有限密度グロス-ヌーボー模型のグラスマンテンソルくりこみ群

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/42256

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



学位論文要旨

有限密度グロス-ヌーボー模型の
グラスマンテンソルくりこみ群

金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻
吉村友佑

Abstract

We apply the Grassmann tensor renormalization group (GTRG) to the one-flavor lattice Gross-Neveu model in the presence of chemical potential with the Wilson fermion lattice formulation. The tensor renormlization group (TRG) is one of the numerical renormalization methods. The GTRG is a generalization of the TRG to fermion system. The Gross-Neveu model is a simple fermion system containing four-fermion interaction. However, this model is known to share important properties, asymptotically free and spontaneous symmetry breaking, with QCD and considered to be its toy model.

We compute the fermion number density and its susceptibility for some non-trivial sets of parameters. As a result, We observe that the fermion density saturates to physically expected value for larger chemical potential and that the approximation for TRG gets worse near a critical point even for cross-over case. We confirm the validity of GTRG for the finite density system from the result of the fermion density saturation. We introduce a method analogous to the reweighting method for Monte Carlo method and test it for some parameters. As a result, the errors increase as the distance from original parameters and the lattice size.

本論文では、Wilson フェルミオンで定式化した化学ポテンシャルを持つ 1 フレーバー格子 Gross-Neveu モデルに Grasmann テンソルくりこみ群 (GrasmannTRG,GTRG) を適用した。このモデルの分配関数は

$$Z = \int D\psi D\bar{\psi} \exp\left(-\sum_n \mathcal{L}^{\mathrm{GN}}_{\mathrm{Lat}}\right) \tag{1}$$

$$\mathcal{L}^{\mathrm{GN}}_{\mathrm{Lat}} = \sum_{n'} \bar{\psi}_n D_{n,n'} \psi_{n'} + \frac{g^2}{2N}\left[\left(\bar{\psi}_n\psi_n\right)^2 + \left(\bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_n\right)^2\right] \tag{2}$$

$$\begin{aligned} D_{n,n'} = (m+2)\delta_{n,n'} &- \frac{1}{2}(1+\gamma_1)\delta_{n,n'+\hat{1}} - \frac{1}{2}(1-\gamma_1)\delta_{n,n'-\hat{1}} \\ &- \frac{1}{2}e^{-\mu}(1+\gamma_2)\delta_{n,n'+\hat{2}} - \frac{1}{2}e^{\mu}(1-\gamma_2)\delta_{n,n'-\hat{2}} \end{aligned} \tag{3}$$

である。ここで $\psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ は 2 成分のスピノル場、m は質量、g は結合定数、μ は化学ポテンシャル、n は格子点の座標、$\hat{1}(\hat{2})$ は第 1(2) 次元方向の単位ベクトルを表す。γ_1, γ_2 として Pauli 行列 σ_1, σ_3 を選ぶ。

GTRG を行うには分配関数をテンソルネットワークで表さねばならない。分配関数を

$$\begin{aligned} Z = \sum_{\{s,x,t=0,1\}} \int D\psi D\bar{\psi} \prod_n \\ \cdot \left[-(m+2)\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}\right]^{s_{n,1}} \left[-(m+2)\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2}\right]^{s_{n,2}} \left(2g^2\bar{\psi}_{n,1}\psi_{n,1}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n,2}\right)^{s_{n,3}} \\ \cdot \left(\bar{\chi}_{n+\hat{1},1}\chi_{n,1}\right)^{x_{n,1}} \left(\bar{\chi}_{n,2}\chi_{n+\hat{1},2}\right)^{x_{n,2}} \left(e^{-\mu}\bar{\psi}_{n+\hat{2},1}\psi_{n,1}\right)^{t_{n,1}} \left(e^{\mu}\bar{\psi}_{n,2}\psi_{n+\hat{2},2}\right)^{t_{n,2}} \end{aligned} \tag{4}$$

