Mathematical Analysis of a Ball Bouncing Problem by Using Discrete Morse Flow

メタデータ	言語: jpn
	出版者:
	公開日: 2017-10-05
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者:
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/42258

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.

離散勾配流を用いたボールバウンスの数理解析

Mathematical Analysis of a Ball Bouncing Problem by Using Discrete Morse Flow

金沢大学自然科学研究科
数物科学専攻

菊田　　章

Abstract

This paper presents a model for a chain of the motion of the physical phenomenon that an elastic ring (shell) falls and collides with a rigid obstacle and rebounds. First, the expression of the total elastic energy is corrected in an approximate equation from the physical consideration of ‘bending’ and ‘stretching’. And the Lagrangian of the energy preservation equation which took the energy related to the compression of the gas present inside the shell into consideration is derived and an action integral is defined. Applying Hamilton’s principle, the governing equation (the kinetic equation) for the free part of the shell is obtained by calculating the first variation of the action integral. Also, calculating the first variation of the action integral under a constraint condition with the volume preservation, the governing equation is derived. Taking into account the influence of the obstacle, we introduce the expression of the characteristic function to those terms whose energy depends on the obstacle to obtained governing equations.

These obtained governing equations are extremely difficult to solve in the form of a partial differential equation. Therefore, the numerical computation technique called the hyperbolic discrete Morse flow method is introduced as the computation technique for simulations. By results of numerical simulations to two examples, it is confirmed that the theory with constraint conditions of the volume preservation can be applied enough to a ball bouncing problem.

Therefore, taking into account the extension of this problem, we define the total elastic energy described using the second derivative of the position vector (column vector) of the elastic shell and the mathematical analysis under a constraint condition with the volume preservation and numerical simulations are done. This is also reinforcement of theory in the previous theory.

要旨

本研究では，ボール(中空の弾性体の殻(shell)) が平らな障害物に衝突し跳ね返る現象を取り扱っている．ボールは重力で自由落下し平面の障害物に局所的な反発係数0で衝突する．衝突によりボールが変形することで弾性エネルギーが蓄えられ，これにより跳ね返り現象が起きる．この種の問題について実験・理論ともに様々な研究が行われてきた．殻(shell)の質量の中心の運動だけを扱う最も簡単なモデルから始まり，精巧な有限要素モデルにまで多岐に渡っている．

本論文の目的は，厳密な数学的解析への発展性があり，衝突の局所的現象にとどまらず，体積保存など (ボールの中に非圧縮性流体が入っている場合など) 大域的情報を含むモデルの構築にある．既存の研究として，局所的な情報を取り扱った研究が見受けられる．これらは一部の簡略化された問題で数学的に厳密な結果は存在するが，一般の場合では数学的結果は得られていない．このような先行研究の中で，本研究は局所的情報(運動方程式) と大域的情報(体積保存・位置エネルギー) などを同時にモデリングしたという意味で全く新しい問題であると考えている．

弾性体の振動は数学的には難問であり，一般のモデルでは厳密な結果は得られていない．そこで殻の厚さを仮想的に0にする方法で数値解析の次元を下げるモデルを構築した．殻が十分薄い場合には現象解析に通用するモデルである．次に衝突現象の取り扱いであるが，数学では難問とされている．先行研究として，1次元のストリング(スカラー関数のグラフで書かれている場合) が，障害物と完全弾性衝突する問題について扱っている研究がある．しかしながら，完全弾性衝突では障害物の無い方程式の解を障害物に当たった時に，折り返せば記述できるので，問題の焦点は“折り返す部分の測度論的取

