

Cost-Volume-Profit Analysis in Discrete-Time Stochastic Process

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/27753

確率的CVP分析

—— 離散時間モデル ——

佐 藤 清 和

目 次

- I はじめに
- II 単期間モデル
- III 多期間モデル
- IV 連続時間モデルへの収束
- V 問題と課題

I はじめに

Jaedicke and Robichek [1964] を嚆矢とする、いわゆる不確実性下におけるCVP分析(あるいは確率的CVP分析)に関する研究成果は、1960年代から1980年代にかけて多数報告された (Ferrar. et. al., [1972], Buzby [1974], Liao [1975], Hilliard and Leitch [1975], Kottas and Lau [1978], Ismail and Lounderback [1979], Shih [1979], Chen [1980], Constantinides. et.al., [1981], Karnari [1983], Kim, et.al. [1996], Yunker [2001])。

これらの先行研究では、一定時点における操業度(あるいは売上高)を確率変数とする確率的CVP分析が検討された。しかしながら、これまでCVPの時系列に付随する不確実性に対応した動学的CVP分析が検討されることはなかった。

佐藤 [2010] では、売上高の時系列が幾何ブラウン運動に従うと仮定された連続時間型の確率的CVPモデルが提示され、その解析解は不確実性下における予測利益を与えることが示された。しかしながら、そもそも会計数値とは特定の会計期間ごとに測定される離散値であることから、本稿では離散時間

型の確率過程の1つである2項過程に従う確率的CVPモデルを提示する。

その上で、経過時間 $\Delta t = t/n$ において、 $n \rightarrow \infty$ とおくことにより、結局のところ、同モデルが幾何ブラウン運動に従う連続時間型のCVPモデルに収束することを示す。これにより連続時間型の確率的CVPモデルに離散値である会計数値を適用することの理論的正当性が与えられる¹⁾。

一方で2項過程の確率的推移構造は単純であり、連続時間の確率過程に比べるとより直観的な理解が可能となるため、CVPの時系列データが有する期間構造が明確化される。したがって、任意の推移確率や単位会計期間の設定が可能となり、これにより確率的CVP分析に基づいた利益シミュレーションの妥当性や実用性が向上する、という利点も期待できる。

本稿の構成は、つぎのとおりである。第Ⅱ節では、もっとも単純な1期間の2項確率過程を用いて、売上高の変動とそれに伴う営業損益の動態を記述する基本モデルを提示する。第Ⅲ節では、前節の基本モデルを2期間に拡張した上で、これをさらに n 期間まで拡張し一般化する。なお、この際に損益分岐点の前後において原価態様が非対称に変化するという仮定を導入する。第Ⅳ節では、前節の n 期間離散時間モデルが³、連続時間モデルをその一部として含むものであることを示す。最後は、本稿の問題点と今後の課題である。

Ⅱ 1 期間モデル²⁾

売上高、貢献利益率ならびに固定費を、それぞれ S 、 m および F とおくと、営業利益 π は次式で与えられる。

$$\pi = mS - F \quad [1]$$

ただし、 $m = 1 - v$ である。ここで v は変動費率であり、変動費を V とすると $v = V/S$ である。また損益分岐点売上高 B は、 $B = F/m$ で与えられるから、 B を用いれば[1]は次式のように表わされる。

$$\pi = m(S - B) \quad [2]$$

ここで、当期末の売上高 S が前期末の売上高を上回る確率を q 、またその

時の S の上昇率を u' とおく。反対に S が前期末の売上高を下回る確率を $1-q$ とおき、その下落率を d' とおく。これより S は確率 q で $(u'+1)S=uS$ になるか、あるいは確率 $1-q$ で $(1-d')S=dS$ になる。以上より、当期末における営業損益 π は、次式で与えられる。

$$\begin{cases} \pi_u = umS - F \\ \pi_d = dmS - F \end{cases} \quad [3]$$

[3] の 2 式より、 $m = (\pi_u - \pi_d) / (u - d)S$ および $F = (d\pi_u - u\pi_d) / (u - d)$ であるから、これらを [1] に代入することによって次式が得られる。

$$\pi = \frac{(1-d)\pi_u - (1-u)\pi_d}{u-d} \quad [4]$$

ここで、 $p = (1-d)/(u-d)$ とおくと、 $1-p = (u-1)/(u-d)$ であるから、[4] は次式のように整理される。

$$\pi = p\pi_u + (1-p)\pi_d \quad [5]$$

ここで、 $0 < d < 1 < u$ である。したがって、[5] の p には疑似確率として、確率関数 $p_k = P(X=k) = {}_nC_k p^k \cdot q^{n-k}$ ($k=0, 1, \dots, n$, $0 < p < 1$, $p+q=1$) で表わされる 2 項分布 $B(n, p)$ と同様の離散型確率分布に従う、という性質が付与される。

図 1 には、以上の性質を有する確率過程にしたがう、1 期間における売上高および営業損益の発生構造が示されている。また図 2 は 1 期間モデルの数値例である。ここでは、まず売上高 $S=80$ 、貢献利益率 $m=0.4$ (変動費率 $v=0.6$)、および固定費 $F=28$ より、損益分岐点 $B=28/0.4=70$ が求められる。

