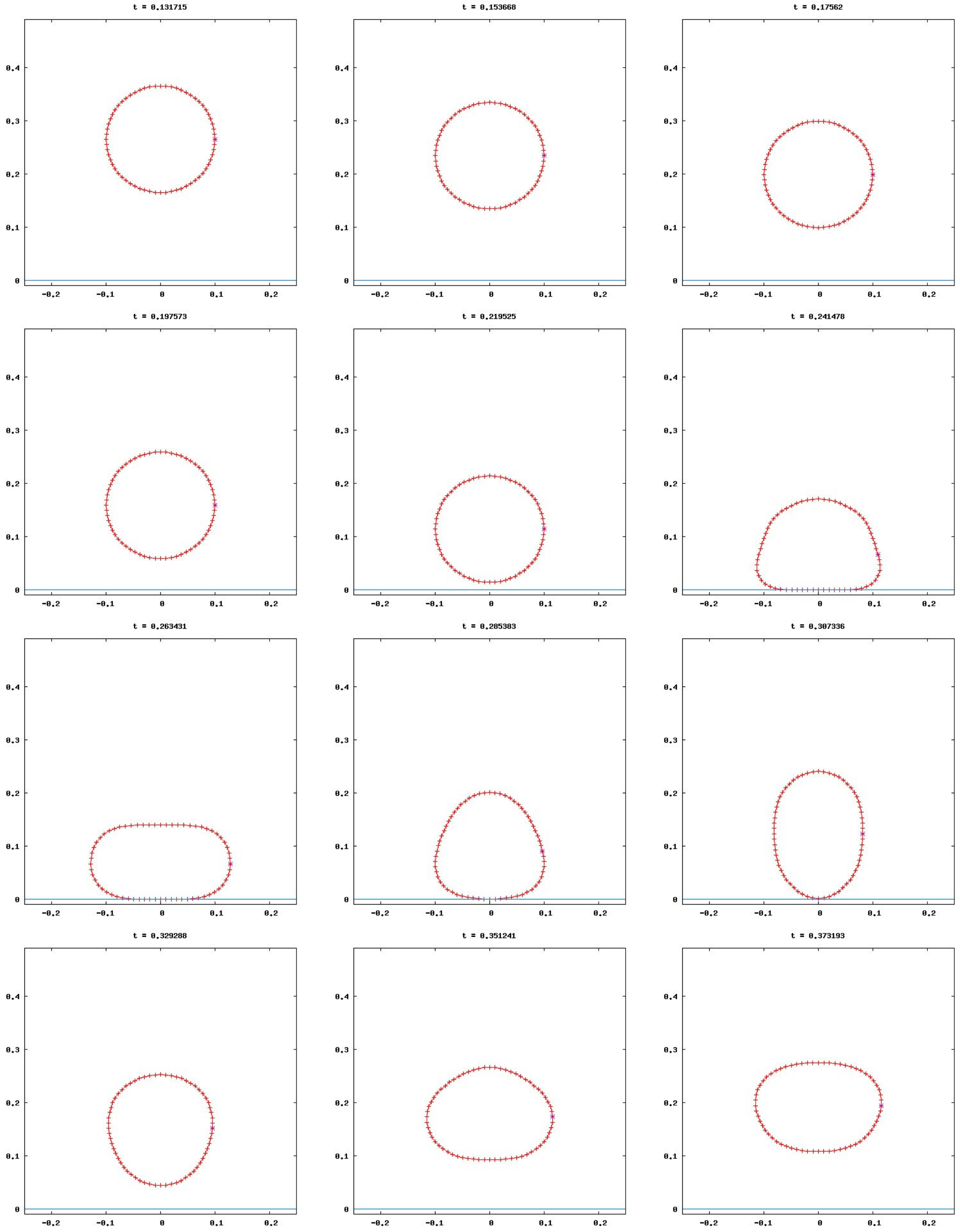

図 3.5: $(k_s, k_b) = (500, 0.01)$

図 3.5 の厚さと弾性係数を有効数字 2 桁で計算すると, $h = 1.5 \times 10^{-2}$, $k = 3.2 \times 10^4$ となる. 先にも述べたように, 現実に二次元で体積を保存する物体を考えるのは難しいので, この解が妥当であるのか検討することは困難である. モデルの妥当性の検討は三次元モデルの開発を待つとして, 以下ではパラメータ k_s, k_b を変化させたときどのような傾向があるかをみてみよう.

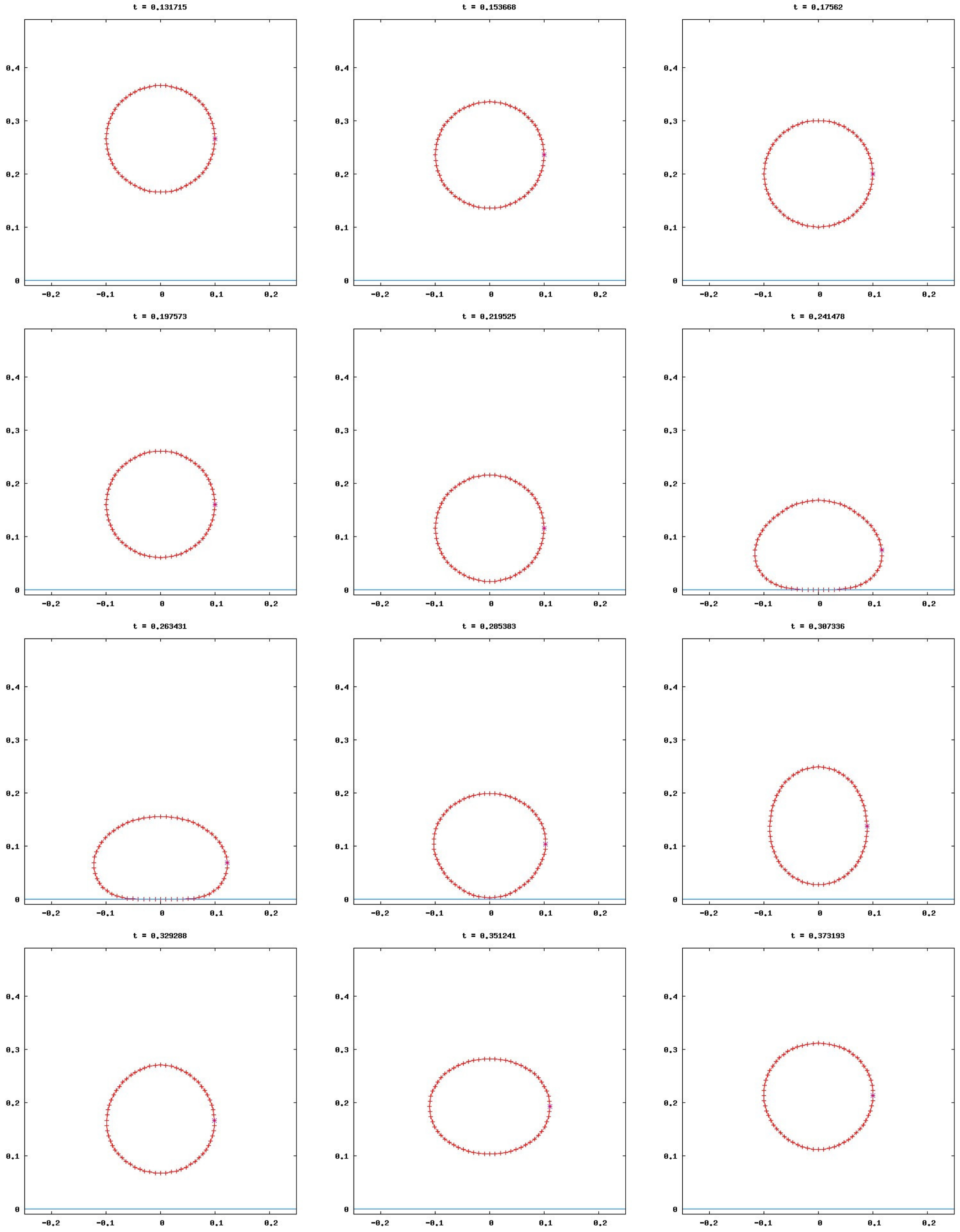

図 3.6: $(k_s, k_b) = (500, 0.1)$

このときの暑さと弾性係数は $h = 0.5 \times 10^{-2}$, $k = 1.0 \times 10^4$ である.

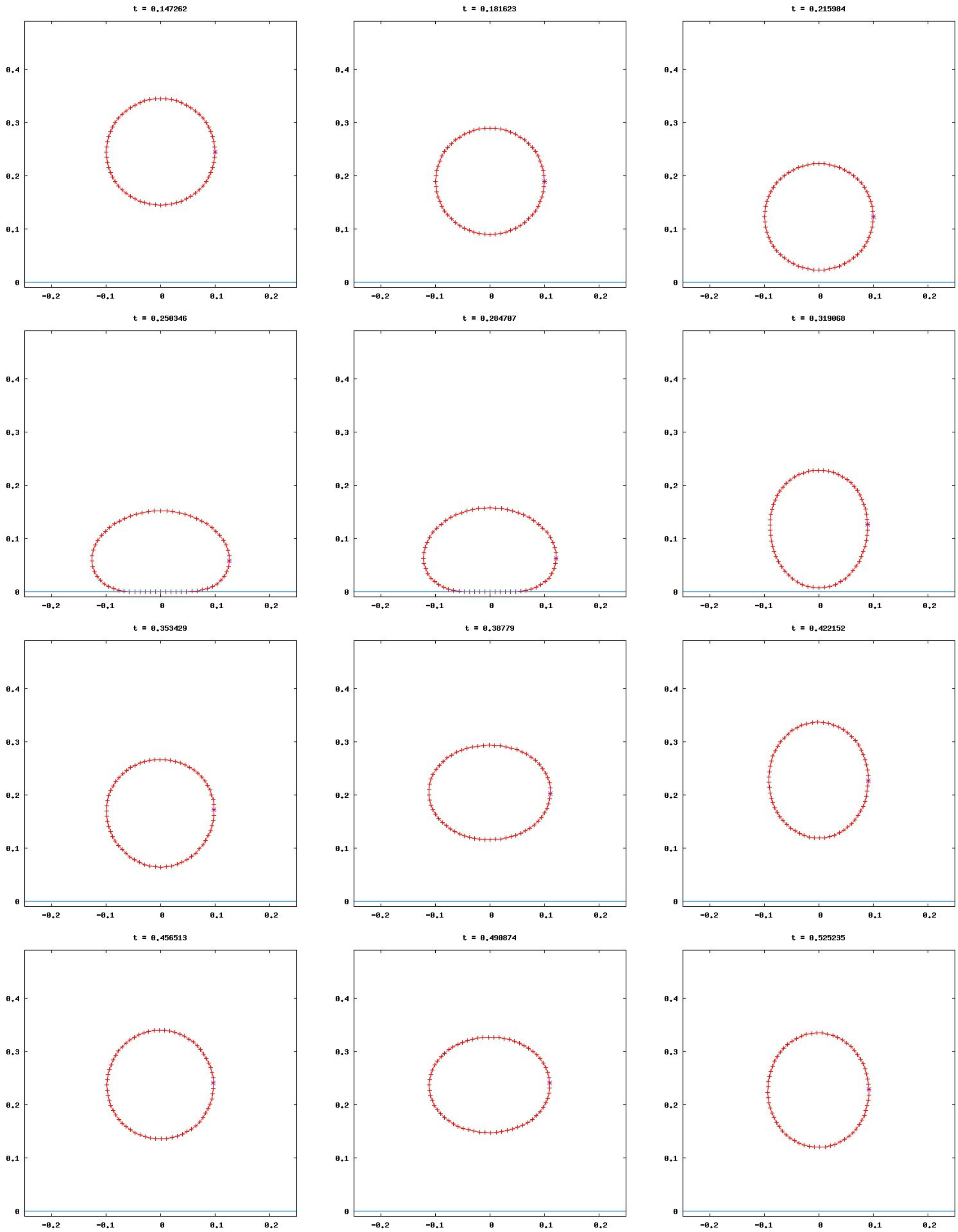

図 3.7: $(k_s, k_b) = (100, 0.05)$

次に k_s を 500 から 100 に換えて実験を行った．このとき, $h = 0.7 \times 10^{-2}$, $k = 1.3 \times 10^3$ である．$k_s = 500$ のときと時間スケールを変更していることに注意してほしい.