り扱い”に特化している．従って，現象論的なおもしろさは追求できない．そこで現実の問題に近づけるために本論文では殻と平面が局所的には完全非弾性衝突の場合を取り扱うこととした．完全非弾性衝突の場合は，(スカラー関数のグラフで書くことが出来ると仮定した)ゴムひもが障害物に衝突する現象を取り扱った研究があり，一部の問題ではエネルギー評価と解の存在が証明されている．これらの論文では，退化した双曲型方程式が現れ通常の方法論では解法が構築できず，変分法に基づく双曲型(波動型)離散勾配流を用いて近似解の構成，エネルギー評価，一次元の場合の解の存在証明などを行っている．離散勾配流は本論文でも主要な方法論として採用しているが，単純化して説明すると，Lagrangianによるactionの停留点を求める問題を，時間方向を離散化することにより，近似最小化問題としたものが離散勾配流である．最小化法を使うことが出来れば，退化作用素の取り扱いや大域的取り扱いは大変楽になる場合が多い．

本研究で考慮する殻は，もはやスカラー関数のグラフで書くことは出来ず，ベクトル値関数として殻を表現した．これを用いて，殻(shell) のエネルギーは，弾性エネルギー(曲げ，伸縮)，殻内部の気体エネルギー，位置エネルギー，運動エネルギーである．さらに殻の囲う体積(面積) 保存条件を課すこともできる．衝突は障害物の形状に強制的に変形されるものとした．これらからLagrangianを導出し，作用積分(action integral)を定義し停留点を計算することで運動方程式を得ることが出来る．実際の計算は前出の離散勾配流を用いて行っている．弾性エネルギーを考慮していることから，荒く言うと空間変数の4階微分が出現し加速度の時間2階微分との組み合わせでは双曲型に分類されないが，前出の双曲型(波動型) 離散勾配流はほぼそのまま使うことが出来る．しかしながら，解の存在などについては結果を得ることが出来なかった．本研究全体を俯瞰すると，衝突を伴う弾性体の運動を破綻無く取り扱うことに成功し，離散Lagrangian などと呼ぶべき方法論の構築も出来た．また，三次元への拡張もそのまま出来るモデルでありこの先の発展も期待できると信じている．

本論文では，まず殻(shell)に蓄えられたエネルギーに基づくモデル方程式を導く．その解に対する数値的アルゴリズムを提案し，いくつかの数値シミュレーション結果を紹介する．

ボール(中空の弾性体の殻(shell))が落下し障害物に衝突し跳ね返るという一連の物理現象のモーションのモデル化について考える．まず，殻(shell)上の位置を $\boldsymbol{p}(t)=(p^1(t),\ p^2(t))$，その厚さ h を非常に薄いという仮定のもとで，弾性エネルギーの総量を「曲り」と「伸縮」の物理的考察により

$$E_e(\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}kh\int_0^{2\pi}\{\frac{1}{12}h^2(\kappa-\kappa_0)^2+(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|}-1)^2\}|\boldsymbol{q}_\theta|d\theta$$

を得る．ここで，k は弾性率，$\boldsymbol{q}(\theta)$ は平衡状態で障害物に接していないときの形状を表し，

$$\kappa(\theta)=-\frac{\partial^2\boldsymbol{p}(\theta)}{\partial\boldsymbol{s}^2}\cdot\boldsymbol{v}(\theta)=-\boldsymbol{p}_{ss}\cdot\boldsymbol{v}=-\frac{\boldsymbol{p}_{\theta\theta}(\theta)A\boldsymbol{p}_\theta^T(\theta)}{|\boldsymbol{p}_\theta(\theta)|^3},\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{v}^T(\theta)=\frac{A\boldsymbol{p}_\theta^T(\theta)}{|\boldsymbol{p}_\theta(\theta)|}$$

であり，κ_0 は平衡状態の κ である．この形式は，平衡形 $\boldsymbol{q}(\theta)$ に関した積分となっているが，考慮している近似オーダーの範囲内で，$|\boldsymbol{q}_\theta|d\theta$ を $|\boldsymbol{p}_\theta|d\theta$ に変形できることから，弾性エネルギーは

$$E_e(\boldsymbol{p})=\frac{k_b}{2}\int_0^{2\pi}(\kappa-\kappa_0)^2|\boldsymbol{p}_\theta|d\theta+\frac{k_s}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{|\boldsymbol{p}_\theta|}{|\boldsymbol{q}_\theta|}-1)^2|\boldsymbol{q}_\theta|d\theta$$