ここで売上高は期首の 80 から 20% だけ上昇し $S=96$ になるか、または 20% だけ下落し $S=64$ になると予想されている。これらの売上高の予想に対応する営業損益は、[2] を用いてそれぞれ営業利益 10.4 ないし営業損失 -2.4 と求められる。その上で、これらの営業損益の上昇確率 p と下落確率 $1-p$ を用いて、期首において予測される期末の営業利益 4 が求められる。

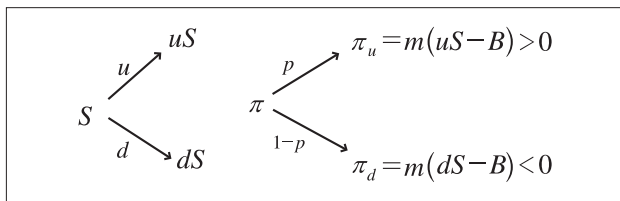


図1 1期間における売上高と営業損益

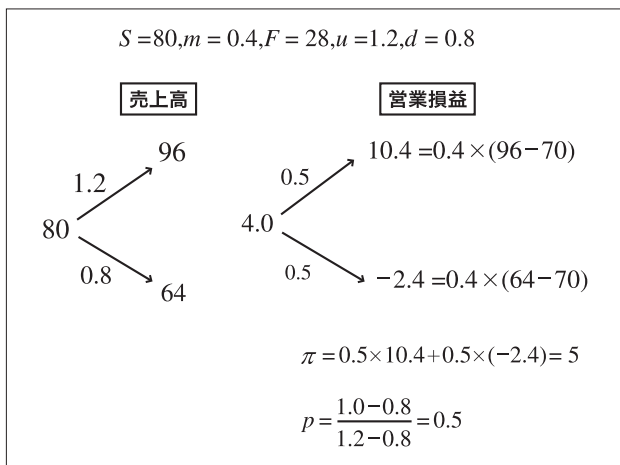


図2 1期間モデルの例

III 多期間モデル

本節では、前節と同様に売上高の時系列を2項過程に従う離散型確率変数とする2期間および n 期間のCVPモデルを提示し、期末における予測営業損益を算定する。このことは、離散型の確率過程に基づくCVPモデルを、次節において連続時間型の確率過程モデルに拡張することの準備作業でもある。

(1) 2期間モデル

ここでは売上高の変動が、1期間モデルと同様の確率過程に従うとした場合の予想損益に関する2期間モデルを提示する。まず1期間経過後に実現される営業損益は、次式のとおりである。

$$\begin{cases} \pi_u = p\pi_{uu} + (1-p)\pi_{ud} \\ \pi_d = p\pi_{ud} + (1-p)\pi_{dd} \end{cases} \quad [6]$$

[6]の結果を[5]に代入することにより次式を得る。

$$\pi = p^2\pi_{uu} + 2p(1-p)\pi_{ud} + (1-p)^2\pi_{dd} \quad [7]$$

[7]で示された営業損益に関する確率過程の構造および具体例は、それぞれ図3ならびに図4に示されている。

図4の例では、第2期末の売上高(115.2と76.8の場合)に対応する営業損益

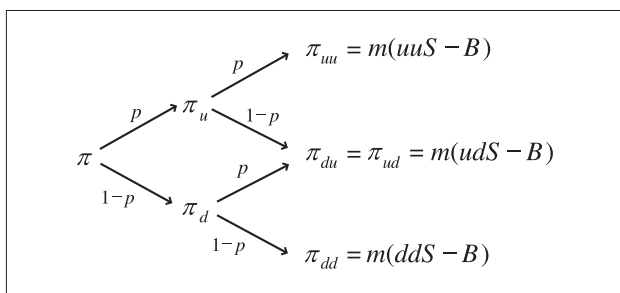


図3 2期間における売上高と営業損益

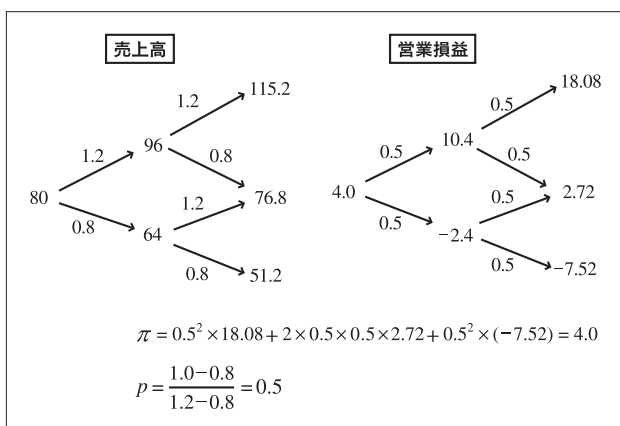


図4 2期間モデルの例

(18.08と2.72)から、第1期末の営業損益10.4が求められる。このように営業損益は売上高の時系列とは逆方向に計算されることに注意が必要である。

(2) n 期間モデル

数学的帰納法を用いれば、[7]より n 期間後における営業損益が次式のとおりに求められる。

$$\pi_n = \sum_{i=0}^n {}_nC_i p^{n-i} (1-p)^i \pi_{u^{n-i}d^i} \quad [9]$$

ただし、 ${}_nC_i = n!/i!(n-i)!$ 、 $n-i = uu \cdots u$ 、 $i = dd \cdots d$ より $\pi_{u^{n-i}d^i} = \pi_{uu \cdots u dd \cdots d}$ である。