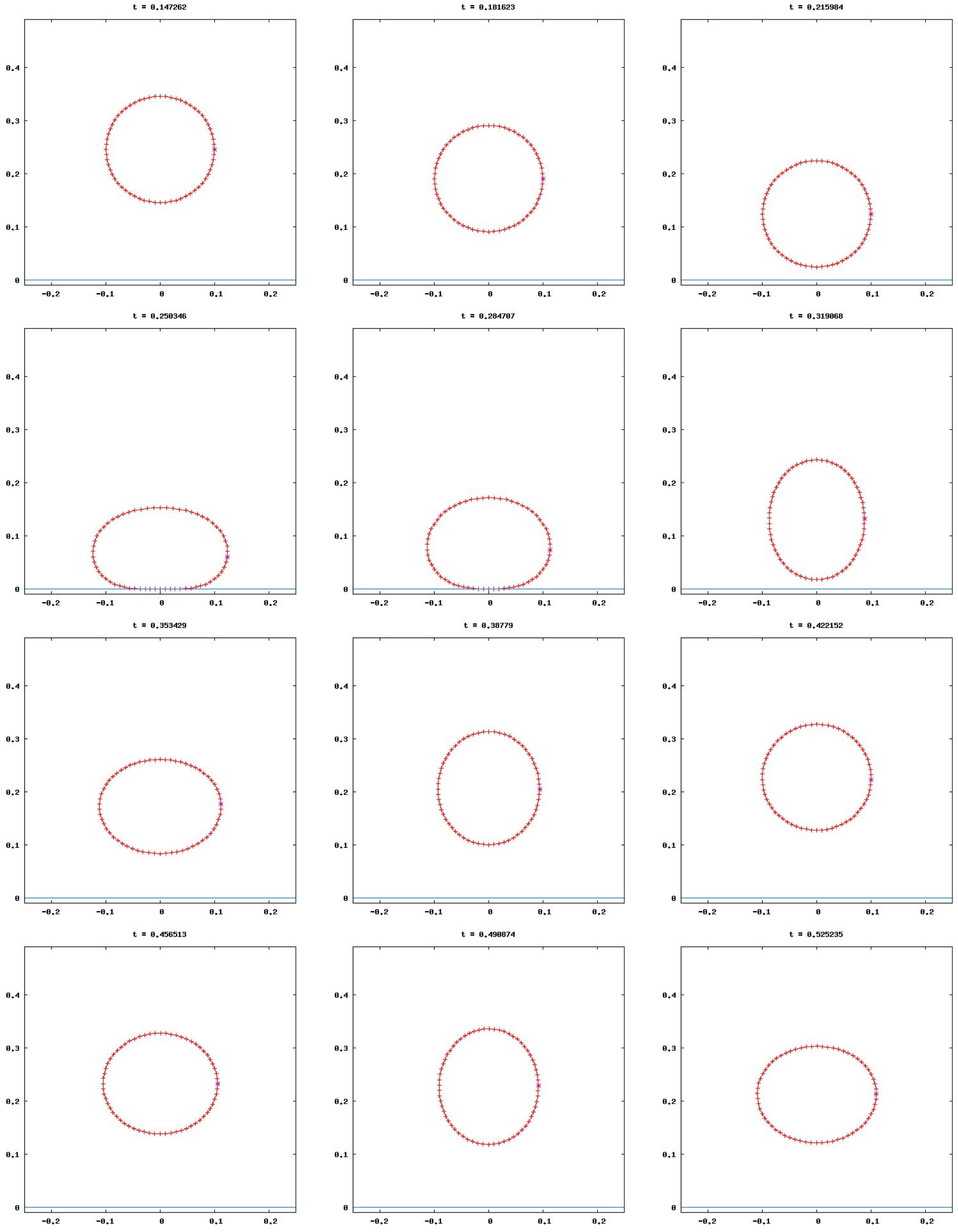

図 3.8: $(k_s, k_b) = (100, 0.08)$

このとき, $h = 0.9 \times 10^{-2}$, $k = 1.0 \times 10^3$ である.

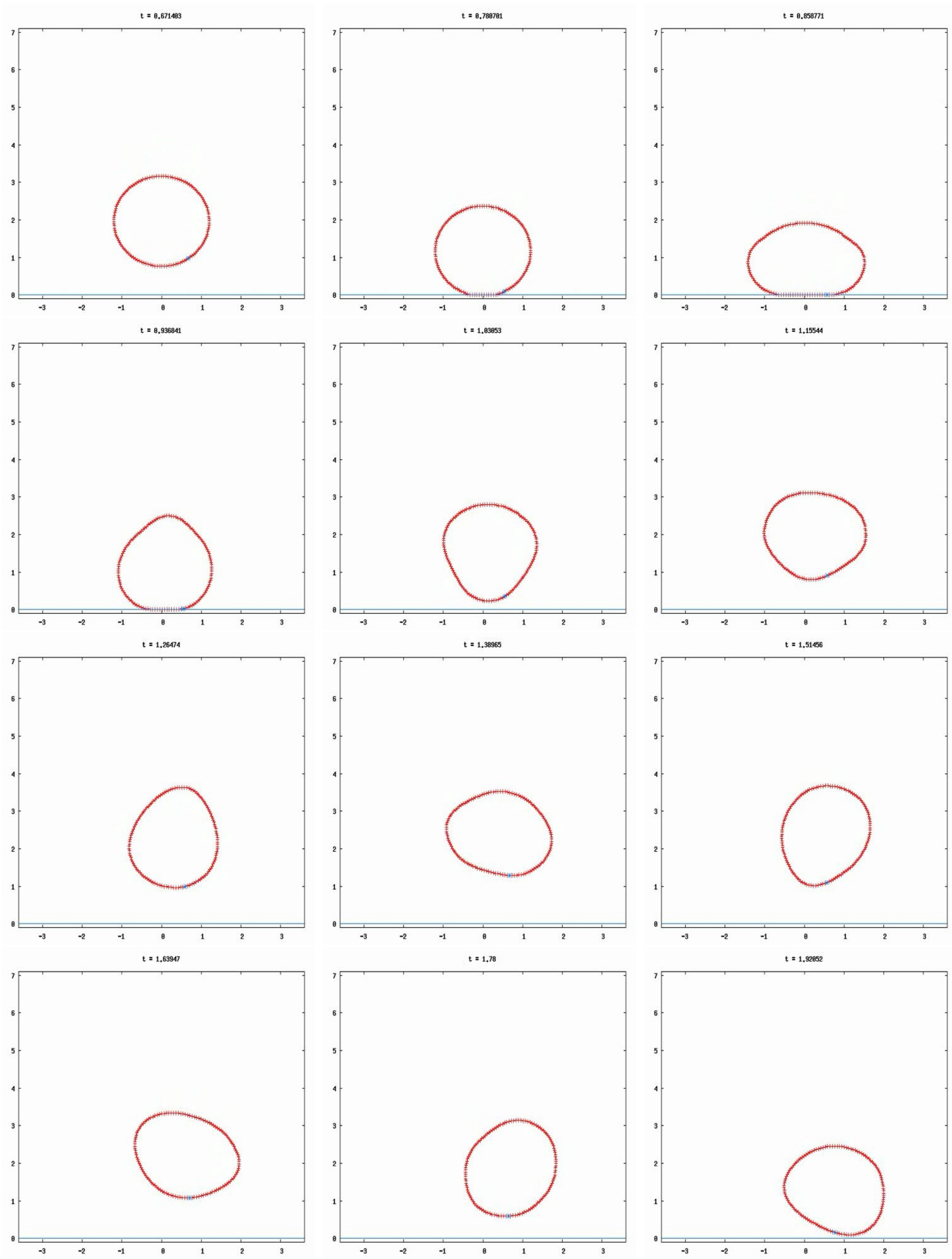

図 3.9: 回転を伴う shell の衝突

このモデルでは, shell に回転を加えてることもできる. 図 3.9 がその数値結果である.

3.3 数値シミュレーション2

この節では, $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{p}_{ss}$ を用いて弾性エネルギーを新しく次のように2つ定義し, 体積保存問題のシミュレーションを行った数値結果について述べる.

$$
\begin{aligned}
E_{e1}(\boldsymbol{p}) &= \frac{k_b}{2}\int_0^{2\pi} |\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}_0|^2 |\boldsymbol{p}_\theta|\, d\theta + \frac{k_s}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|}-1\right)^2 |\boldsymbol{q}_\theta|\, d\theta \qquad (3.5)\\
E_{e2}(\boldsymbol{p}) &= \frac{k_b}{2}\int_0^{2\pi} |\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\kappa}_0|^2 |\boldsymbol{p}_\theta|\, d\theta + \frac{k_s}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|}-1\right)^2 |\boldsymbol{p}_\theta|\, d\theta \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

ただし, $k_b := kh$, $k_s := kh^3/12$ とする. すなわち, 次の汎関数

$$
\begin{aligned}
J_n^1(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2}h\sigma r_0 \int_0^{2\pi} \frac{|\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{p}^{n-1}+\boldsymbol{p}^{n-2}|^2}{(\Delta t)^2}\chi_{p^2>0}\, d\theta + E_{e1}(\boldsymbol{p}) + E_p(\boldsymbol{p}),\\
J_n^2(\boldsymbol{p}) &= \frac{1}{2}h\sigma r_0 \int_0^{2\pi} \frac{|\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{p}^{n-1}+\boldsymbol{p}^{n-2}|^2}{(\Delta t)^2}\chi_{p^2>0}\, d\theta + E_{e2}(\boldsymbol{p}) + E_p(\boldsymbol{p}),
\end{aligned}
$$

を集合

$$
\mathcal{K} = \left\{\boldsymbol{p} \in \left[H^2_{\mathrm{per}}((0,2\pi))\right]^2;\ \ p^2 \geq 0,\ \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta\, d\theta = V\right\}.
$$

上で帰納的に最小化することによって得られた minimizer 列を数値解とする. 以下では前節と同様の設定のもと k_b と k_s を変化させ, 汎関数 J_n^1 で得られた数値解と J_n^2 で得られた数値解を比較する.