と書くことができる．ここで，$k_s = kh$，$k_b = \dfrac{kh^3}{12} = \dfrac{k_s h^2}{12}$．

さらに，力学的運動エネルギー$E_k(\boldsymbol{p})$，内部のガスエネルギー$E_g(\boldsymbol{p})$，重力ポテンシャルエネルギー$E_p(\boldsymbol{p})$を加えて, 全体のエネルギー保存系の Lagrangian から作用積分 (action integral)

$$S(\boldsymbol{p}) = \int_0^T (E_e(\boldsymbol{p}) + E_p(\boldsymbol{p}) - E_k(\boldsymbol{p}) + E_g(\boldsymbol{p}))dt$$

を構成する．詳細に記述すると

$$S(\boldsymbol{p}) = \int_0^T \{\int_0^{2\pi} (\frac{k_b}{2}(\kappa - \kappa_0)^2 \left|\boldsymbol{p}_\theta\right| + \frac{k_s}{2}(\frac{\left|\boldsymbol{p}_\theta\right|}{\left|\boldsymbol{q}_\theta\right|} - 1)^2 \left|\boldsymbol{q}_\theta\right| + \sigma\, gh \left|\boldsymbol{q}_\theta\right| \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_2 \chi_{p^2>0}$$

$$- h\sigma \left|\boldsymbol{q}_\theta\right| \frac{\left|\boldsymbol{p}_t\right|^2}{2} \chi_{p^2>0})d\theta + E_g(\boldsymbol{p})\}dt$$

$$E_g(\boldsymbol{p}) = -\int_{V_0}^{V} PdV = -\int_{V_0}^{V} \{P_0 + c_g(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0})\}dV = -P_0(V - V_0) - c_g(1 - \frac{V}{V_0} + \ln\frac{V}{V_0})$$

と書ける．ここで，殻$\boldsymbol{p}$の定常状態の平均質量密度をσとすると，局所的な密度は$\sigma\left|\boldsymbol{q}_\theta\right| / \left|\boldsymbol{p}_\theta\right|$であり，$p^2 \to \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_2 = (0,\ 1)$ である．特性関数$\chi_{p^2>0}$は集合

$$\{p^2 > 0\} = \{(t,\ \theta) \in (0,\ T)\times(0,\ 2\pi);\ p^2(t,\ \theta) > 0\}$$

に対するものである．これは，殻の一部が障害物に接触したときに運動エネルギーが消えるということを意味している．すなわち，局所的な反発係数が 0 で，衝突直後殻が障害物に密着した状態になる．さらに，P_0は殻の外形が自然な場合の空気圧で，cは音速である．定数c_gはガスの質量と$\sqrt{c}$をかけたものである．殻の体積（面積）は

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta^T)\chi_{p^2>0} d\theta$$

で与えられ，定常状態での体積（面積）がV_0である．

$S(\boldsymbol{p})$に対して，Hamilton の原理を使うと，殻の自由に動ける部分の支配方程式（運動方程式）は次の第一変分

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(\boldsymbol{p} + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = 0 \qquad \forall\phi \in [C_0^\infty((0,\ T)\times(0,\ 2\pi)\bigcap\{\ p^2 > 0\})]^2$$