と展開する。ここで

$$\chi_{n,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n,1} + \psi_{n,2}),\ \chi_{n,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n,1} - \psi_{n,2}), \tag{5}$$

$$\bar{\chi}_{n,1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_{n,1} + \bar{\psi}_{n,2}\right),\ \bar{\chi}_{n,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_{n,1} - \bar{\psi}_{n,2}\right), \tag{6}$$

である。反交換関係からくる符号が現れないように新たな変数 $\{\xi, \bar{\xi}, \eta, \bar{\eta}\}$ を挿入しながら、べき指数 $\{x, t\}$ を残して $\psi, \bar{\psi}$ を積分すると、テンソルネットワーク表示として

$$Z = \sum_{\{x,t\}} \int \prod_n \mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}, \quad x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}), t_n = (t_{n,1}, t_{n,2}) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} = T_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} &d\bar{\eta}^{x_{n,2}}_{n,2} d\eta^{x_{n,1}}_{n,1} d\bar{\xi}^{t_{n,2}}_{n,2} d\xi^{t_{n,1}}_{n,1} d\eta^{x_{n-\hat{1},2}}_{n,2} d\bar{\eta}^{x_{n-\hat{1},1}}_{n,1} d\xi^{t_{n-\hat{2},2}}_{n,2} d\bar{\xi}^{t_{n-\hat{2},1}}_{n,1} \\ &\cdot \left(\bar{\eta}_{n+\hat{1},1}\eta_{n,1}\right)^{x_{n,1}} \left(\bar{\eta}_{n,2}\eta_{n+\hat{1},2}\right)^{x_{n,2}} \left(\bar{\xi}_{n+\hat{2},1}\xi_{n,1}\right)^{t_{n,1}} \left(\bar{\xi}_{n,2}\xi_{n+\hat{2},2}\right)^{t_{n,2}} \end{aligned} \tag{8}$$

とできる。T は積分の結果の値を成分として持つテンソルで、各成分の値は m, g, μ に依る。x_n は格子点 n につながる第 1 次元方向のリンク変数、t_n は同じく第 2 次元方向のリンク変数とみなす。

GTRG はテンソルの分解と自由度の縮約からなる。まず T を特異値分解 (SVD) によっ

て分解する。

$$M^{13}_{x_n t_n, x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} = T_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}}$$
$$\simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}=1}^{D_{\mathrm{cut}}} U^1_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*,b}} \sigma^{13}_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}} U^{3*}_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}, x_{n^*-\hat{1}^*,b}} \tag{9}$$

$$T_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} \simeq \sum_{x_{n^*-1^*,b}=1}^{D_{\mathrm{cut}}} S^1_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*,b}} S^3_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*,b}} \tag{10}$$

$$S^1_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*,b}} = U^1_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*,b}} \sqrt{\sigma^{13}_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}}} \tag{11}$$

$$S^3_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*,b}} = U^{3*}_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*,b}} \sqrt{\sigma^{13}_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}}} \tag{12}$$

ここで U^1, U^3 はユニタリー行列、σ^{13} は特異値である。$x_{n^*-\hat{1}^*,b}$ を粗視化された格子の第 1 次元方向のリンク変数とみなす。D_{cut} は、粗視化された自由度のうちきり数である。また、$\bar{\eta}_{n^*}, \eta_{n^*-\hat{1}^*}$ を挿入することで、

$$d\bar{\eta}^{x_{n,2}}_{n,2} d\eta^{x_{n,1}}_{n,1} d\bar{\xi}^{t_{n,2}}_{n,2} d\xi^{t_{n,1}}_{n,1} d\eta^{x_{n-\hat{1},2}}_{n,2} d\bar{\eta}^{x_{n-\hat{1},1}}_{n,1} d\xi^{t_{n-\hat{2},2}}_{n,2} d\bar{\xi}^{t_{n-\hat{2},1}}_{n,1}$$
$$\cdot \left(\bar{\eta}_{n+\hat{1},1}\eta_{n,1}\right)^{x_{n,1}} \left(\bar{\eta}_{n,2}\eta_{n+\hat{1},2}\right)^{x_{n,2}} \left(\bar{\xi}_{n+\hat{2},1}\xi_{n,1}\right)^{t_{n,1}} \left(\bar{\xi}_{n,2}\xi_{n+\hat{2},2}\right)^{t_{n,2}}$$
$$= \left(D^1_{x_n t_n} d\bar{\eta}^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}}_{n^*}\right) \left(D^3_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} d\eta^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}}_{n^*-\hat{1}^*}\right) \left(\bar{\eta}_{n^*}\eta_{n^*-\hat{1}^*}\right)^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}} \tag{13}$$