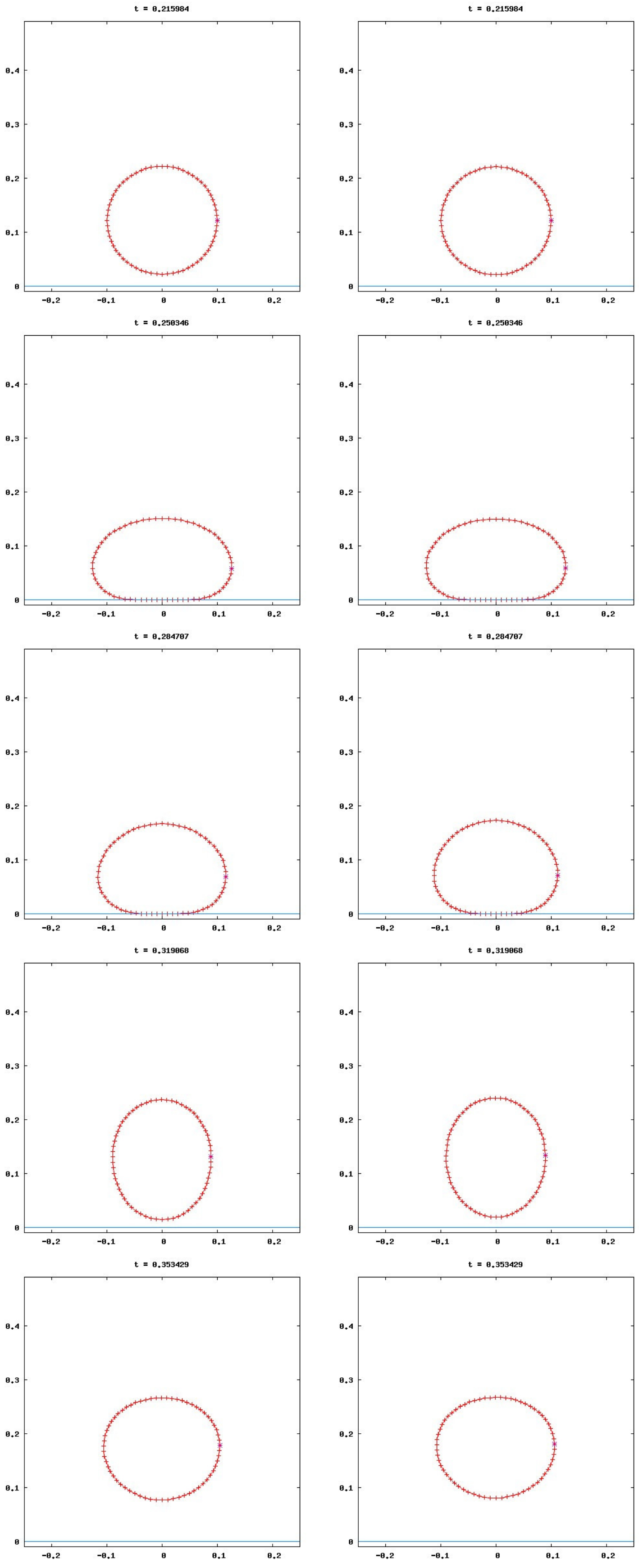

図 3.10: $(k_s, k_b) = (100, 0.05)$ 左が J_n^1, 右が J_n^2 を用いた結果 1

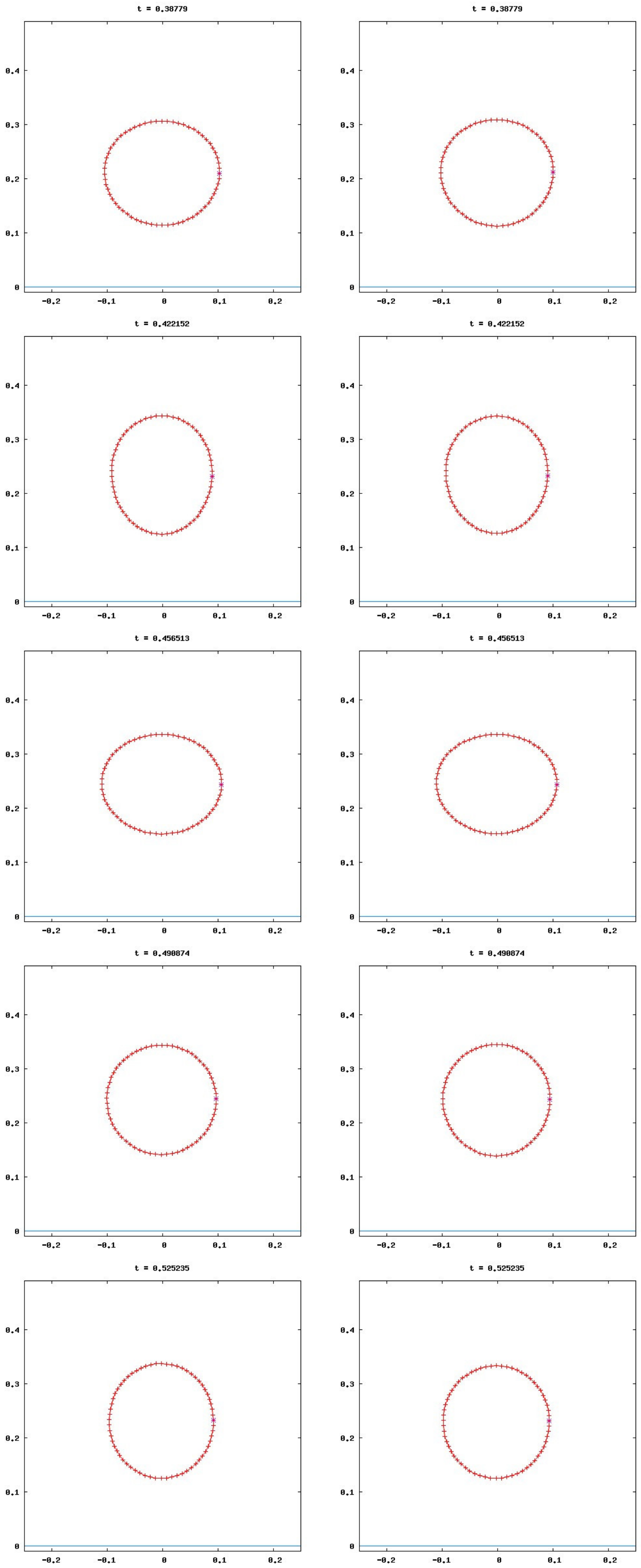

図 3.11: $(k_s, k_b) = (100, 0.05)$ 左が J_n^1, 右が J_n^2 を用いた結果 2

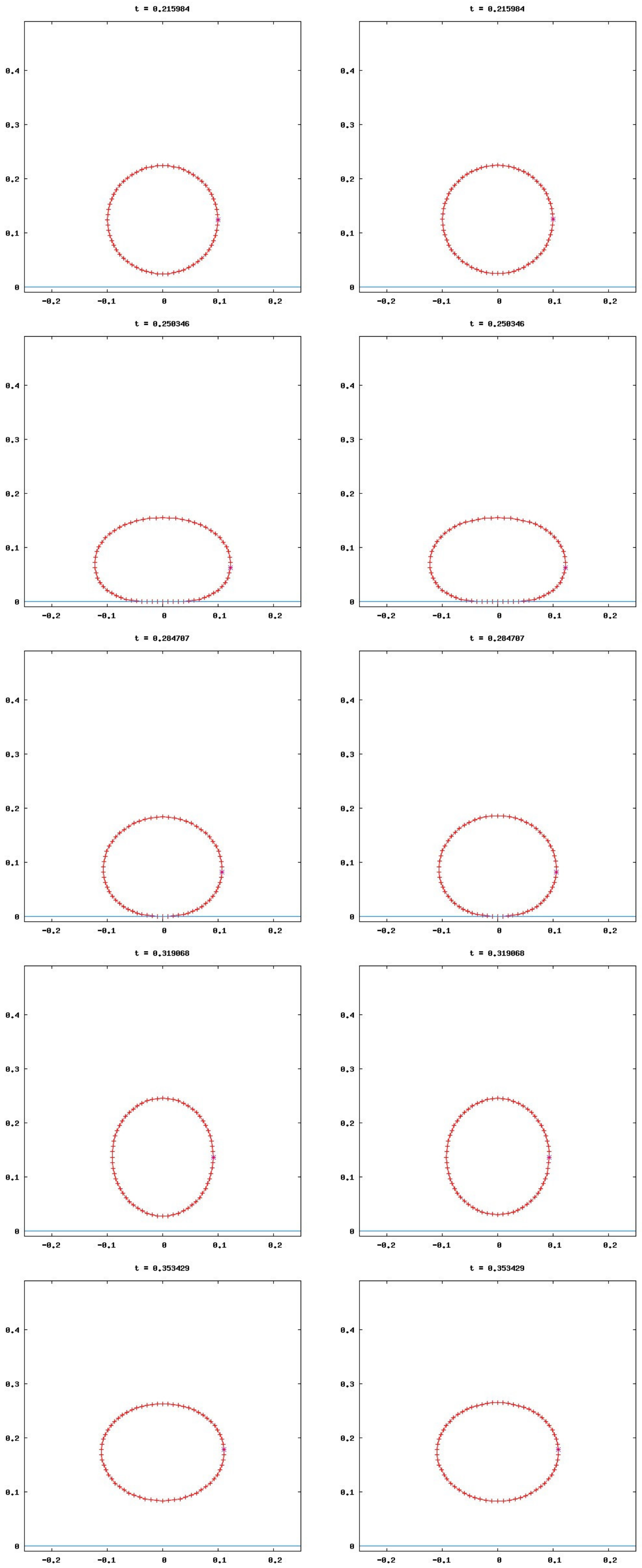

図 3.12: $(k_s, k_b) = (100, 0.08)$ 左が J_n^1, 右が J_n^2 を用いた結果 1

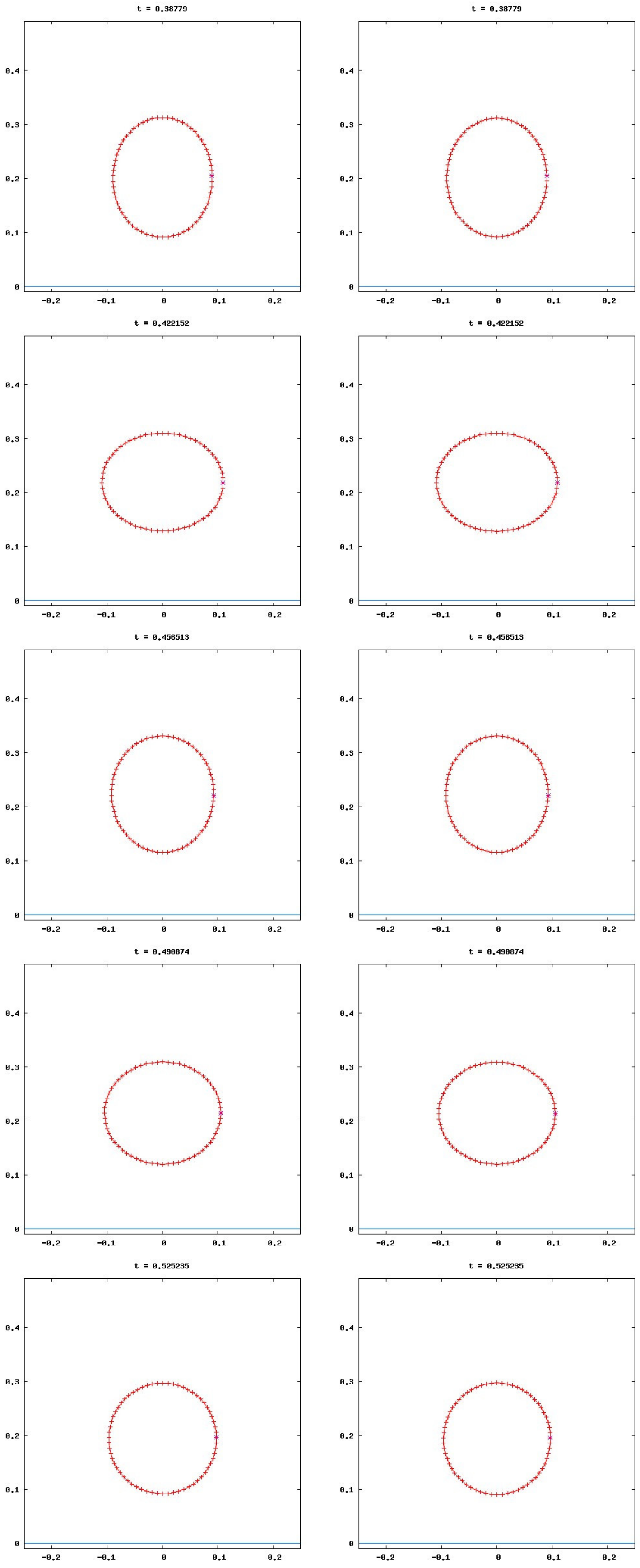

図 3.13: $(k_s, k_b) = (100, 0.08)$ 左が J_n^1, 右が J_n^2 を用いた結果 2

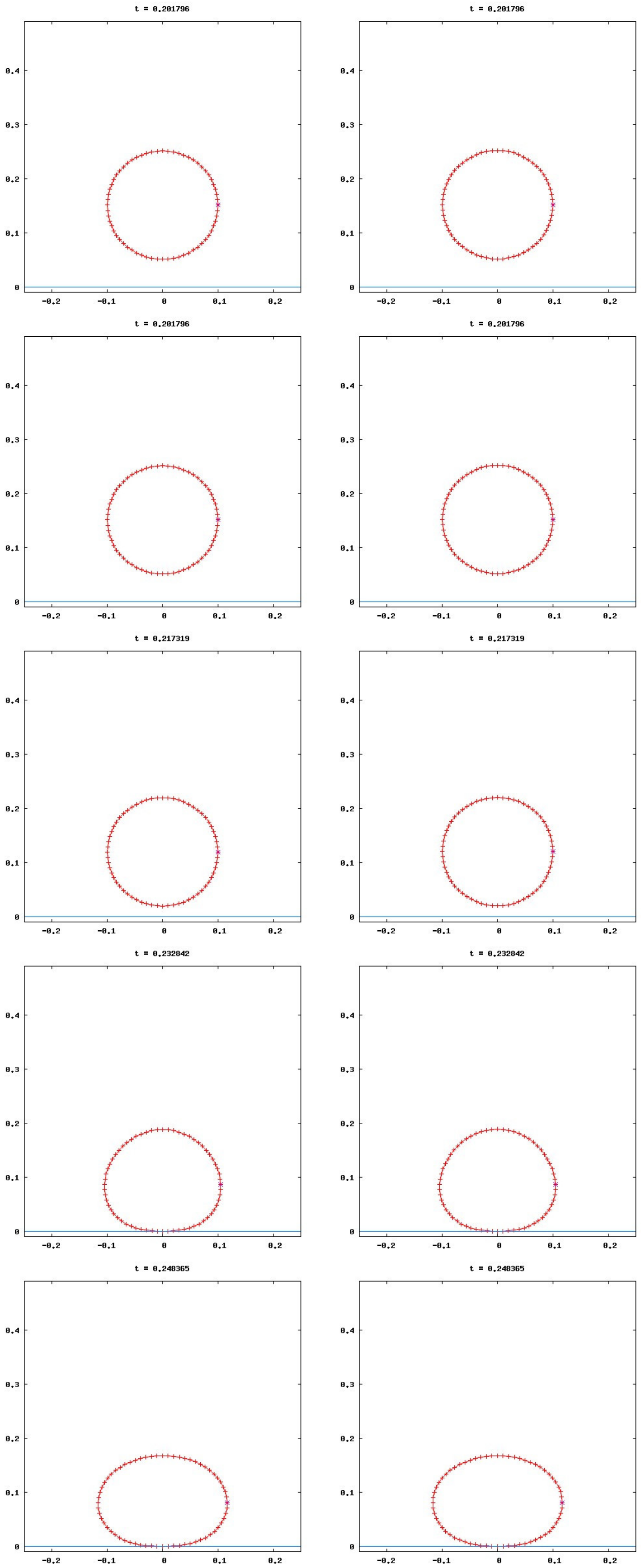

図 3.14: $(k_s, k_b) = (1000, 0.2)$ 左が J_n^1, 右が J_n^2 を用いた結果 1

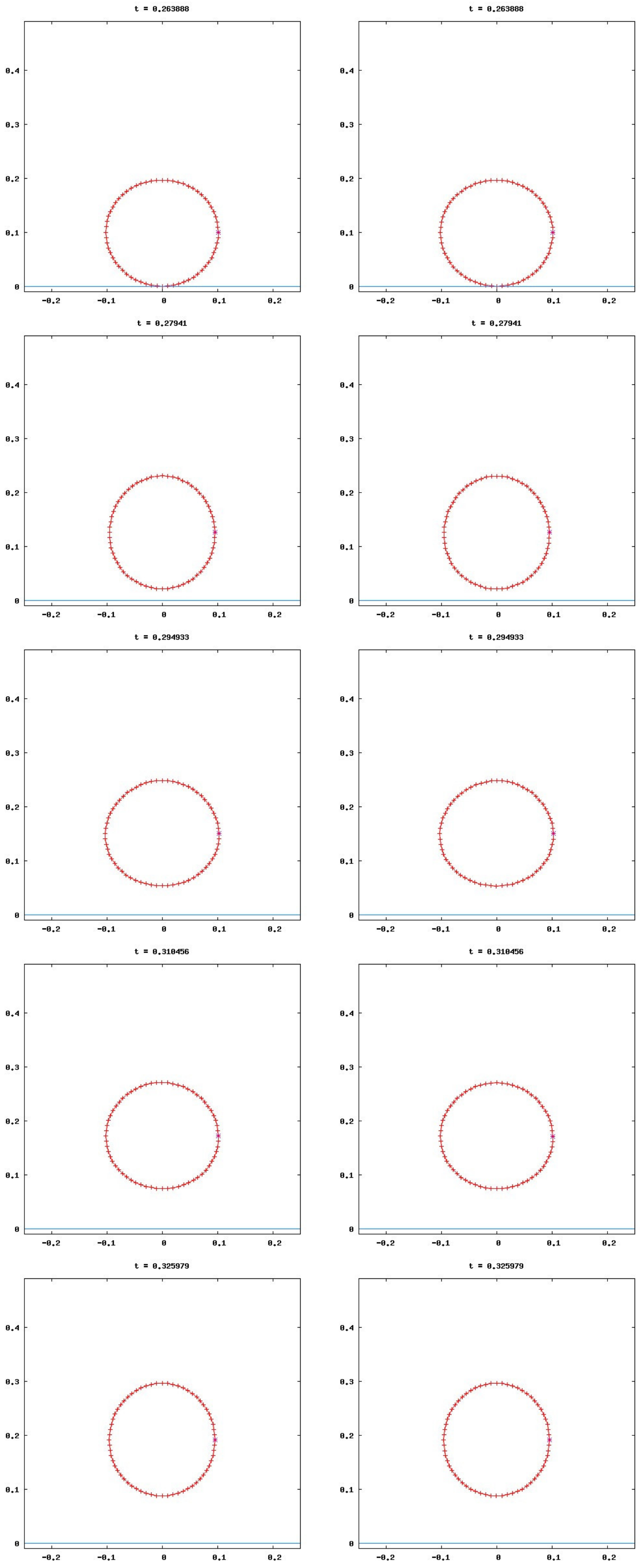

図 3.15: $(k_s, k_b) = (1000, 0.2)$ 左が J_n^1, 右が J_n^2 を用いた結果 2

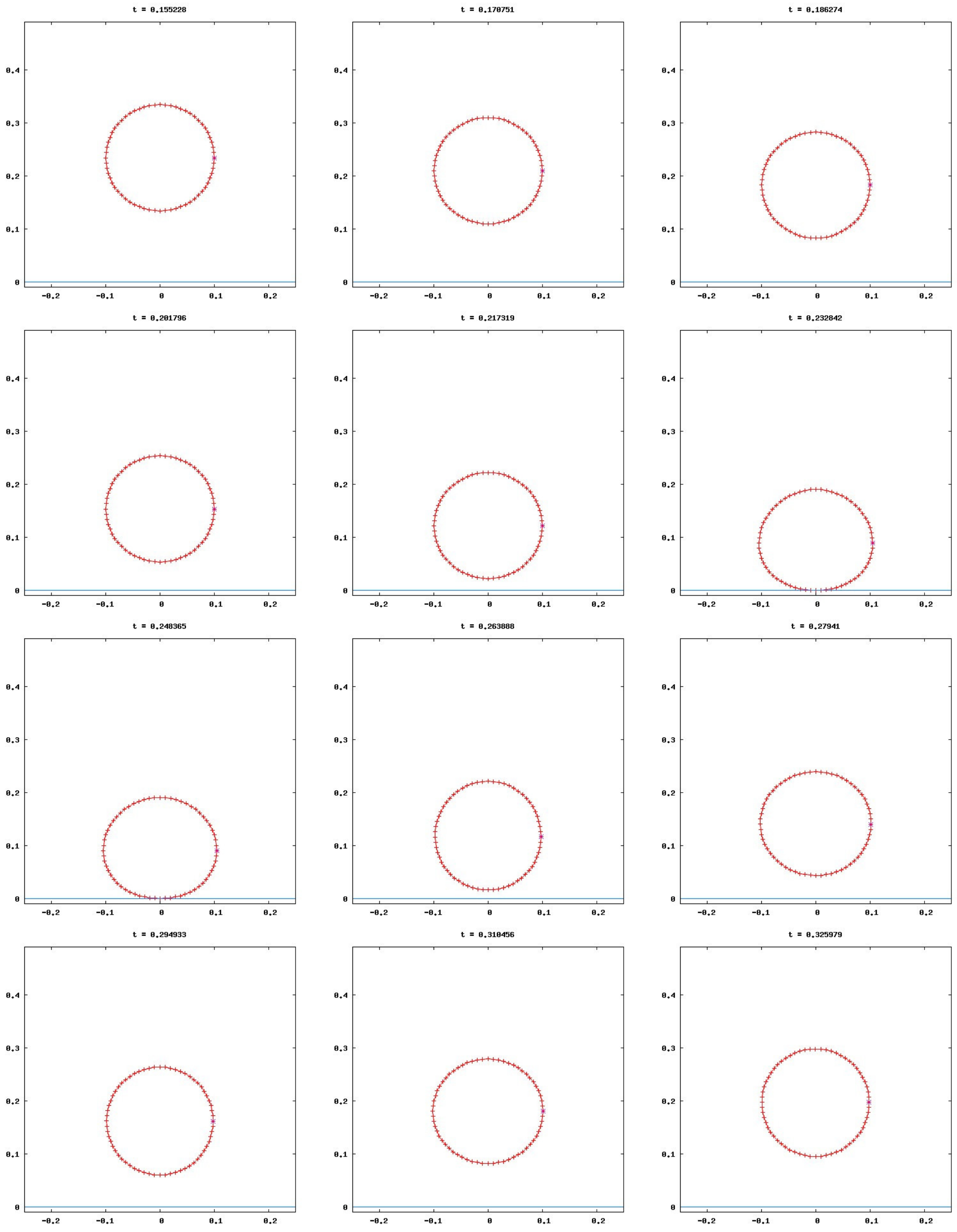

図 3.16: J_n^1 の場合:$(k_s, k_b) = (1000, 0.5)$

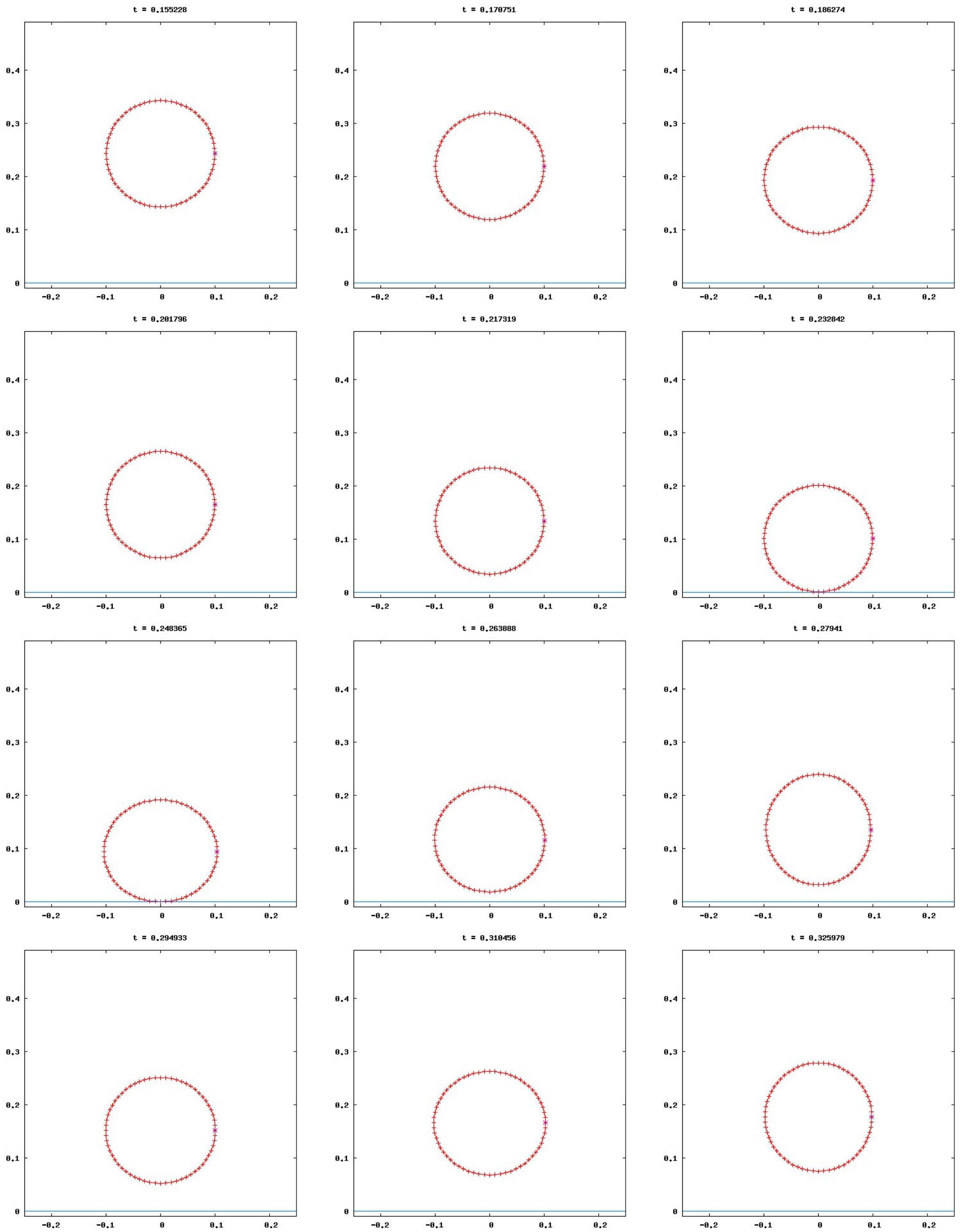

図 3.17: J_n^1 の場合:$(k_s, k_b) = (1000, 1)$

第4章　まとめ

本研究では, 弾性体のリング (shell) が落下し, 障害物に衝突し, 跳ね返るという一連の物理現象の運動について考えている. まず, 物理的考察により, これまでに提案されていた平衡形の積分を使用する総合弾性エネルギーの式を "曲げ" 部分のエネルギーの計算を変動形の積分を使用して近似的に修正できることを示した. その式を導入してエネルギー保存系の Lagrangian から作用積分 (action integral) を定義し, その第一変分を計算することによって, 連続時間系の運動方程式 (支配方程式) を導いた. 次に, 作用積分 (action integral) の第一変分を計算する際, この弾性体リング (shell) の性質から体積保存条件を課した第一変分を計算して連続時間系の運動方程式 (支配方程式) を導いた. この方程式には Lagrange multiplier と呼ばれる式が出現することに特徴がある. 導出された運動方程式の近似解を数値計算で求める方法として, ある差分化された汎関数を定義することによって, その最小化関数が運動方程式の近似解になるということを利用した双曲型離散勾配流法 (または, Rothe の方法と呼ばれている) を適用した. すなわち, その差分化された汎関数を最小にする解を探索することによって得た. まず, 最初の数値シミュレーションでは, 平面に弾性体リングを打ちつける例題に対して, 内部のガスの圧縮によるエネルギーを考慮した場合と体積保存条件が課されている場合を扱った. 