なお、全期間 n を通じて最終的に営業利益 ($0 < \pi_a$) が生じる場合、すなわち売上高 S が損益分岐点 B を超過する最小の期間数を a (正の整数)、また全期間 n を通じて最終的に営業損失 ($\pi_b < 0$) が生じる場合、すなわち、 S が B より下落する最小の期間数を b とすると、次の2式が得られる。

$$\begin{cases} \pi_a = m(u^a d^{n-a} S - B) > 0 \\ \pi_b = m(u^{n-b} d^b S - B) < 0 \end{cases} \quad [10]$$

ここで、 $0 < \pi_a$ の場合は $mB < mu^a d^{n-a} S$ 、また $\pi_b < 0$ の場合は $mu^{n-b} d^b S < mB$ であるから、それぞれの対数をとれば、 $\log mB < \log mu^a d^{n-a} S$ および $\log mu^{n-b} d^b S < \log mB$ を得る。その上で、 $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ と定義すれば、営業利益が生じる最小期間 a は次式で与えられる。

$$a = \left\lceil \log \frac{B}{d^n S} / \log \frac{u}{d} \right\rceil + 1 \quad [11]$$

さらに営業損失が生じる場合の売上高の上昇期間の最大値を b とすれば $0 \leq b < a$ であるから、 n 期末の営業損益 π は、次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \pi &= m \sum_{i=0}^n {}_nC_i p^{n-i} (1-p)^i (u^{n-i} d^i S - B) \\ &= m \left\{ \sum_{i=b}^n {}_nC_i p^{n-i} (1-p)^i (u^{n-i} d^i S - B) + \sum_{i=a}^n {}_nC_i p^{n-i} (1-p)^i (u^i d^{n-i} S - B) \right\} \end{aligned} \quad [12]$$

(3) 原価態様の非対称性

CVP分析では、一般にCVPの項目相互間に線形性の関係が仮定される。具体的には、貢献利益率や固定費額は定数と見なされるため、[1]は線形の1次式で与えられる。このような線形性の仮定は、CVP分析に実用上の利便性や簡便性を与える役割を果たしている。ただし、線形性の仮定が成立するのは、原価態様としての変動費率や固定費額が定数と見なせる、いわゆる操業可能範囲である (Kaplan[1982])。

確かに長期にわたるCVP分析では、原価態様の変動が大きくなることが予想されるため、CVP分析の計算精度は後退する。しかしながら、たとえ短期間の分析であっても、急激な経営環境の変動は原価態様に対して大きな影響を与えるものと考えられる。すなわち、操業度の代理変数である売上高が急激に変動するような場合には、原価態様にもまた大きな変化が生じると考えられる、ということである。

このような売上高の変動の中でも、とりわけ損益に及ぼす影響という点で注意を要するのは、売上高が損益分岐点の近傍に位置する場合である。このような売上高が実現した場合、営業活動の不確実性を示す指標のひとつであるオペレーティング・レバレッジ度(DOL)は急激な変動を見せる。ここで、オペレーティング・レバレッジ度とは、売上高に対する営業利益の弾力性であり、次式で与えられる (佐藤・佐藤[2000])。

$$DOL = \frac{d\pi}{dS} \bigg/ \frac{\pi}{S} = \frac{\pi + F}{\pi} \quad [13]$$

これより営業損益が小さいほど、すなわち売上高が損益分岐点に近づくほど、つまり変動費率の上昇(貢献利益率の減少)や固定費の増加による利益減少にともなって、DOLで示される営業損益の変動リスクは大きくなる、ということが分かる。

すなわち、営業損益とは、まさに変動費および固定費の発生構造としての原価態様に依存するCVP要素に他ならない。したがって、原価態様の線形性が保持される正常操業圏を前提として算出される損益分岐点の値は、営業損益の変動リスクが大きくなる損益分岐点近傍において、実際よりも低水準を

示すと考えるのが妥当である。

たとえば、操業度が損益分岐点を下回るような操業水準にある企業について考えてみよう。このような企業であっても、原材料や製造経費あるいは契約済みの販促費などからなる変動費は持続的に発生するものと考えられる。このような変動費の発生に係る慣性力によって、持続的な変動費率の増大圧力が生じ、その結果として損益分岐点は上昇すると考えられるのである。

本稿では、以上のような損益構造を原価態様の非対称性と呼び、非対称係数： $k(S/B)$ を用いて定義する。ここで、 S/B は損益分岐点比率の逆数であり、 k は任意の定数($0 < k \leq 1$)である。その上で次のように2つの採算状況を想定し、売上高が損益分岐点を下回るような採算状況では、この非対称係数が適用されることとする。

$$\begin{cases} B \leq S \rightarrow m \\ S < B \rightarrow m_d = k(S/B)m \end{cases} \quad [14]$$

すなわち、 $B \leq S$ の場合は正常操業圏内の貢献利益率である m が用いられるが、一方、 $S < B$ の場合には売上高の減少は S/B を下落させることから、非対称係数が加味された貢献利益率 m_d は、これにともない減少する。