$$D^1_{x_n t_n} = d\bar{\eta}^{x_{n,2}}_{n,2} d\eta^{x_{n,1}}_{n,1} d\bar{\xi}^{t_{n,2}}_{n,2} d\xi^{t_{n,1}}_{n,1}$$
$$\cdot \left(\bar{\eta}_{n+\hat{1},1}\eta_{n,1}\right)^{x_{n,1}} \left(\bar{\eta}_{n,2}\eta_{n+\hat{1},2}\right)^{x_{n,2}} \left(\bar{\xi}_{n+\hat{2},1}\xi_{n,1}\right)^{t_{n,1}} \left(\bar{\xi}_{n,2}\xi_{n+\hat{2},2}\right)^{t_{n,2}} \tag{14}$$

$$D^3_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} = d\eta^{x_{n-\hat{1},2}}_{n,2} d\bar{\eta}^{x_{n-\hat{1},1}}_{n,1} d\xi^{t_{n-\hat{2},2}}_{n,2} d\bar{\xi}^{t_{n-\hat{2},1}}_{n,1} \tag{15}$$

$$x_{n^*-\hat{1}^*,f} = \left[\sum_{i=1}^{2} (x_{n,i} + t_{n,i})\right] \bmod 2 = \left[\sum_{i=1}^{2} \left(x_{n-\hat{1},i} + t_{n-\hat{2},i}\right)\right] \bmod 2 \tag{16}$$

とする。式 (13) の括弧内には必ず偶数個の変数がある。これらによって $\mathcal{T}$ は

$$\mathcal{T}_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} \simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}=1}^{D_{\mathrm{cut}}} \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*,f}=0}^{1} \int \mathcal{S}^1_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*}} \mathcal{S}^3_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*}} \left(\bar{\eta}_{n^*}\eta_{n^*-\hat{1}^*}\right)^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}}$$
$$\cdot \delta_{\sum_i (x_{n,i}+t_{n,i}) \bmod 2, x_{n^*-\hat{1}^*,f}} \delta_{\sum_i (x_{n-\hat{1},i}+t_{n-\hat{2},i}) \bmod 2, x_{n^*-\hat{1}^*,f}} \tag{17}$$

$$\mathcal{S}^1_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*}} = S^1_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*,b}} D^1_{x_n t_n} d\bar{\eta}^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}}_{n^*} \tag{18}$$

$$\mathcal{S}^3_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*}} = S^3_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}} x_{n^*-\hat{1}^*,b}} D^3_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} d\eta^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}}_{n^*-\hat{1}^*} \tag{19}$$

$$x_{n^*-\hat{1}^*} = (x_{n^*-\hat{1}^*,b}, x_{n^*-\hat{1}^*,f}) \tag{20}$$

と分解される。同様に、$\xi_{n^*}, \bar{\xi}_{n^*}, t_{n^*}$ を導入することで、粗視化された格子の第 2 次元方向の分解が

$$\mathcal{T}_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_n} \simeq \sum_{t_{n^*-\hat{2}^*,b}=1}^{D_{\mathrm{cut}}} \sum_{t_{n^*-\hat{2}^*,f}=0}^{1} \int \mathcal{S}^2_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}} \mathcal{S}^4_{t_{n+\hat{2}} x_{n-\hat{1}+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}} \left(\bar{\xi}_{n^*}\xi_{n^*-\hat{2}^*}\right)^{t_{n^*-\hat{2}^*,f}}$$
$$\cdot \delta_{\sum_i (t_{n,i}+x_{n+\hat{2},i}) \bmod 2, t_{n^*-\hat{2}^*,f}} \delta_{\sum_i (t_{n+\hat{2},i}+x_{n-\hat{1}+\hat{2},i}) \bmod 2, t_{n^*-\hat{2}^*,f}} \tag{21}$$