を計算することにより，

$$\sigma\ \boldsymbol{p}_{tt} = \{\frac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss} + \frac{1}{2}(\kappa^2 - \kappa_0^2)\kappa) - k\rho(\rho - 1)\kappa\}\boldsymbol{v}$$

$$+ \frac{\rho}{h}(P_0 + c_g(\frac{1}{V} - \frac{1}{V_0}))\boldsymbol{v} + k\rho\rho_s\boldsymbol{\tau} - g\sigma\ \boldsymbol{e}_2 \quad (t,\ \theta) \in (0,T)\times[0,2\pi]\bigcap\{\ p^2 > 0\}$$

$$\kappa = 0 \quad \text{in} \quad (0,T)\times[0,2\pi]\bigcap\{\ p^2 \le 0\}$$

として得ることができる．ここで，$\rho = \left|\boldsymbol{p}_\theta\right| / \left|\boldsymbol{q}_\theta\right|$，$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p}_\theta / \left|\boldsymbol{p}_\theta\right| = \boldsymbol{p}_s$，$\boldsymbol{v}^T = A\boldsymbol{\tau}^T$ であり，

$$\kappa\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\tau}_s = -\boldsymbol{p}_{ss}, \quad \boldsymbol{v}_s = \kappa\boldsymbol{\tau},$$

$$(-\kappa_{ss}\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{p}_{ss}]_{ss} + 3\kappa_s\kappa\boldsymbol{\tau} + \kappa^2\boldsymbol{p}_{ss} = [\boldsymbol{p}_{ss}]_{ss} + 3[\boldsymbol{p}_{ss}]_s\boldsymbol{p}_{ss}^T\boldsymbol{\tau} + \kappa^2\boldsymbol{p}_{ss}$$

などの関係がある．したがって，障害物を考慮して，殻の変形を表す支配方程式は

$$\sigma\ \chi_{p^2>0}\boldsymbol{p}_{tt}=\{\frac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss}+\frac{1}{2}(\kappa^2-\kappa_0^2)\kappa)\chi_{p^2>0}-k\rho(\rho-1)\kappa\chi_{p^2>0}\}\boldsymbol{\nu}$$
$$+\frac{\rho}{h}(P_0+c_g(\frac{1}{V}-\frac{1}{V_0}))\chi_{p^2>0}\boldsymbol{\nu}+k\rho\rho_s\chi_{p^2>0}\boldsymbol{\tau}-g\sigma\ \chi_{p^2>0}\boldsymbol{e}_2 \quad \text{in} \quad (t,\ \theta)\in\{\ p^2>0\}$$

となる．よって，$\{\ p^2\le 0\}$ 上では，

$$\frac{1}{24}kh^2\kappa_0^2\rho\kappa\boldsymbol{\nu}=0$$

である．

次に，action integral に対して，体積保存条件

$$\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{p}(t,\theta)A\boldsymbol{p}_\theta^T(t,\theta))\chi_{p^2>0}(t,\theta)d\theta=0 \qquad \forall t\in(0,\ T)$$

を課して第一変分を計算する（この場合，$E_g(\boldsymbol{p})$ は除外する）．このとき，体積保存の制約付きのテスト関数を使わなければならない．ここでは，テスト関数 $\boldsymbol{p}+\varepsilon\boldsymbol{\phi}$ に対して，第一次近似で，体積保存する摂動を摂動パラメータを ε として

$$\boldsymbol{p}^\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon\omega}}(\boldsymbol{p}+\varepsilon\boldsymbol{\phi}) \qquad \text{ここで，}\ \omega=\frac{1}{V}\int_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\nu}\ ds$$

で与える．第一変分の計算結果，支配方程式（運動方程式）は，殻(shell)が自由に動く部分で

$$\sigma\ \boldsymbol{p}_{tt}=\{\frac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss}+\frac{1}{2}(\kappa^2-\kappa_0^2)\kappa)-k\rho(\rho-1)\kappa+\rho\lambda\}\boldsymbol{\nu}$$
$$+k\rho\rho_s\boldsymbol{\tau}-g\sigma\ \boldsymbol{e}_2 \qquad (t,\ \theta)\in(0,T)\times[0,2\pi]\bigcap\{\ p^2>0\}$$
$$\lambda=\frac{1}{2V}\int_{\boldsymbol{p}}\{\frac{\sigma}{\rho}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}_{tt})+(k(\rho-1)-\frac{1}{24}kh^2(\kappa^2-\kappa_0^2))+\frac{\sigma}{\rho}g\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_2\}ds$$
$$\kappa=0 \quad \text{in} \quad (0,T)\times[0,2\pi]\bigcap\{\ p^2\le 0\}$$