数値計算の結果より, 内部ガスの圧縮のエネルギーに影響する係数を非常に大きくしていくと体積保存条件付の数値計算結果に近づいていくような傾向が得られた. 体積保存条件付の数値計算結果はリングの変形が少なく, 跳ね返りが生じている. そこで, 次に, 体積保存条件を課した場合に対して, 弾性体リングの自由落下の数値シミュレーションを行なった. パラメーターの選択によって, 弾性体リングの変形をともなった種々の落下・衝突・跳ね返り現象の模擬ができることが数値計算結果より知れた. したがって, ボールのバウンス問題 (落下・衝突・反発を含む) に十分に応用できるものと確信できた. この問題の応用, 拡張性 (三次元空間への拡張, プログラミングの効率化など) を考慮した場合, 行列計算による展開が有用であるとの観点から, 体積保存条件を課した解析を行い, 数値シミュレーションを行った結果を示し, 弾性体リングのバウンシングが模擬できることを示した. なお, 数値計算結果は, 2 章の方法での結果と数値的に比較し遜色ないことも示している.

第 5 章　付録

A 離散勾配流法 (双曲型)

波動方程式を例に挙げて詳細を説明する．なめらかな境界 $\partial\Omega$ をもつ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ で考える．境界上, 同時 Dirichlet 境界条件が与えられているとする．初期条件を正値関数 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, 初期速度 $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ とする．すると, 以下の問題を解くことになる:

$$
\begin{aligned}
u_{tt}(t,x) &= \Delta u(t,x) \quad \text{in } (0,T)\times\Omega =: \Omega_T, && (5.1)\\
u(t,x) &= 0 \quad \text{on } (0,T)\times\partial\Omega, && (5.2)\\
u(0,x) &= u_0(x) \quad \text{in } \Omega, && (5.3)\\
u_t(0,x) &= v_0(x) \quad \text{in } \Omega. && (5.4)
\end{aligned}
$$

まず, 自然数 $N>0$ を止め, 時間幅を $h=T/N$ と決める．$u_{-1}(x)=u_0(x)-hv_0(x)$ とおく．関数 u_0 は時刻 $t=0$ での近似解に対応し, 関数 u_{-1} は時刻 $t=-h$ での近似解に対応する．時刻 $t=nh$ $(n=1,2,\cdots,N)$ での近似解 u_n を次の汎関数の $H_0^1(\Omega)$ での minimizer と定義する．

$$
J_n(u)=\int_\Omega \frac{|u-2u_{n-1}+u_{n-2}|^2}{2h^2}\,dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx. \qquad (5.5)