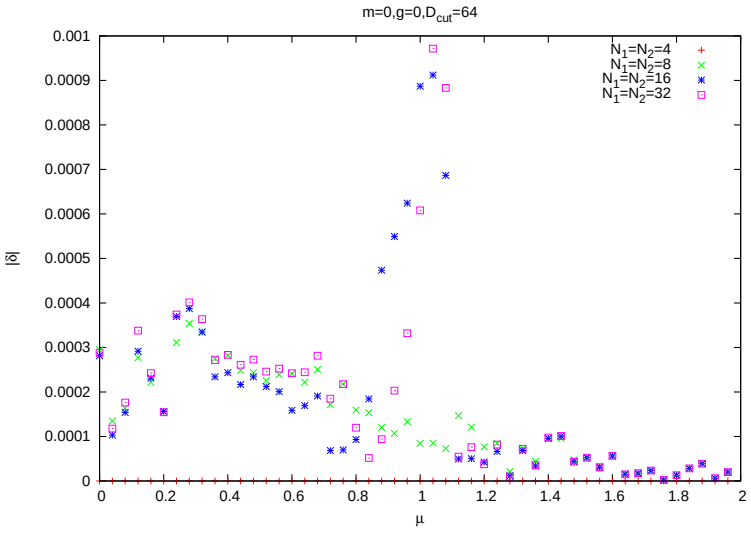


図 1: $D_{\mathrm{cut}} = 64$ に固定した場合の μ に対する δ の変化。

とできる。

分解した $\mathcal{S}^1, \mathcal{S}^2, \mathcal{S}^3, \mathcal{S}^4$ を集めて元の格子上の自由度を縮約すると、粗視化されたテンソルが

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{x_{n^*} t_{n^*} x_{n^*-\hat{1}^*} t_{n^*-\hat{2}^*}} = & \sum_{x_n, t_n, x_{n+\hat{2}}, t_{n+\hat{1}}} \int \mathcal{S}^1_{x_n t_n x_{n^*-\hat{1}^*}} \mathcal{S}^2_{t_n x_{n+\hat{2}} t_{n^*-\hat{2}^*}} \mathcal{S}^3_{x_{n+\hat{2}} t_{n+\hat{1}} x_{n^*}} \mathcal{S}^4_{t_{n+\hat{1}} x_n t_{n^*}} \\
& \cdot \left(\bar{\eta}_{n^*+\hat{1}^*} \eta_{n^*}\right)^{x_{n^*,f}} \left(\bar{\xi}_{n^*+\hat{2}^*} \xi_{n^*}\right)^{t_{n^*,f}} \\
& \cdot \delta_{\sum_i (x_{n,i}+t_{n,i}) \bmod 2, x_{n^*-\hat{1}^*,f}} \delta_{\sum_i \left(t_{n,i}+x_{n+\hat{2},i}\right) \bmod 2, t_{n^*-\hat{2}^*,f}} \\
& \cdot \delta_{\sum_i \left(x_{n+\hat{2},i}+t_{n+\hat{1},i}\right) \bmod 2, x_{n^*,f}} \delta_{\sum_i \left(t_{n+\hat{1},i}+x_{n,i}\right) \bmod 2, t_{n^*,f}} \qquad (22) \\
= & \, T_{x_{n^*} t_{n^*} x_{n^*-\hat{1}^*} t_{n^*-\hat{2}^*}} \, d\eta^{x_{n^*,f}} \, d\xi^{t_{n^*,f}} \, d\bar{\eta}^{x_{n^*-\hat{1}^*,f}} \, d\bar{\xi}^{t_{n^*-\hat{2}^*,f}} \\
& \cdot \left(\bar{\eta}_{n^*+\hat{1}^*} \eta_{n^*}\right)^{x_{n^*,f}} \left(\bar{\xi}_{n^*+\hat{2}^*} \xi_{n^*}\right)^{t_{n^*,f}} \qquad (23)
\end{aligned}
$$