図5は、固定費80、損益分岐点100、貢献利益率0.8の場合の貢献利益線を示している。図中の実線は、いわゆる正常操業圏における線形の原価態様に基づく貢献利益線である。これに対して、 $S < B$ の場合には原価態様が変わることにより、貢献利益線は実線の曲線および破線の曲線のような形状をとる。前者には $k=1.0$ 、また後者には $k=0.78$ という値が与えられている。

このような非対称係数を仮定することで、[12]における n 期の予測営業損益は、次式のとおりに書き換えられる。

$$\begin{aligned} \pi = m_d \sum_{i=b}^n {}_n C_i p^{n-i} (1-p)^i (u^{n-i} d^i S - B) \\ + m \sum_{i=a}^n {}_n C_i p^{n-i} (1-p)^i (u^i d^{n-i} S - B) \end{aligned} \quad [15]$$

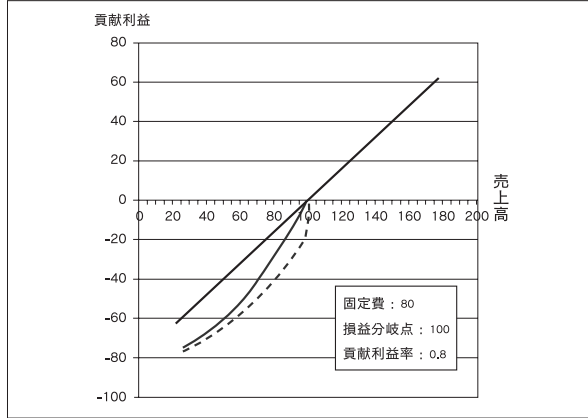


図5 原価態様の非対称性：数値例

ここで、さらに $up=p'$ とおくことにより次式を得る。

$$\begin{aligned}\pi &= m_d S \Phi(b; n, p') - B \Phi(b; n, p) \\ &\quad + m S \Phi(a; n, p') - B \Phi(a; n, p)\end{aligned}\quad [16]$$

ただし、以下の通りである。

$$0 \leq b < a,$$

$$\Phi(b; n, p') = \sum_{i=b}^n C_i p'^{m-i} (1-p')^i,$$

$$\Phi(a; n, p') = \sum_{i=a}^n C_i p'^{m-i} (1-p')^i,$$

$$p = \frac{1-d}{u-d}, \quad p' = up, \quad a = \left\lceil \log \frac{B}{d^n S} / \log \frac{u}{d} \right\rceil + 1.$$

IV 連続時間モデルへの収束

本節では[16]の2項過程に従うCVPの離散時間モデルが³、佐藤[2010]で示された連続時間モデルに収束すること、言い換えれば前者は後者を特別の場合として含むものであることを示す。

(1) 2項過程の収束

$S_n = S_0 u^j d^{n-j}$ とおき, j を n 期間における売上高の上昇回数を表わす確率変数とする。1 期間において, 売上高が上昇する確率を p とすると j の平均値ならびに分散は, それぞれ $E(j) = np$ および $\text{Var}(j) = np(1-p)$ で与えられる。

したがって,

$$\log \frac{S_n}{S_0} = j \log \frac{u}{d} + n \log d \quad [17]$$

より, $E(S_n / S_0) = E(j) \log(u/d) + n \log d = np \log(u/d) + n \log d$ を得る。

したがって, 次式を得る。

$$E\left(\log \frac{S_n}{S_0}\right) = n \mu_p \quad [18]$$

ただし, $\mu_p = p \log(u/d) + \log d$ である。

さらに $\text{Var}\{\log(S_n / S_0)\} = \{\log(u/d)\}^2 \cdot \text{Var}(j) = \{\log(u/d)\}^2 \cdot np(p-1)$ より, 次式を得る。

$$\text{Var}\left(\log \frac{S_n}{S_0}\right) = n \sigma_p^2 \quad [19]$$

ただし, $\sigma^2 = \{\log(u/d)\}^2 p(1-p)$ である。

また, そもそも前出の a とは次式を満たすものであった。

$$a = \text{Min}\{j \mid Su^j d^{n-j} - B > 0, j \in \mathbb{N}\} \quad [20]$$

これより, 次式が得られる。

$$a-1 = \left\lceil \log \frac{B}{d^n S} / \log \frac{u}{d} \right\rceil - \varepsilon \quad (0 \leq \varepsilon < 1) \quad [21]$$

なお, $Su^j d^{n-j} - B > 0$ より j は次式の値をとる。

$$\log \frac{B}{Sd^n} / \log \frac{u}{d} < j \quad [22]$$

ここで, [21]の左辺を次式の通り同値変形する。

$$1 - \Phi(a; n, p) = P(j \leq a-1) = P\left(\frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad [23]$$

[23]において, 単位期間を $t \rightarrow 0$ とした場合,

$$\frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightarrow N(0,1) \quad [24]$$

および,

$$\frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightarrow \sigma\sqrt{t} - x \quad [25]$$

が成り立つことから, 次式が導かれる³⁾。

$$1 - \Phi(a; n, p) \rightarrow N\left(\sigma\sqrt{t} - x\right) \quad [26]$$

この結果は, 次式と同値である。

$$\Phi(a; n, p) \rightarrow N\left(x - \sigma\sqrt{x}\right) \quad [27]$$

(2) 連続時間モデルへの収束

ここで, 佐藤[2010]で提示されたCVPに関する連続時間モデルを再掲しておく。ただし, 佐藤[2010]の段階では, 第Ⅲ節の(3)で示された原価値様の非対称性という仮定は考慮されていない。そのため, 本稿では改めてこの仮定を組み込んだ連続時間モデルを提示する。