$$

この汎関数の第 2 項は $H^1(\Omega)$ での弱収束に対して下半連続であり, 第 1 項は $L^2(\Omega)$ で連続である．したがって, 汎関数が下に有界であることから minimizer の存在がいえる．

次に, $\{u_n\}_{n=-1}^N$ の minimizer の時間補間として, 近似解 $\bar{u}^h$ と u^h を定義する (図 5.1 参照):

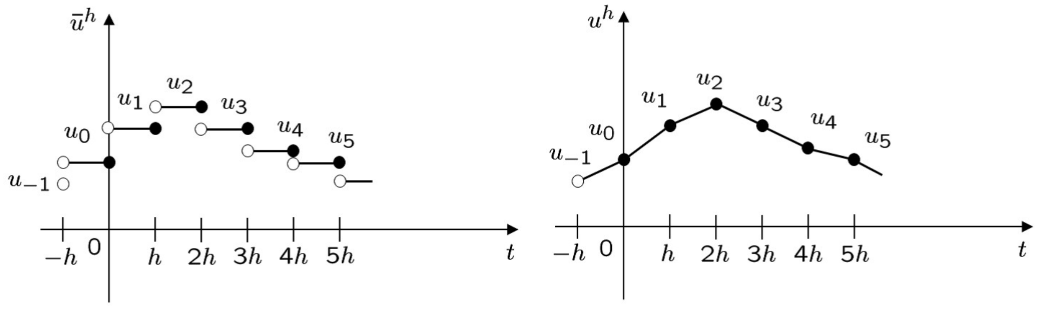

図 5.1: Minimizers の補間

$$
\begin{aligned}
\bar{u}^h(t,x) &= u_n(x), t\in((n-1)h,nh],\ n=0,\dots,N, && (5.6)\\
u^h(t,x) &= \frac{t-(n-1)h}{h}u_n(x)+\frac{nh-t}{h}u_{n-1}(x),\quad t\in((n-1)h,nh], n=0,\dots,N.
\end{aligned}
$$

u_n は J_n の minimizer なので, u_n での J_n の第一変分が 0 になる. したがって, 任意の $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\varepsilon} J_n(u_n+\varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J_n(u_n+\varepsilon\varphi)-J_n(u_n)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \frac{|u_n+\varepsilon\varphi-2u_{n-1}+u_{n-2}|^2-|u_n-2u_{n-1}+u_{n-2}|^2}{2h^2}\,dx \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Omega \left(|\nabla u_n+\varepsilon\nabla\varphi|^2-|\nabla u_n|^2\right) dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \frac{(2u_n+\varepsilon\varphi-4u_{n-1}+2u_{n-2})\varphi}{2h^2}\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2} \int_\Omega \left(2\nabla u_n\cdot\nabla\varphi+\varepsilon|\nabla\varphi|^2\right) dx \\
&= \int_\Omega \frac{u_n-2u_{n-1}+u_{n-2}}{h^2}\varphi\,dx + \int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla\varphi\,dx. \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