として得ることができる．ここで，λ は体積保存条件から導かれる Lagrange multiplier と考えることができる．したがって，障害物を考慮した支配方程式は

$$\sigma\ \chi_{p^2>0}\boldsymbol{p}_{tt}=\{\frac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss}+\frac{1}{2}(\kappa^2-\kappa_0^2)\kappa)\chi_{p^2>0}-k\rho(\rho-1)\kappa\chi_{p^2>0}+\rho\lambda\chi_{p^2>0}\}\boldsymbol{\nu}$$
$$+k\rho\rho_s\chi_{p^2>0}\boldsymbol{\tau}-g\sigma\ \chi_{p^2>0}\boldsymbol{e}_2 \qquad \text{in} \quad (t,\ \theta)\in\{\ p^2>0\}$$

となる．得られた支配方程式は，弾性体の振動項が含まれるので双曲型には分類されないことに注意する．

次に，得られた支配方程式は偏微分方程式の形で解くのは困難であることから，数値解法としての変分法に基づく手法を導入する．体積保存条件下で，障害物を考慮した場合に対して，双曲型離散勾配流法の適用を考える．すなわち，時間区間 $(0,\ T)$ で時刻 $t=n\Delta t\ \ (n=0,1,2,3,.....,N\ )$，$\Delta t=T/N$ とする．$\boldsymbol{p}^0$ を初期データとし，$\boldsymbol{p}^1$ を $\boldsymbol{p}^1(\theta)=\boldsymbol{p}^0(\theta)+\boldsymbol{p}_t(0,\theta)\Delta t$ と近似する．残りの $\boldsymbol{p}^n$（$n=2,3,.....,N$）は，汎関数

$$J_n(\boldsymbol{p})=\frac{1}{2}h\sigma\left|\boldsymbol{q}_\theta\right|\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{p}\cdot(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}-2\boldsymbol{p}^{n-1}+\boldsymbol{p}^{n-2})}{(\Delta t)^2}\chi_{p^2>0}d\theta+E_e(\boldsymbol{p})+E_p(\boldsymbol{p})$$

を帰納的に最小化関数列として決定する．体積保存条件下で最小化する場合の許容関数

集合は

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{p} \in [H^2_{per}((0,2\pi))]^2;\ \mathrm{p}^2 \geq 0,\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{p}\cdot A\boldsymbol{p}_\theta^T d\theta = V\}$$

となる．すなわち，$\boldsymbol{p}^n$ は $\mathcal{K}$ 上の汎関数 J_n の minimizer として帰納的に求めることになる．J_n の minimizer $\boldsymbol{p}$ が $\{p^2 > 0\}$ 上で，以下の式を満たすことは容易に確かめることができる．

$$\sigma\ \frac{\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2}}{(\Delta t)^2} = \{\frac{1}{12}kh^2\rho(\kappa_{ss} + \frac{1}{2}(\kappa^2 - \kappa_0^2)\kappa) - k\rho(\rho-1)\kappa + \rho\lambda\}\boldsymbol{\nu}$$

$$+ k\rho\rho_s\boldsymbol{\tau} - g\sigma\ \boldsymbol{e}_2$$

$$\lambda = \frac{1}{2V}\int_p \{\frac{\sigma}{\rho}(\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2}}{(\Delta t)^2}) + k(\rho-1) - \frac{1}{24}kh^2(\kappa^2 - \kappa_0^2) + \frac{\sigma}{\rho}g\boldsymbol{p}^2\}ds$$