以下で連続時間というのは, 確率変数である売上高の時系列 $S(t)$ が, 以下の3つの条件を満たすような確率過程(標準ブラウン運動)に従う状態を意味している。

(i) $S(0) \equiv 0$

(ii) 【独立増分の仮定】

$n+1$ の時間の分点 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ で作った変分が増分を有し、かつ $S(t_1) - S(t_0), S(t_2) - S(t_1), \dots, S(t_n) - S(t_{n-1})$ が独立事象である。

(iii) 【正規性の仮定】

(ii) の変分は、平均 $\mu=0$ 、分散 $\sigma^2=1$ の正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

条件 (ii) の独立増分の仮定とは、異なった会計期間に生じた売上高の変化分は相互に無関連であることを意味する。すなわち、当期末の売上高というのは、過去の互いに無関連な売上高変動額の累積であるということである。ただし、売上高の変化分が無関連なのであって、売上高そのものが無関連なのではない。また (iii) 正規性の仮定とは、 $\mu > 0$ ならば上向きのドリフト (傾向)、 $\mu < 0$ なら下向きのドリフトが時間を通じて存在することを意味している。

以上の仮定は、ドリフトがない状態 $\mu=0$ では、大小の互いに時間的に無関連な無数の原因による変化が現在まで積み重なり、その結果として現在の売上高が形成され、しかも売上高の変化の大きさは大略時間の経過量に比例する、という状況を想定したものということになる。その上で、これらの3つの仮定を満たす売上高の時系列が伊藤過程に従うと仮定することにより、次式のような売上高に関する確率微分方程式が得られる。

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \quad [28]$$

ここで μ および σ は、それぞれ売上高の瞬間的な期待成長率および標準偏差を表す定数である。また時系列 $Z(t)$ は、売上高の変化分 (増分) が標準ウィーナー過程 ($\mu=0, \sigma^2=1$ の標準ブラウン運動) に従う不確定要素であり、 $dZ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta Z = \sqrt{\Delta t}$ で表わされる。

さらに π は S および t の関数: $\pi = \pi(S, t)$ であるから、「伊藤の補題」により、微分 $d\pi$ は、次式に従うことになる (以下では (S, t) を省略している)。

$$d\pi = \left(\frac{\partial \pi}{\partial S} \mu S + \frac{\partial \pi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial \pi}{\partial S} \sigma S dZ \quad [29]$$

ここで、 $\partial \pi / \partial t$ は Ijiri [1982] および Ijiri [1989] で提示された income momentum

という測定属性に対応しており、会計数値の短期的変動の重要性を示唆する指標である。

一方、[1]より $\partial\pi/\partial S=m$ であるから、経過時間 $\Delta t=t/n$ ($0 < n < \infty$) における営業利益の変化量 $\Delta\pi$ は、次式で与えられる。

$$\Delta\pi = \frac{\partial\pi}{\partial S} \Delta S - F\Delta t \quad [30]$$

ここで、固定費 F は操業度の代理変数である売上高 S とは直接的な関連性を有せず、ただ経過時間 Δt (たとえば、月次の場合は $\Delta t=1/12$ 、また日次の場合は $\Delta t=1/365$) に比例して発生する。そこで $\Delta t \rightarrow 0$ として、[30] の ΔS および $\Delta\pi$ に、それぞれ[28]の dS および[29]の $d\pi$ を代入した上で、固定費 $F\Delta t$ を右辺に移項することにより、次式が得られる。

$$\left(-\frac{\partial\pi}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2\pi}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = Fdt \quad [31]$$

[31]の左辺には、売上高の不確実性を示す dZ が含まれていない。したがって、それは売上高の変動と無関連な固定費 Fdt に一致しているのである。

さらに、[30]より $Fdt = (\partial\pi/\partial S)dS - d\pi$ が得られるから、同式を[31]の右辺に代入した上で、両辺より dt を除去すると、次のような偏微分方程式が得られる。

$$\pi = \frac{\partial\pi}{\partial t} + \frac{\partial\pi}{\partial S} S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\pi}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \quad [32]$$

ここで、次のような変数変換を行なう。

$$\begin{cases} u = \log \frac{S}{B} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) \\ \tau = T-t \end{cases} \quad [33]$$

また[32]を、次式で置き換えておく。

$$\pi = e^{-\tau} y(u, \tau) \quad [34]$$

その上で[33]および[34]を用いて[32]の各項を計算すれば、次のような $y(u, \tau)$ を解とする2階の偏微分方程式(拡散方程式)が得られる⁴⁾。

$$y_{uu}(u, \tau) - \frac{2}{\sigma^2} y_x(u, \tau) = 0 \quad [35]$$

この偏微分方程式の損益分岐点 B を境界条件とする特殊解は、次式のとおりである⁵⁾。

$$\begin{aligned} \pi = m_d \left\{ S \cdot N \left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau} \right) - B e^{-\tau} \cdot N \left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right\} \\ + m \left\{ S \cdot N \left(-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau} \right) - B e^{-\tau} \cdot N \left(-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) \right\} \end{aligned} \quad [36]$$