$\bar{u}^h$ と u^h の定義 (5.6) を使うと, 次のように書き換えることができる.

$$
\int_\Omega \Big[\frac{u^h_t(t)-u^h_t(t-h)}{h}\varphi + \nabla\bar{u}^h(t)\cdot\nabla\varphi\Big]\,dx = 0 \qquad \text{for a.e. } t\in(0,T) \quad \forall\varphi\in H^1_0(\Omega).
$$

任意の $\tilde{\varphi}\in C^0([0,T])$ を掛けたとき, 上式の関係が成立することに注意する. したがって, $(0,T)$ で積分すると ($\varphi\tilde{\varphi}$ を改めて $\varphi(x,t)$ とおく),

$$
\int_0^T \int_\Omega \Big[\frac{u^h_t(t)-u^h_t(t-h)}{h}\varphi + \nabla\bar{u}^h\cdot\nabla\varphi\Big]\,dx\,dt = 0 \qquad \forall\varphi\in L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \qquad (5.8)
$$

が得られる. 時間幅 h を 0 にとばすためには, 近似解に対するいくつかの評価が必要である. 以下の補題でそれについて述べる.

補題 1 Ω をなめらかな境界をもつ有界領域とする. J_n, $n=1,2,\ldots,N$ は (5.5) で定義した汎関数で, u_n はその汎関数の $H^1_0(\Omega)$ における *minimizer* だとする. 関数 $\bar{u}^h$ と u^h を (5.6) で定義する. さらに, $h\le 1$ と仮定する. このとき, 以下の評価が成り立つ:

$$
\|u^h_t(t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\bar{u}^h(t)\|_{L^2(\Omega)} \le C_E \qquad \text{for a.e. } t\in(0,T). \qquad (5.9)
$$

ただし, 定数 C_E は初期関数の H^1 ノルムには依るが, h には依存らない.

Proof. この種の評価は普通, 方程式の解の時間微分でテストすることによって示される. 離散の場合は, これが (5.7) で $\varphi := u_n-u_{n-1}\in H^1_0(\Omega)$ とおくことに相当する.

$$
\int_\Omega \frac{u_n-2u_{n-1}+u_{n-2}}{h^2}(u_n-u_{n-1})\,dx + \int_\Omega (\nabla u_n-\nabla u_{n-1})\nabla u_n\,dx = 0
$$

が分かる. ここで, 次の不等式

$$
\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2} \le (a-b)a \qquad \forall a,b\in\mathbb{R} \qquad (5.10)
$$

を応用して, $n=1,2,\ldots,N$ に対し次が成り立つことが確認される.

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \Big[\Big(\frac{u_n-u_{n-1}}{h}\Big)^2 - \Big(\frac{u_{n-1}-u_{n-2}}{h}\Big)^2 + |\nabla u_n|^2 - |\nabla u_{n-1}|^2\Big]\,dx \le 0 \\
&\int_\Omega \Big[\Big(\frac{u_n-u_{n-1}}{h}\Big)^2 + |\nabla u_n|^2\Big]\,dx \le \int_\Omega \Big[\Big(\frac{u_{n-1}-u_{n-2}}{h}\Big)^2 + |\nabla u_{n-1}|^2\Big]\,dx.
\end{aligned}
$$

この不等式の $n=1$ から任意の自然数 $k\le N$ までの和をとると,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left[\left(\frac{u_k-u_{k-1}}{h}\right)^2+|\nabla u_k|^2\right]dx &\le \int_\Omega \left[\left(\frac{u_0-u_{-1}}{h}\right)^2+|\nabla u_0|^2\right]dx \\
&= \int_\Omega \left[(v_0)^2+|\nabla u_0|^2\right]dx \\
&\le \|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}+\|v_0\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

となる.

$$u_t^h(t)=\frac{u_k-u_{k-1}}{h} \qquad \text{for } t\in((k-1)h,kh),\ \ k=0,1,\dots,N.$$

であるから, (5.9) が示された. □

補題 2 $\bar{u}^h$ と u^h を (5.6) で定義する. このとき次の関係が成立する:

$$\|\bar{u}^h(t)-u^h(t)\|_{L^2(\Omega)}\le h\|u_t^h(t)\|_{L^2(\Omega)} \qquad \text{for a.e. } t\in(0,T), \tag{5.11}$$

$$\|u^h\|^2_{L^2(\Omega_T)}\le\|\bar{u}^h\|^2_{L^2(\Omega_T)}+\frac{h}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{5.12}$$

$$\|\nabla u^h\|^2_{L^2(\Omega_T)}\le\|\nabla\bar{u}^h\|^2_{L^2(\Omega_T)}+\frac{h}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.13}$$

Proof. (5.9) の評価のおかげで, $L^2(\Omega_T)$ においてある関数 $\mathbf{v}$ に弱収束する部分列 $\{\nabla\bar{u}^{h_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ があることが分かる. この部分列からさらに部分列を選び, $\{u_t^{h_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$ が $L^2(\Omega_T)$ においてある関数 U に収束することがいえる. 表記を簡単にするため, 次のように書くことにする.

$$\nabla\bar{u}^h \rightharpoonup \mathbf{v} \qquad \text{in } (L^2(\Omega_T))^m, \tag{5.14}$$

$$u_t^h \rightharpoonup U \qquad \text{in } L^2(\Omega_T). \tag{5.15}$$

我々は今, $L^2(\Omega_T)$ の意味で $\mathbf{v}=\nabla u$ と $U=u_t$ をみたす $u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ が存在するということを証明しなければならない. そのためには, もう少し詳しく評価することが必要である. まず, $t\in((n-1)h,nh)$ とすると,

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}^h(t)-u^h(t)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega(\bar{u}^h-u^h)^2\,dx \\
&= \int_\Omega\left(u_n-\frac{t-(n-1)h}{h}u_n-\frac{nh-t}{h}u_{n-1}\right)^2dx \\
&= \int_\Omega\left(\frac{nh-t}{h}\right)^2(u_n-u_{n-1})^2\,dx \\
&\le \int_\Omega(u_n-u_{n-1})^2\,dx=h^2\int_\Omega(u_t^h)^2\,dx \\
&\le C_E^2h^2
\end{aligned}$$

が得られる. つまり,

$$\|\bar{u}^h(t)-u^h(t)\|_{L^2(\Omega)}\le C_Eh \qquad \text{for a.e. } t\in(0,T).$$

次に,

$$
\begin{aligned}
&\|u^h\|^2_{L^2(\Omega_T)} - \|\bar{u}^h\|^2_{L^2(\Omega_T)} \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left((u^h)^2 - (\bar{u}^h)^2\right)\,dx\,dt \\
&= \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)h}^{nh} \int_\Omega \left[\left(\frac{t-(n-1)h}{h}u_n - \frac{nh-t}{h}u_{n-1}\right)^2 - u_n^2\right] dx\,dt \\
&= \sum_{n=1}^N \int_{(n-1)h}^{nh} \int_\Omega \left[\frac{(t-(n-1)h)^2 - h^2}{h^2}u_n^2\right. \\
&\qquad \left. +2\frac{(t-(n-1)h)(nh-t)}{h^2}u_n u_{n-1} + \frac{(nh-t)^2}{h^2}u_{n-1}^2\right] dx\,dt \\
&= \sum_{n=1}^N \int_\Omega \left[-\frac{2h}{3}u_n^2 + \frac{h}{3}u_n u_{n-1} + \frac{h}{3}u_{n-1}^2\right] dx \\
&\le \frac{h}{6}\sum_{n=1}^N \int_\Omega \left[-4u_n^2 + u_n^2 + u_{n-1}^2 + 2u_{n-1}^2\right] dx \\
&= \frac{h}{2}\sum_{n=1}^N \int_\Omega (-u_n^2 + u_{n-1}^2)\,dx = \frac{h}{2}\int_\Omega (u_0^2 - u_N^2)\,dx \\
&\le \frac{h}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

と計算できる. 同様に,

$$\|\nabla u^h\|^2_{L^2(\Omega_T)} - \|\nabla \bar{u}^h\|^2_{L^2(\Omega_T)} \le \frac{h}{2}\|\nabla u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が分かる. そして Poincaré の不等式より

$$\|u^h\|_{L^2(\Omega_T)} \le C_P\|\nabla u^h\|_{L^2(\Omega_T)} \qquad \text{for all } h \in (0,1) \tag{5.16}$$

をみたすような定数 C_P が存在する. □

補題 3 次の関係をみたす関数 $u \in H^1(\Omega)$ が存在する:

$$
\begin{aligned}
\nabla \bar{u}^h &\rightharpoonup \nabla u \qquad \text{in } (L^2(\Omega_T))^m, &(5.17)\\
u_t^h &\rightharpoonup u_t \qquad \text{in } L^2(\Omega_T). &(5.18)
\end{aligned}
$$

Proof. (5.9), (5.13) と (5.16) より, u^h が $H^1(\Omega_T)$ で一様有界である. ゆえに, $H^1(\Omega_T)$ で弱収束し, $L^2(\Omega_T)$ で強収束する部分列がある. 収束先を u と書く:

$$u^h \rightharpoonup u \qquad \text{in } H^1(\Omega_T). \tag{5.19}$$

(5.15) より, $U = u_t$ がほとんどいたるところで成り立つ. さらに, (5.14) より, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ に対して

$$\int_0^T \int_\Omega \left(\frac{\partial \bar{u}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial u^h}{\partial x_i}\right)\varphi\,dx\,dt \to \int_0^T \int_\Omega \left(\mathbf{v}_i - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi\,dx\,dt \qquad \text{as } h \to 0+,$$

が成立し, (5.11) より

$$\int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\partial \bar{u}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial u^h}{\partial x_i}\Big)\varphi \, dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega (\bar{u}^h - u^h)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx\, dt \to 0 \qquad \text{as } h \to 0+$$

がいえる. すなわち, Ω_T のほとんどいたるところで $\mathbf{v} = \nabla u$ が得られた. □

今, (5.8) において $h \to 0+$ という極限がとれるようになった. ここで, φ を $C_0^\infty([0,T) \times \Omega)$ に制限する.