この方程式は，体積保存条件下で，障害物を考慮しない場合の殻(shell)が自由に動く部分の連続時間系の支配方程式の $\boldsymbol{p}_{tt}$ を差分化した式となっている．

また，この方程式は，障害物を考慮しない場合の次の汎関数

$$J_n(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2}h\sigma\ |\boldsymbol{q}_\theta|\int_0^{2\pi}\frac{|(\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2})\ |^2}{(\Delta t)^2}d\theta + E_e(\boldsymbol{p}) + E_p(\boldsymbol{p})$$

を定義し，体積保存条件下で，第一変分を計算することによって導くことができる．よって，この汎関数を最小にする解は連続時間系の支配方程式の近似解であることが知れる．すなわち，近似解は差分化された汎関数を最小化する解を探索することによって得ることができる．この方法は，離散勾配流法または Rothe の方法と呼ばれ，本論文の数値計算法として適用できる．探索アルゴリズムは，制約条件を考慮し，２分法などを利用した最急降下法で実現できる．

論文では，２つの例題に適用した数値シミュレーションの結果が示されている．最初に，平面に弾性体リングを打ちつける例題を扱い，内部のガスの圧縮によるエネルギーを考慮した場合の数値シミュレーション結果を示し，実験結果の振る舞いに非常によく類似していることが確かめられている．次に，体積保存条件を考慮した場合の数値シミュレーションを行い，リングの変形が少なく，跳ね返りの様子が見て取れる結果が示されている．さらに，内部ガスの圧縮のエネルギーに影響する係数を非常に大きくしていくと体積保存条件付の数値計算結果に近づいていく傾向にあることが示されている．これらの結果を示す図は，本紙面の都合上割愛させていただく．

次に，体積保存条件を課した場合に対して，弾性体リングの自由落下の例を数値シミュレーションした結果が示されている．パラメータ $k_s = kh$，$k_b = kh^3/12$ を与えることによって，柔軟なリングからやや固めのリングに対してまで，落下，衝突による変形（歪み），さらには跳ね返り（反発）の状況がシミュレーションできることが示されている．これらの結果を示す図も紙面の都合上割愛させていただく．

モデルの妥当性の検討は三次元モデルの開発を待たなければならないが，本論文の手法は数値シミュレーションの結果からボールバウンス問題（落下・衝突・反発を含む）に十分応用できることが確信できた．

したがって，この問題の応用，拡張性（三次元空間への拡張，プログラミングの効率化など）を考慮した場合，行列計算による展開が有用であるとの観点から，弾性体リングの位置ベクトルを行列展開のし易さのために，列ベクトル(column vector)で与え，$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{p}_{ss}$ を用いて弾性エネルギーを新しく次のように２つ定義し，体積保存問題の解析お

よび数値シミュレーションを行った．

$$E_{e1}(\boldsymbol{p}) = \frac{k_b}{2}\int_0^{2\pi} \left|\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0\right|^2 \left|\boldsymbol{p}_\theta\right| d\theta + \frac{k_s}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\left|\boldsymbol{p}_\theta\right|}{\left|\boldsymbol{q}_\theta\right|} - 1\right)^2 \left|\boldsymbol{q}_\theta\right| d\theta$$

$$E_{e2}(\boldsymbol{p}) = \frac{k_b}{2}\int_0^{2\pi} \left|\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0\right|^2 \left|\boldsymbol{p}_\theta\right| d\theta + \frac{k_s}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\left|\boldsymbol{p}_\theta\right|}{\left|\boldsymbol{q}_\theta\right|} - 1\right)^2 \left|\boldsymbol{p}_\theta\right| d\theta$$

すなわち，次の汎関数

$$J_n^1(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} h\sigma \left|\boldsymbol{q}_\theta\right| \int_0^{2\pi} \frac{|\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2}|^2}{(\Delta t)^2} \chi_{p^2>0} d\theta + E_{e1}(\boldsymbol{p}) + E_p(\boldsymbol{p})$$

$$J_n^2(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2} h\sigma \left|\boldsymbol{q}_\theta\right| \int_0^{2\pi} \frac{|\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{p}^{n-1} + \boldsymbol{p}^{n-2}|^2}{(\Delta t)^2} \chi_{p^2>0} d\theta + E_{e2}(\boldsymbol{p}) + E_p(\boldsymbol{p})$$