ただし、 $N(\cdot)$ は標準正規分布の確率密度関数の積分である。また既述のとおり、[36]では貢献利益率に関する非対称係数 $m_d = km$ が採用されている。

ここで、[33]で変換された u を[36]に代入することによって次式が得られる。

$$\begin{aligned} \pi = m_d S \cdot N(-x) - e^{-t} B \cdot N(-x + \sigma\sqrt{t}) \\ + m S \cdot N(x) - e^{-t} B \cdot N(x - \sigma\sqrt{t}) \end{aligned} \quad [37]$$

ただし、以下のとおりである。

$$\begin{aligned} x = \left\{ \log(S/B) + (r + \sigma^2/2)t \right\} / \sigma\sqrt{t}, \\ N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \end{aligned} \quad [38]$$

すでに[27]により、[16]の $\Phi(a; n, p)$ は[38]の $N(x - \sigma\sqrt{t})$ に収束することが示されているが⁶⁾、同時に $\Phi(a; n, p') \rightarrow N(x)$ 、 $\Phi(b; n, p) \rightarrow N(-x + \sigma\sqrt{t})$ 、 $\Phi(b; n, p') \rightarrow N(-x)$ もまた同様の手順で証明することが可能である。

すなわち、[16]で示された2項確率過程に従う離散時間型のCVPモデルとは、[36]ないし[37]で示された幾何ブラウン運動に従う連続時間型のCVPモデルに収束する、ということである。言い換えれば、[16]の離散時間のCVP

モデルとは、佐藤[2010]で示された連続時間型のCVPモデルを特別の場合として含むものに他ならない、ということである。

V 問題と課題

本稿では、売上高の時系列を2項過程にしたがう確率過程とみなすことによって、CVPモデルを離散時間型に動学化した上で、同モデルが幾何ブラウン運動を仮定された連続時間モデルに収束することを示した。

本稿の前半では、売上高の期間変動を毎期の上昇率と下落率を用いて記述することにより、これと期間対応する営業損益の時系列もまた2項過程と同様の離散型確率過程として記述することが可能であることを示した。このような単純な確率過程を導入することは、確率的CVP分析の動学化の作業に見通しの良さを与えるとともに、同モデルによる利益予測などのシミュレーションの柔軟性や実用可能性を向上させる、という点でも意義を有するものと考えられる。

また、本稿の後半では、離散時間型の確率的CVPモデルが³、佐藤[2010]で提示された連続時間モデルに収束することを示した。連続時間の確率過程を幾何ブラウン運動等の伊藤過程として記述し、その微分を「伊藤のレンマ」によって導出するという方法は、確率解析の応用面における強力かつ洗練された方法である。しかしながら、そもそもCVPの時系列とは会計期間ごとに離散的に測定された会計数値からなり、これらをそのまま連続時間モデルに適用することについては、理論的整合性はもとより分析手法としての実用可能性という視点からも慎重な検討を要する課題と考えられる。その点、本稿における確率的CVPモデルに係る収束の議論は、決算周期の短縮化といった会計実務上の制約条件次第では、会計数値としてのCVP要素を連続時間モデルに適用することの理論的正当性の一端を示した、という点で意義を有するものと考えられる。

ただし、本稿の離散時間型CVPモデルが大きな問題点を孕んでいることもまた確かである。すなわち、2項過程に従う確率モデルでは、売上高の上昇率と下落率によって毎期一定の確率分布が付与され、それらの値に基づいて営業損益が予測される。しかしながら、これらの数値は過去の趨勢や経営者の予想ないしは裁量などといった必ずしもCVPの分析枠組みとは関連性の無い、

いわゆる外的要因に基づいて決定される。このような外部依存性は、当該CVPモデルによって予測される営業損益の客観性を損なう要因となりうる。

同様の問題は、原価態様にかかわる非対称係数をいかに選定するか、という問題にもそのまま当てはまるものである。

以上の問題点は、CVP分析に確率過程を導入することから発生する計算構造上の問題点であるというよりも、事業特性や経営計画などといった企業内外の諸要因に起因して生じるものであるから、CVPの各要素がそれらの要因とどのような関連性を有するのかについてさらなる検討を要する課題である。

その一方で確率過程が導入されたCVP分析の方法を、さらに理論面および計算面から整備しつつ、これを発展させることもまた今後の課題として重要である。たとえば、本稿のような単純な2項過程に代えてジャンプ過程(ポアソン過程)を導入することによって、景気変動や季節効果に起因する売上高の急激な増減変動を取り込んだ、さらに実用性を高めた確率的CVP分析の方法を提示することなどは、その好例となるであろう。

APPENDIX

以下では[26]が成立することを証明する。このためには、[24]および[25]を証明すればよい。

そもそも、 $1-\Phi(a;n,p) \rightarrow 1-N(x-\sigma\sqrt{t}) = N(\sigma\sqrt{t}-x)$ が成り立つことから、ここでは $1-\Phi(a;n,p) \rightarrow N(\sigma\sqrt{t}-x)$ についてのみ示す。これが証明されれば、 $\Phi(a;n,p) \rightarrow N(x-\sigma\sqrt{t})$, $\Phi(a;n,p') \rightarrow N(x)$, $\Phi(b;n,p) \rightarrow N(-x-\sigma\sqrt{t})$, および $\Phi(b;n,p') \rightarrow N(-x)$ は自明である。