$$\begin{aligned}\int_h^T \int_\Omega \nabla \bar{u}^h \nabla \varphi \, dx\, dt &= \int_0^T \int_\Omega \nabla \bar{u}^h \nabla \varphi \, dx\, dt - \int_0^h \int_\Omega \nabla \bar{u}^h \nabla \varphi \, dx\, dt \\ &\to \int_0^T \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx\, dt \qquad \text{as } \ h \to 0+. \end{aligned} \tag{5.20}$$

ここで (5.9) より, $\nabla \bar{u}^h$ の有界性を用いている. さらに,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega \frac{u_t^h(t) - u_t^h(t-h)}{h}\varphi \, dx\, dt \\ &\qquad = \int_0^T \int_\Omega \frac{u_t^h(t)}{h}\varphi(t)\, dx\, dt - \int_{-h}^{T-h} \int_\Omega \frac{u_t^h(t)}{h}\varphi(t+h)\, dx\, dt \\ &\qquad = -\int_0^T \int_\Omega u_t^h(t)\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\, dx\, dt - \int_{-h}^0 \int_\Omega \frac{u_t^h(t)}{h}\varphi(t+h)\, dx\, dt \\ &\qquad\qquad + \int_{T-h}^T \int_\Omega \frac{u_t^h(t)}{h}\varphi(t+h)\, dx\, dt \qquad (5.21) \\ &\to -\int_0^T \int_\Omega u_t \varphi_t \, dx\, dt - \int_\Omega v_0 \varphi(0)\, dx \qquad \text{as } \ h \to 0+ \end{aligned}$$

が得られる. (5.21) において次の事実を用いて収束が議論できる:
(i) 最初の項は, u_n^h が弱収束し, $(\varphi(t) - \varphi(t+h))/h$ が $L^2(\Omega_T)$ で強収束する;
(ii) 第 2 項では, $u_t^h = (u_0 - u_{-1})/h = v_0$ $(\forall t \in (-h, 0))$ が成立する;
(iii) 第 3 項では, $\varphi(t+h) = 0$ $(\forall t \in (T-h, T))$ が成立する.
以上のことより以下の式が導かれた:

$$\int_0^T \int_\Omega (-u_t \varphi_t + \nabla u \nabla \varphi)\, dx\, dt - \int_\Omega v_0 \varphi(0,x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty([0,T) \times \Omega). \tag{5.22}$$

$(\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$ 上のトレースが 0 という $H^1(\Omega_T)$ の関数が $H^1(\Omega_T)$ の閉線形部分空間であり, Mazur の定理より弱閉集合であるので, (5.19) より $u \in H^1(\Omega_T)$ であることに注意する. 結果的に u が境界条件 (5.2) と初期条件 (5.3) をトレースの意味でみたすことが言える. トレースの極限はトレース operater $T : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ のコンパクト性より得られる. さらに, $H^1(0,T; L^2(\Omega))$ における関数 u は $C([0,T]; L^2(\Omega))$ に属する. すなわち, u は初期条件 (5.3) を強い意味でもみたすことが言える.

要約すれば我々は, 離散勾配流法を用い, トレースの意味で境界条件と初期条件 (5.2), (5.3) をみたしていて, (5.22) の意味での問題 (5.1) – (5.4) の弱解 $u \in H^1(\Omega_T)$ が存在することを示した.

B 第一変分の計算

数値シミュレーション 2 で導入した弾性エネルギーの体積保存を課した第一変分を計算する．ここではベクトルを縦ベクトルして考える．すなわち、$\boldsymbol{p}(t,\theta) = (p^1(t,\theta), p^2(t,\theta))^T$ である．

$$\begin{aligned} E_b(\boldsymbol{p}) &:= \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0|^2 |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta \\ E_{s1}(\boldsymbol{p}) &:= \int_0^{2\pi} \left(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|} - 1 \right)^2 |\boldsymbol{q}_\theta| \, d\theta \\ E_{s2}(\boldsymbol{p}) &:= \int_0^{2\pi} \left(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|} - 1 \right)^2 |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta \end{aligned}$$

とおく．摂動パラメータを δ とする．一般のテスト関数 $\boldsymbol{p} + \delta\boldsymbol{\phi}$, $\boldsymbol{\phi} \in \left[C_0^\infty\big((0,2\pi)\times(0,T)\cap\{p^2>0\}\big)\right]^2$ に対して, 体積保存する摂動を $\boldsymbol{p}^\delta = F^\delta(\boldsymbol{p} + \delta\phi)$, $F^\delta = \sqrt{V_0/(V_0 - \delta\Phi)}$ で与える．ここで, Φ は

$$\Phi = \int_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\nu} \, ds$$

である．さらに, $\gamma = |\boldsymbol{p}_\theta| / |\boldsymbol{q}_\theta|$ とする．E_{s1} の第一変分は

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} E_{s1}(\boldsymbol{p}^\delta) dt|_{\delta=0} &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\delta} \left(\frac{F^\delta |\boldsymbol{p}_\theta + \delta\phi_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|} - 1 \right)^2 |\boldsymbol{q}_\theta||_{\delta=0} \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2(\gamma - 1) \left(\frac{\Phi}{2V_0} |\boldsymbol{p}_\theta| + \frac{\boldsymbol{\phi}_\theta^T \boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{V_0} (\gamma - 1) |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta - 2 \int_0^{2\pi} \left\{ (\gamma - 1) \frac{\boldsymbol{p}_\theta^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \right\}_\theta \boldsymbol{\phi} \, d\theta \\ &= \int_{\boldsymbol{p}} \frac{\Phi}{V_0} (\gamma - 1) \, ds - 2 \int_{\boldsymbol{p}} \left\{ \gamma_s \boldsymbol{\tau}^T - (\gamma - 1) \boldsymbol{\kappa}^T \right\} \boldsymbol{\phi} \, ds \end{aligned}$$

となる．E_{s2} の第一変分は

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\delta} \int_0^T E_{s2}(\boldsymbol{p}^\delta) \, dt|_{\delta=0} \\ = \;& T \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\delta} \left\{ \left(\frac{F^\delta |\boldsymbol{p}_\theta + \delta\phi_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|} - 1 \right)^2 F^\delta |\boldsymbol{p}_\theta + \delta\boldsymbol{\phi}_\theta| \right\} |_{\delta=0} \, d\theta \\ = \;& \int_0^{2\pi} \left\{ 2(\gamma - 1) \left(\frac{\Phi}{2V_0} \gamma + \frac{\boldsymbol{\phi}_\theta^T \boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{q}_\theta||\boldsymbol{p}_\theta|} \right) |\boldsymbol{p}_\theta| + (\gamma - 1)^2 \left(\frac{\Phi}{2V_0} |\boldsymbol{p}_\theta| + \frac{\boldsymbol{\phi}_\theta^T \boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \right) \right\} d\theta \\ = \;& \int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{2V_0} (\gamma - 1)(3\gamma - 1) |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta - \int_0^{2\pi} \left\{ (\gamma - 1)(3\gamma - 1) \boldsymbol{\tau}^T \right\}_\theta \boldsymbol{\phi} \, d\theta \\ = \;& \int_{\boldsymbol{p}} \frac{\Phi}{2V_0} (\gamma - 1)(3\gamma - 1) \, ds - \int_{\boldsymbol{p}} \left\{ (6\gamma - 4)\gamma_s \boldsymbol{\tau}^T + (\gamma - 1)(3\gamma - 1) \boldsymbol{\kappa}^T \right\} \boldsymbol{\phi} \, ds \end{aligned}$$

となる. 次に E_b を 3 分割して第一変分を計算する. つまり

$$
\begin{aligned}
E_b(\boldsymbol{p}) &= \int_0^{2\pi} \left(|\boldsymbol{\kappa}|^2 - 2\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{\kappa}_0 + |\boldsymbol{\kappa}_0|^2\right)|\boldsymbol{p}_\theta|\,d\theta \\
&= \{W_1(\boldsymbol{p}) - 2W_2(\boldsymbol{p}) + W_3(\boldsymbol{p})\}
\end{aligned}
$$

とおく. まず, W_1 の第一変分を考える.

$$
\begin{aligned}
W_1(\boldsymbol{p}) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2} - \frac{\boldsymbol{p}_\theta\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^4}\right)^T \left(\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2} - \frac{\boldsymbol{p}_\theta\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^4}\right)|\boldsymbol{p}_\theta|\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^4} - \frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T\boldsymbol{p}_\theta\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^6}\right)|\boldsymbol{p}_\theta|\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{|\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} - \frac{|\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5}\right)d\theta
\end{aligned}
$$

であるので,

$$
\begin{aligned}
&\frac{dW_1(\boldsymbol{p}^\delta)}{d\delta}\Big|_{\delta=0} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\delta}\left\{\frac{|\boldsymbol{p}_{\theta\theta} + \delta\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}|^2}{F^\delta|\boldsymbol{p}_\theta + \delta\boldsymbol{\phi}_\theta|^3} - \frac{|(\boldsymbol{p}_\theta + \delta\phi_\theta)^T(\boldsymbol{p}_{\theta\theta} + \delta\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})|^2}{F^\delta|\boldsymbol{p}_\theta + \delta\boldsymbol{\phi}_\theta|^5}\right\}\Big|_{\delta=0}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{-\frac{\Phi}{2V_0}\frac{|\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} + \frac{2\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} - \frac{3|\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5} + \frac{\Phi}{2V_0}\frac{|\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5}\right. \\
&\qquad\left. - \frac{2\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}(\boldsymbol{\phi}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta} + \boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta})}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5} + \frac{5|\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^7}\right\}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -\frac{\Phi}{2V_0}\left(\frac{|\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} - \frac{|\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5}\right) + 2\left(\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} - \frac{\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5}\right) \\
&\qquad -3\left\{\frac{|\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5} - \frac{|\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^7}\right\} - 2\left\{\frac{\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^5} - \frac{|\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{p}_{\theta\theta}|^2\boldsymbol{p}_\theta^T\boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^7}\right\}d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{2V_0}|\boldsymbol{\kappa}|^2|\boldsymbol{p}_\theta|\,d\theta + \int_0^{2\pi}\left\{2\frac{\boldsymbol{\kappa}^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|}\boldsymbol{\phi}_{\theta\theta} - 3|\boldsymbol{\kappa}|^2\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{\phi}_\theta - 2\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{\phi}_\theta\right\}d\theta
\end{aligned}
$$

となる. さらに上式の 2 番目の積分に部分積分を 2 回用いて

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left\{-\left(2\frac{\boldsymbol{\kappa}^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|}\right)_\theta\boldsymbol{\phi}_\theta - 3\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}^T\boldsymbol{\phi}_\theta - 2\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{\phi}_\theta\right\}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{2\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^T - 2\boldsymbol{\kappa}_s^T - 3\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}^T - 2\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\kappa}^T\right\}\boldsymbol{\phi}_\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(2\boldsymbol{\kappa}_s^T + 3\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}^T\right)_\theta\boldsymbol{\phi}\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}(2\boldsymbol{\kappa}_{ss}^T + 6\boldsymbol{\kappa}_s^T\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}^T + 3\boldsymbol{\kappa}^T\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}^T)|\boldsymbol{p}_\theta|\boldsymbol{\phi}\,d\theta
\end{aligned}
$$