と得られる。

1 度 GTRG を行うと格子点数が半分になるので、格子点数が十分に小さくなるまで GTRG を繰りかえして、最後に自由度を直接たしあげることで分配関数が計算できる。そのようにして計算した分配関数から自由エネルギー $\ln Z$、フェルミオン密度 n、その感受率 χ を計算した。自由エネルギーは $\ln Z_{\mathrm{exact}}$ との相対誤差

$$
\delta = \frac{\ln Z - \ln Z_{\mathrm{exact}}}{\ln Z_{\mathrm{exact}}}, \qquad (24)
$$

その結果を図 1 に示す。$\mu = 0.3, 1$ の付近で相対誤差が大きくなった。フェルミオン密度を計算した結果を図 2 に示す。2 次元系でフレーバー数が 1 なので飽和密度は 1 になることが期待されるが、結果はいずれのパラメータでも 1 で飽和しており、物理的に妥当な結果が得られた。感受率を計算した結果を図 3 に示す。ピークは見られるがいずれも体積依存性はなく、クロスオーバーであることが分かる。また、$g = 0$ の場合をみると、ピーク

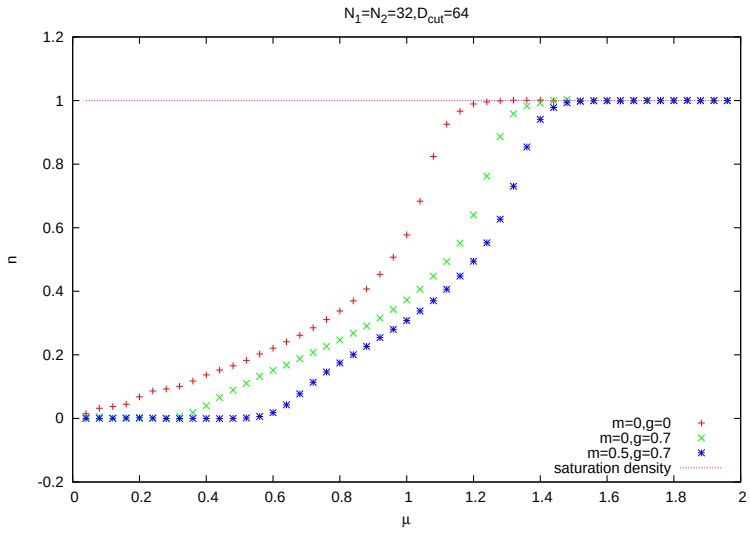


図 2: $N_1 = N_2 = 32, D_{\rm cut} = 64$ と固定した μ に対する n の変化。

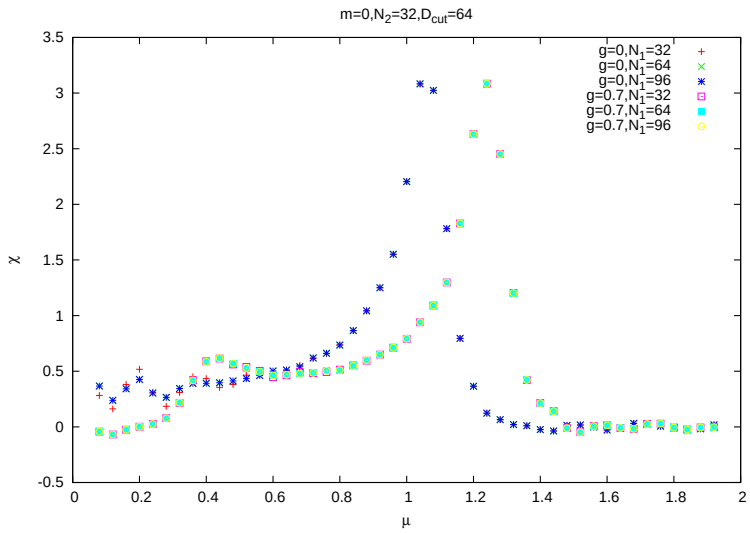


図 3: フェルミオン密度の感受率による有限サイズスケーリング

は自由エネルギーの大きくなる $\mu = 0.3, 1$ の近くでみられる。相転移点で TRG の精度が落ちることは知られていたが、クロスオーバーでも落ちることが分かった。