そもそも、 $1-\Phi(a;n,p) \rightarrow N(\sigma\sqrt{t}-x)$ が成立するためには、[24]より、 $(j-np)/\sqrt{np(1-p)} \rightarrow N(0,1)$ および[25]の $(a-1-np)/\sqrt{np(1-p)} \rightarrow \sigma\sqrt{t}-x$ が成立することが示されればよい。そこで、まず[17]を用いることによって、 $(j-np)/\sqrt{np(1-p)}$ を、次式の通り変形する。

$$\begin{aligned}
 \frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}} &= \frac{\log(S_n/S_0) - n \log d}{\log(u/d)} \Big/ \sqrt{np(1-p)} \\
 &= \frac{\log(S_n/S_0) - n\{\log d + p \log(u/d)\}}{\log(u/d)} \Big/ \sqrt{np(1-p)} \\
 &= \frac{\log(S_n/S_0) - n\mu_p}{\sigma_p \sqrt{n}}
 \end{aligned} \tag{39}$$

また[21]によれば,

$$\frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\{\log(B/Sd^n)/\log(u/d)\} - \varepsilon - np}{\log(u/d)} \Big/ \sqrt{np(1-p)} \tag{40}$$

であるから, [39]および[40]を用いることにより, 次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 1 - \Phi(a; n, p) &= P\left(\frac{\log(S_n/S_0) - n\mu_p}{\sigma_p \sqrt{n}} \right. \\
 &\quad \left. \leq \frac{\{\log(B/Sd^n)/\log(u/d)\} - \varepsilon - np}{\log(u/d)} \Big/ \sqrt{np(1-p)} \right)
 \end{aligned} \tag{41}$$

したがって, [41]の確率 P の中の不等式における左辺および右辺を, それぞれを α および β とおけば, [26]を証明することは, それぞれ (i) $P(\alpha) \rightarrow N(0, 1)$, および (ii) $\beta \rightarrow \sigma\sqrt{t} - x$ であることを示す問題に帰着する。

(i) $P(\alpha) \rightarrow N(0, 1)$ の証明

[18]および[19]より,

$$\frac{\log(S_n/S_0) - n\mu_p}{\sigma_p \sqrt{n}} = \frac{\log(S_n/S_0) - E\{\log(S_n/S_0)\}}{\sqrt{\text{Var}\{\log(S_n/S_0)\}}} \tag{42}$$

であるから, ここでは $\log(S_n/S_0)$ がリアップノフの条件を満たすことを示すことによって, (i)において中心極限定理が成立することを明らかにする。具体的には, $m=3$ として次式が成り立つことを証明する。

$$\frac{1}{V_n^{\frac{m}{2}}} \sum_{k=1}^n \mu_{km} \rightarrow 0 \quad [43]$$

ここで, $\mu_{k3} = E\left(\left|X_k - E(X_k)\right|^3\right) = E\left(\left|\log(X_k/X_{k-1}) - \mu_p\right|^3\right)$ であるから, これを [43] に代入すれば, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^n \mu_{k3} &= \frac{np|\log u - \mu_p|^3 + n(1-p)np|\log d - \mu_p|^3}{\left[np(1-p)\{\log(u/d)^2\}\right]^{3/2}} \\ &= \frac{p|\log u - p\log(u/d) - \log d|^3 + (1-p)|\log d - p\log(u/d) - \log d|^3}{p(1-p)\sqrt{np(1-p)}\{\log(u/d)^3\}} \quad [44] \\ &= \frac{(1-p)^2 + p^2}{\sqrt{np(1-p)}} \end{aligned}$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき, $p \rightarrow 1/2$ より

$$\frac{(1-p)^2 + p^2}{\sqrt{np(1-p)}} \rightarrow 0 \quad [45]$$

が得られることから, リアプノフの条件が満たされることが示された。□

(ii) $\beta \rightarrow \sigma\sqrt{t} - x$ の証明

まず β を次式の通り変形する。

$$\begin{aligned} &\frac{\{\log(B/Sd^n)/\log(u/d)\} - \varepsilon - np}{\log(u/d)} \bigg/ \sqrt{np(1-p)} \\ &= \frac{\log(B/S) - n\log d - \varepsilon - np\log(u/d)}{\sqrt{np(1-p)}\log(u/d)} \quad [46] \\ &= \frac{\log(B/S) - n\{p\log(u/d) + \log d\} - \varepsilon\log(u/d)}{\sqrt{np(1-p)}\log(u/d)} \end{aligned}$$

ここで, $n \rightarrow \infty$ のとき, [18] および [19] で示された $\log(S_n/S_0)$ の期待値と分散は, それぞれ, $n\mu_p \rightarrow \mu t$ および $n\sigma_p^2 \rightarrow \sigma^2 t$ に収束するものとする。これよ

り次の2式が得られる。

$$n\{p\log(u/d) + \log d\} = \mu t \quad [47]$$

$$n\{\log(u/d)^2 p(1-p)\} = \sigma^2 t \quad [48]$$

[47]より,

$$p = \frac{(\mu t/n) - \log d}{\log(u/d)} = \frac{(\mu t/n) - \log u}{2 \log u} \quad [49]$$