を得る. したがって W_1 の第一変分は以下のようになる.

$$
\frac{dW_1(\boldsymbol{p}^\delta)}{d\delta}\Big|_{\delta=0} = -\int_{\boldsymbol{p}}\frac{\Phi}{2V_0}|\boldsymbol{\kappa}|^2\,ds + \int_{\boldsymbol{p}}\left\{2\boldsymbol{\kappa}_{ss}^T + 6\boldsymbol{\kappa}_s^T\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}^T + 3|\boldsymbol{\kappa}|^2\boldsymbol{\kappa}^T\right\}\boldsymbol{\phi}\,ds
$$

次に W_2 の第一変分を計算する．$\boldsymbol{q}_\theta^T \boldsymbol{q}_{\theta\theta} = 0$, $\boldsymbol{q}_\theta = -\boldsymbol{q}_{\theta\theta\theta}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}
W_2(\boldsymbol{p}) &= \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{\tau}_\theta^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \frac{\boldsymbol{q}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{q}_\theta|^2} |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\tau}^T \left(\frac{\boldsymbol{q}_{\theta\theta}}{|\boldsymbol{q}_\theta|^2} \right)_\theta d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{p}_\theta^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \frac{\boldsymbol{q}_\theta}{|\boldsymbol{q}_\theta|^2} \, d\theta
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\frac{dW_2(\boldsymbol{p}^\delta)}{d\delta}\Big|_{\delta=0} &= \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\delta} \left\{ \frac{(\boldsymbol{p}_\theta + \delta \boldsymbol{\phi}_\theta)^T}{|\boldsymbol{p}_\theta + \delta \boldsymbol{\phi}_\theta|} \right\} \frac{\boldsymbol{q}_\theta}{|\boldsymbol{q}_\theta|^2}\Big|_{\delta=0} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\boldsymbol{\phi}_\theta^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|} - \boldsymbol{p}_\theta^T \frac{\boldsymbol{p}_\theta^T \boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} \right\} \frac{\boldsymbol{q}_\theta}{|\boldsymbol{q}_\theta|^2} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\phi}_\theta^T \left\{ I - \frac{\boldsymbol{p}_\theta \boldsymbol{p}_\theta^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|^2} \right\} \frac{\boldsymbol{q}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta||\boldsymbol{q}_\theta|^2} \, d\theta
\end{aligned}$$

と計算でき，

$$\begin{aligned}
\frac{dW_2(\boldsymbol{p}^\delta)}{d\delta}\Big|_{\delta=0} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\phi}_\theta^T \frac{(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T)}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \frac{\boldsymbol{q}_\theta}{|\boldsymbol{q}_\theta|^2} \, d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi} \boldsymbol{\phi}_\theta^T \frac{(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T)}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \boldsymbol{\kappa}_{0\theta} \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T)}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \boldsymbol{\kappa}_{0\theta} \right\}_\theta^T \boldsymbol{\phi} \, d\theta
\end{aligned}$$

を得る．さらに，

$$\begin{aligned}
&\left\{ \frac{(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T)}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{|\boldsymbol{q}_\theta|} \right\}_\theta \\
=& \quad \frac{-\boldsymbol{\tau}_\theta \boldsymbol{\tau}^T - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}_\theta^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{|\boldsymbol{q}_\theta|} - (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T) \frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T \boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{|\boldsymbol{q}_\theta|} + \frac{(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T)}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \frac{\boldsymbol{\tau}_{0\theta}}{|\boldsymbol{q}_\theta|} \\
=& \quad -\frac{|\boldsymbol{p}_\theta| \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}^T + \tau |\boldsymbol{p}_\theta| \boldsymbol{\kappa}^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{|\boldsymbol{q}_\theta|} - (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T) \frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T \boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} \frac{\boldsymbol{\tau}_0}{|\boldsymbol{q}_\theta|} + \frac{(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T)}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \frac{|\boldsymbol{q}_\theta| \boldsymbol{\kappa}_0}{|\boldsymbol{q}_\theta|} \\
=& \quad \left(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\tau}^T + \boldsymbol{\tau}\kappa^T \right) \boldsymbol{\kappa}_{0\theta} + (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T) \frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T \boldsymbol{p}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} \boldsymbol{\kappa}_{0\theta} + \frac{(I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T)}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \boldsymbol{\kappa}_0,
\end{aligned}$$

であり，

$$\frac{(\boldsymbol{p}_{\theta\theta}^T \boldsymbol{p}_\theta)}{|\boldsymbol{p}_\theta|^3} = \frac{(\boldsymbol{p}_\theta^T \boldsymbol{p}_{\theta\theta})}{|\boldsymbol{p}_\theta|} = \frac{(\boldsymbol{p}_\theta^T \boldsymbol{p}_{\theta\theta})}{|\boldsymbol{q}_\theta||\boldsymbol{p}_\theta|^2} \frac{|\boldsymbol{q}_\theta|}{|\boldsymbol{p}_\theta|} = (I - \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\tau}^T) \frac{\gamma_s}{\gamma}$$

となる．

最後に, W_3 の第一変分を計算する.

$$W_3(\boldsymbol{p}) = |\boldsymbol{\kappa}_0|^2 \int_{\boldsymbol{p}} ds = |\boldsymbol{\kappa}_0|^2 \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta,$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\frac{dW_3(\boldsymbol{p}^\delta)}{d\delta}|_{\delta=0} &= |\boldsymbol{\kappa}_0|^2 \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\delta}\left(F^\delta |\boldsymbol{p}_\theta + \delta \boldsymbol{\phi}_\theta|\right)|_{\delta=0} \, d\theta \\
&= |\boldsymbol{\kappa}_0|^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{2V_0} |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\boldsymbol{p}_\theta^T \boldsymbol{\phi}_\theta}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \, d\theta \right\} \\
&= |\boldsymbol{\kappa}_0|^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{2V_0} |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\boldsymbol{p}_\theta^T}{|\boldsymbol{p}_\theta|} \right)_\theta \boldsymbol{\phi} \, d\theta \right\} \\
&= |\boldsymbol{\kappa}_0|^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{\Phi}{2V_0} |\boldsymbol{p}_\theta| \, d\theta - \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\kappa}^T |\boldsymbol{p}_\theta| \boldsymbol{\phi} \, d\theta \right\} \\
&= |\boldsymbol{\kappa}_0|^2 \left\{ \int_{\boldsymbol{p}} \frac{\Phi}{2V_0} \, ds - \int_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{\kappa}^T \boldsymbol{\phi} \, ds \right\}
\end{aligned}$$

を得る.

謝辞

本論文を作成するにあたり指導教官, 小俣正朗教授をはじめ Karel Svadlenka(カレル・シュワドドレンカ) 准教授, Pozar Norbert(ポジャール・ノルベルト) 助教, 当研究室所属の D1 赤川氏のご指導, ご鞭撻, ディスカッション等を頂きまして感謝申し上げます. また, 富士通次世代テクニカルコンピューティング開発本部, 風間正喜氏には資料のご提供頂きまして感謝申し上げます. さらには, PC の保守・管理や有意義なディスカッションをして頂きました金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻・計算科学講座, 小原功任準教授, 北海道電子科学研究所数理科学研究部門・動的数理モデリング分野, Elliott Ginder(エリオット・ギンダー) 助教に感謝申し上げます.

参考文献

[1] R. Choksi, M. Veneroni, Global *minimizers for the doubly-constrained Helfrich energy: the axisymmetric case*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, DOI 10.1007/s00526-012-0553-9 (2012).

[2] S. R. Goodwill, R. Kirk, S. J. Haake, *Experimental and finite element analysis of a tennis ball impact on a rigid surface*, Sports Engineering **8** (2005), pp. 145-158.

[3] M. Hubbard, W. J. Stronge, *Bounce of hollow balls on flat surfaces*, Sports Engineering **4** (2001), pp. 46-61.

[4] E. Katifori, S. Alben, D. R. Nelson, *Collapse and folding of pressurized rings in twodimensions*, Phys. Rev. E **79** 056604 (2009).

[5] M. Kazama, *Numerical computation of the interaction between a fluid and a membrane with volume preservation*, PhD. thesis, Kanazawa University, Japan, 2010.

[6] K. Kikuchi, S. Omata, *A free boundary problem for a one dimensional hyperbolicequation*, Adv. Math. Sci. Appl. **9** No. 2 (1999), pp. 775-786.

[7] N. Kikuchi, *An approach to the construction of Morse flows for variational functionals*, in: J.-M. Coron, J.-M. Ghidaglia, F. H_elein (Ed s.), Nematics-Mathematical and Physical Aspects, in: NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, Boston, London, 1991, pp. 195-198.

[8] J. Langer, D. A. Singer *The total squared curvature of closed curves*, J. Diff. Geom. **30** (1984), pp. 1-22.

[9] D. Legendre, R. Zenit, C. Daniel, P. Guiraud, *A note on the modelling of the bouncing of spherical drops or solid spheres on a wall in viscous uid*, Chemical Engineering Science **61** (2006), pp. 3543-3549.

[10] T. Nagasawa, I. Takagi, *Bifurcating critical points of bending energy under constraints related to the shape of red blood cells*, Calc. Var. Partial Differential Equations **16**(2003), 43 pp. 63-111.

[11] M. Nagurka, S. Huang, *A Mass-Spring-Damper Model of a Bouncing Ball*, Proceedings of the 2004 American Control Conference, Boston, pp. 499-504.

[12] S. Okabe, *The Motion of Elastic Planar Closed Curves under the Area-preserving Condition*, Indiana Univ. Math. J. **56** No. 4 (2007), pp. 1871-1912.

[13] S. Omata, *A numerical method based on the discrete Morse semi-flow related to parabolic and hyperbolic equation*, Nonlinear Analysis **30** No. 4 (1997), pp. 81-2187.

[14] S. Omata, *A numerical treatment of _lm motion with free boundary*, Adv. Math. Sci. Appl. **14** (2004), pp. 129-137.

[15] M. Schatzman, *A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: the vibrating string with a concave obstacle*, J. Math. Anal. Appl. **73** (1980), pp. 138-191.

[16] L. Simon, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, Comm. Anal. Geom. **1** No. 2 (1993), pp. 281-326.

[17] W. J. Stronge, A. D. C. Ashcroft, *Oblique impact of inflated balls at large deflections*, International Journal of Impact Engineering **34** (2007), pp. 1003-1019.

[18] H. T. Y. Yang, S. Sigal, A. Masud, R. K. Kapania, *A survey of recent shell finite elements*, Int. J. Numer. Meth. Engng. **47** (2000), pp. 101-127.

[19] H. Yoshiuchi, S. Omata, K. Svadlenka, K. Ohara, *Numerical solution of film vibration with obstacle*, Adv. Math. Sci. Appl. **16** No. 1 (2006), pp. 33-43.

[20] M. Kazama, S. Omata, T. Nagasawa, A. Kikuta, K. Svadlenka, *A global model for impact of elastic shells and its numerical implementation*, Adv. Math. Sci. Appl. **23** No. 1 (2013), pp. 93-108.