MonteCarlo 法の再重み付け法のアナロジーとなる手法を導入し、計算を試みた。これは元となるパラメータのテンソル T の SVD の結果である U^1, U^3 によって、別のパラメータの分解を

$$T'_{x_n t_n x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}} \simeq \sum_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}, x'_{n^*-\hat{1}^*}, b=1}^{D_{\mathrm{cut}}} U^1_{x_n t_n, x_{n^*-\hat{1}^*,b}} \Sigma'^{13}_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}, x'_{n^*-\hat{1}^*,b}} U^{3*}_{x_{n-\hat{1}} t_{n-\hat{2}}, x'_{n^*-\hat{1}^*,b}} \tag{25}$$

$$\Sigma'^{13}_{x_{n^*-\hat{1}^*,b}, x'_{n^*-\hat{1}^*,b}} = \sum_{x,t,x',t'} U^{1*}_{xt, x_{n^*-\hat{1}^*,b}} T'_{xtx't'} U^3_{x't', x'_{n^*-\hat{1}^*,b}} \tag{26}$$

で定義するものである。この手法によって自由エネルギーを計算し、厳密値との相対誤差を調べた。その結果を図 4 に示す。元のパラメータから離れるほど、体積が大きくなるほど相対誤差が大きくなる傾向がみられた。また、元のパラメータがピークの近くである $\mu = 1$ の場合は、他の場合より相対誤差がすみやかに大きくなった。

この研究は、初めて GTRG を有限密度系に適用したものである。飽和密度の領域でも定性的に正しい結果が得られたことは、GTRG の有限密度系での有効性を示すものと考える。