を集合

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{p} \in [H_{per}^2((0, 2\pi))]^2;\ \mathrm{p}^2 \geq 0,\ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \boldsymbol{p} \cdot A\boldsymbol{p}_\theta^T d\theta = V\}$$

上で帰納的に最小化することによって得られる minimizer 列が数値解となる．数値シミュレーションは, 弾性体リングの自由落下の例に適用されている．k_b と k_s を変化させ, 汎関数 J_n^1 および汎関数 J_n^2 それぞれで得られた数値解を比較した結果が示されている．これらの結果は，いずれも先の障害物を考慮した汎関数 J_n の数値解の結果と遜色がないことも示されている．最後に，パラメータを選択することによって得られた弾性体リングの数値シミュレーション結果を図 1 から図 4 に示す．ここに示されている図は，複数回のバウンドの状況を見ることができるよう, 紙面の都合上簡易的な表示としている．ボールバウンシングの状況が模擬できていることが知れる．

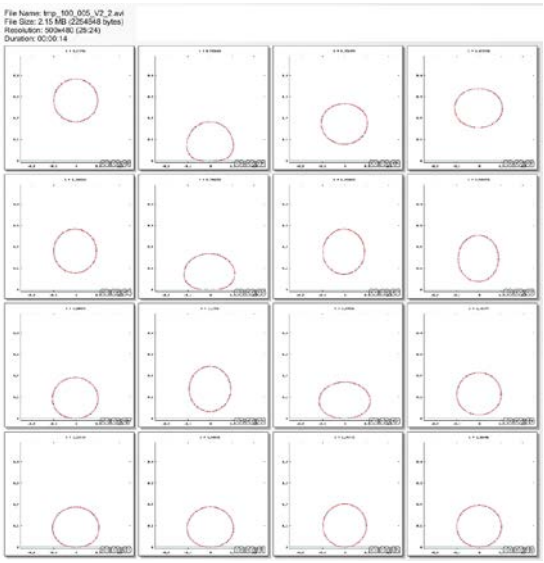

図 1: J_n^1 の場合: $(k_s,\ k_b) = (100,\ 0.05)$

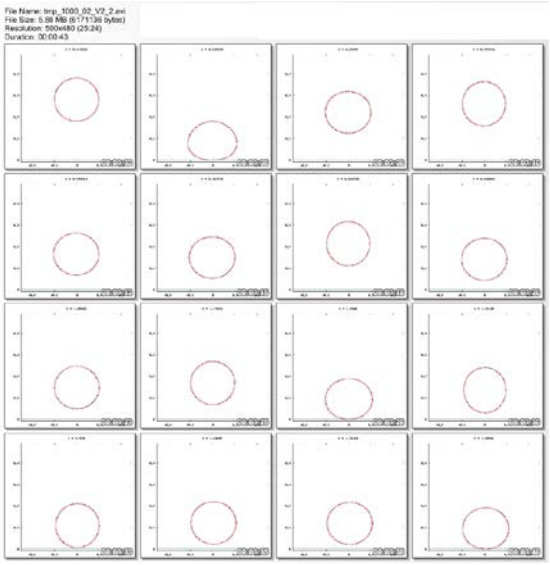

図 2: J_n^1 の場合: $(k_s,\ k_b) = (1000,\ 0.2)$

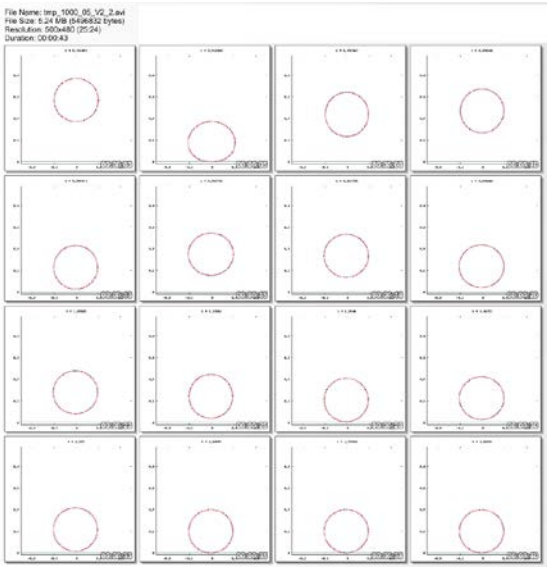

図 3: J_n^1 の場合: $(k_s,\ k_b) = (1000,\ 0.5)$

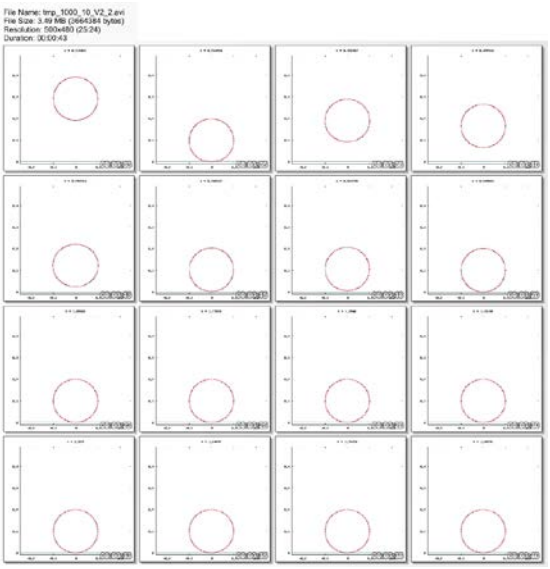

図 4: J_n^1 の場合: $(k_s,\ k_b) = (1000,\ 1)$

平成２７年　２月　４日

学位論文審査報告書（甲）

１．学位論文題目（外国語の場合は和訳を付けること。）

離散勾配流を用いたボールバウンスの数理解析

２．論文提出者　(1) 所　　属　数物科学　　専攻

(2) 氏　　名　菊田　章（ふりがな：きくた　あきら）

３．審査結果の要旨（600～650 字）

菊田章氏は2009年10月に金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻に社会人学生として入学して現在に到っている。本論文ではボール（中空の弾性体の shell）が平らな障害物に衝突し局所的な反発係数が０で、変形の弾性エネルギーによって跳ね返る問題を取り扱っている。弾性エネルギーを計算する場合、ボールの厚みは考慮しているが運動の計算の際には無限に薄いという近似を行っている。さらにボールの中に気体や液体を封入して、気体エネルギーや体積保存制約条件などを付けることができるモデルを構築している。この問題は、体積保存条件を課すと Lagrange 乗数が出現する非局所問題となる。そのため偏微分方程式での取り扱いが困難で、変分問題を出発点としている。エネルギーから action を定義し第一変分を取ることによって運動方程式を求めているが、離散 Lagrangean あたる離散勾配流を導入し変分の最小化問題に持ち込んで数値解析を行う方法を開発した。このため、大域的量が許容関数空間の制限だけで計算できるようになり、十分に有用な方法論となっている。数値計算は２次元で行っているものの、すべての計算方法は３次元にそのまま拡張できるものとなっている。また、ボールの回転も容易に表現することができて、将来、バウンスを伴う現象の有力な計算方法となり得る。これらの結果は原著論文１報にまとめられ国際誌に掲載されている。

以上により、本論文は、博士（理学）を授与するに値するものと判断した。

４．審査結果　(1) 判　　定（いずれかに○印）　（合　格）・　不合格

(2) 授与学位　博　士（　理学　）