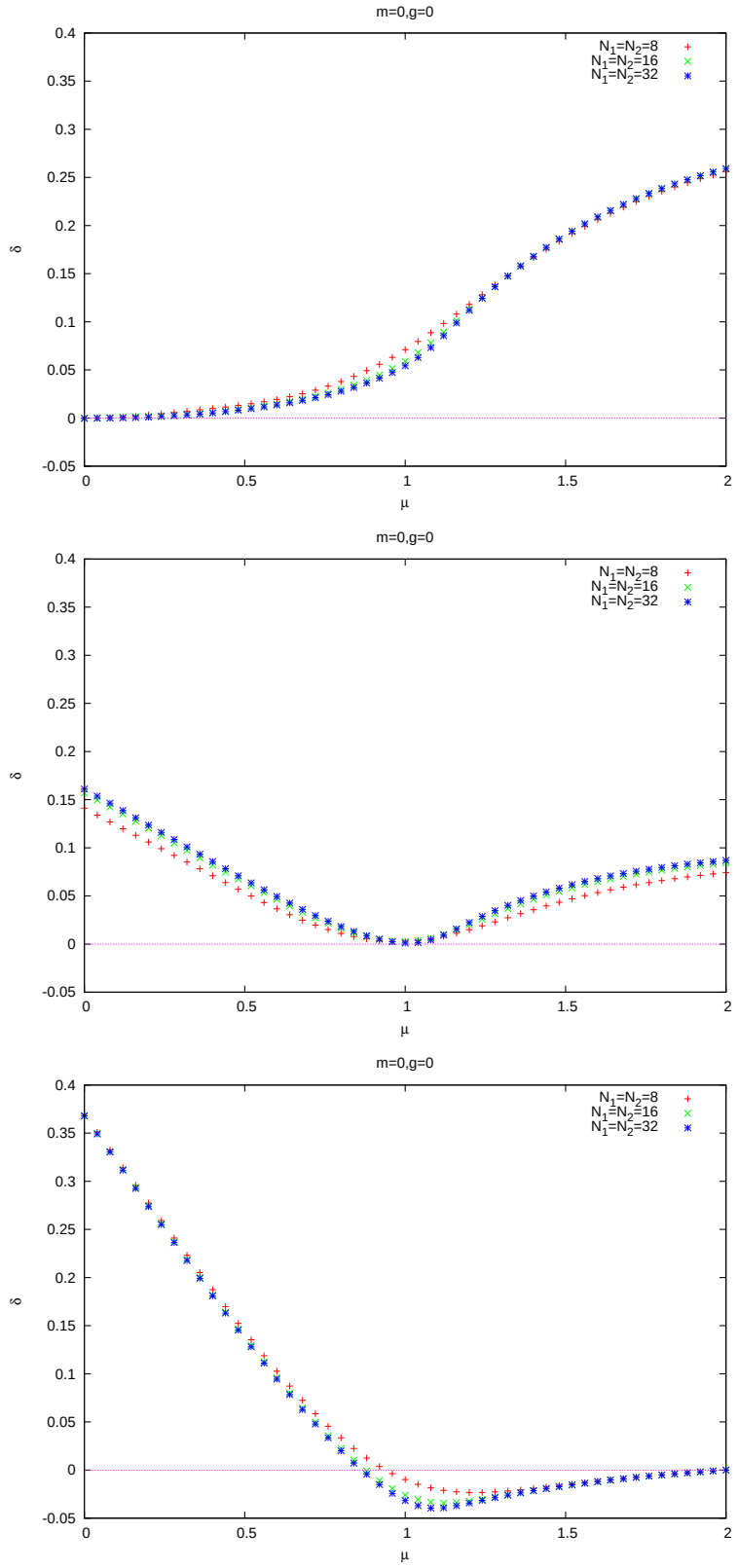


図 4: $D_{\mathrm{cut}} = 64$ に固定した再重み付け法による計算結果と厳密値との相対誤差の μ に対する変化を示す。元にしたパラメータは上から $\mu = 0, 1, 2$ である。

平成 27 年　2 月　5 日

学位論文審査報告書（甲）

1．学位論文題目（外国語の場合は和訳を付けること。）

有限密度グロス-ヌーボー模型のグラスマンテンソルくりこみ群

2．論文提出者　(1) 所　　属　数物科学　　専攻

(2) 氏（ふり）　名（がな）　吉村（よしむら）　友佑（ゆうすけ）

3．審査結果の要旨（600～650 字）

多体問題や量子系の非摂動計算にはこれまでモンテカルロ法が主に用いられてきたが、ボルツマン因子が複素数になる場合は適応することができず、例えば高密度 QCD などの興味深い系を調べることが難しかった。しかし、近年テンソルくりこみ群と呼ばれる、ボルツマン因子が複素数であるかどうかに関係なく分配関数や物理量を近似的に計算できるアルゴリズムが提唱され、符号問題のために詳しく調べられなかった系への適応が進んでいる。本論文では、相対論的フェルミオン有限密度系への初めての適応例として、グロス・ヌーボー模型における定式化と解析を行ったものである。

本論文では、上記モデルのボルツマン因子からテンソルを構成し、そのテンソルを繰り込むことによって近似的に分配関数を求めるまでの一連の流れを具体的に示し、実際に数値計算を行い定式化が正しいことも示した。特に、超高密度領域で飽和密度に達する様子が確認されるなど、今後の有限密度研究に先鞭を付けたことは評価できる。また、モンテカルロ法の再重み付け法のアナロジーとなる手法も新たに提案し、その妥当性を議論した。この論文の計算はオリジナルであり独創性にはまったく問題ない。本博士論文の内容は、申請者の広い学識を示し、共同研究ではあるが、申請者が全ての面で主導しており、学位論文として十分であると認められるものである。

4．審査結果　(1) 判　　定（いずれかに○印）　(合　格)　・　不合格

(2) 授与学位　　博　士（　理学　）