となるから, [49]を[48]に代入することにより次式を得る。

$$\frac{(\mu t/n) - \log u}{2 \log u} \left(1 - \frac{(\mu t/n) - \log u}{2 \log u} \right) \left(\log \frac{u}{d} \right)^2 n = \sigma^2 t \quad [50]$$

ゆえに,

$$\{(\log u)^2 - (\mu t/n)^2\} n = \sigma^2 t \quad [51]$$

となることが必要である。ここで, $n \rightarrow \infty$ より $(\mu t/n)^2 \rightarrow 0$ であるから, $n(\log u)^2 = \sigma^2 t$ となるように u を定めればよい。これを満たすような u および d は次のようになる。

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}} \quad [52]$$

このときロピタルの定理より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p = \frac{1-d}{u-d} \rightarrow \frac{1}{2} \quad [53]$$

が言えるから, p は次式のようにおくことが可能である。

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{n} \left\{ \frac{1 - \sigma^2/2}{\sigma} \right\}} \quad [54]$$

ここで[52]および[54]を用いれば, 次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 n\{p \log(u/d) + \log d\} &= np(2 \log u) - n \log u \\
 &= \log u(2np - n) \\
 &= \sigma \sqrt{\frac{t}{n}} \left[2n \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{n}} \left(1 - \frac{1}{2} \sigma^2 / \sigma \right) - n \right\} \right] \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t
 \end{aligned} \tag{55}$$

また,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{np(1-p)} \log \frac{u}{d} &= \sqrt{np(1-p)} 2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} \\
 &= 2\sigma \sqrt{p(1-p)t} \\
 &= \sigma \sqrt{t}
 \end{aligned} \tag{56}$$

さらに,

$$\log \frac{u}{d} = 2\sigma \sqrt{\frac{t}{n}} \rightarrow 0 \tag{57}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 \frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}} &\rightarrow \left(\frac{\log \{B/S\} - \left(1 - \{\sigma^2/2\} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} \right) \\
 &= - \left(\frac{\log \{B/S\} + \left(1 + \{\sigma^2/2\} \right) t}{\sigma \sqrt{t}} - \sigma \sqrt{t} \right) \\
 &= \sigma \sqrt{t} - x
 \end{aligned} \tag{58}$$

となり, $\beta \rightarrow \sigma \sqrt{t} - x$ は証明された。

以上より, $1 - \Phi(a; n, p) \rightarrow N(\sigma \sqrt{t} - x)$ である。□

参考文献

- Buzby, S. L. 1974. Extending the applicability of probabilistic management planning and control models. *The Accounting Review* 49:42-49.
- Chen, J. T. 1980. Cost-volume-profit analysis in stochastic programming models. *Decision Sciences* 11: 632-647.
- Constantinides, G. M., Y. Ijiri and R. A. Leitch. 1981. Stochastic cost-volume-profit analysis with a linear demand function. *Decision Sciences* 12: 417-427.
- Cox, J. C. and S. A. Ross. 1976. The valuation of option for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3 : 145-166.
- Cox, J. C., S. A. Ross and M. Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 : 229-263.
- Ferrara, W. L., J. C. Hayya and D. A. Nachman. 1972. Normalcy of profit in the Jaedicke-Robichek Model. *The Accounting Review* 47:299-307.
- Hilliard J. E. and R. A. Leitch. 1975. Cost-volume-profit analysis under uncertainty: A log normal approach. *The Accounting Review* 50:69-80.
- Ijiri, Y. 1982. *Triple-Entry and Income Momentum*. Sarasota, FL: American Accounting Association. Studies in Accounting Research No.18.
- Ijiri, Y. 1989. *Momentum Accounting and Triple-Entry Bookkeeping: Exploring the Dynamic Structure of Accounting Measurements*. Sarasota, FL: American Accounting Association. Studies in Accounting Research No.31.
- Ismail, B. E. and J. G. Louderback. 1979. Optimizing and satisficing in stochastic cost-volume-profit analysis. *Decision Sciences* 10: 205-217.
- Jaedicke R. K. and A. A. Robichek. 1964. Cost-volume-profit analysis under conditions of uncertainty. *The Accounting Review* 39: 917-926.
- Kaplan, R. S. 1982. *Advanced Management Accounting*. Prentice-Hall.
- 西村明, 昆誠一監訳(1989)『上級管理会計』中央経済社。
- Karmani, A. 1983. Stochastic cost-volume-profit analysis in a competitive oligopoly. *Decision Sciences* 14: 187-193.
- Kim, S., M. J. Abdolmohammadi and L. A. Klein. 1996. CVP under uncertainty and the manager's utility function. *Review of Quantitative Finance and Accounting* 6 :133-147.
- Kottas, J. F. and H. S. Lau. 1978. Direct simulation in stochastic CVP analysis. *The Accounting Review* 53:698-707.
- Liao, M. 1975. Model Sampling: A stochastic cost-volume-profit analysis. *The Accounting Review* 50 (October):780-790.
- Schweitzer, M., E. Trossmann, and G. H. Lawson. 1992. *Break-Even Analysis: Basic Model, Variations, Extensions*. John Wiley & Sons.
- Shih, W. 1979. A general decision model for cost-volume-profit analysis under uncertainty. *The*

Accounting Review 54: 678-706.

Yunker, J. A. 2001. Stochastic CVP analysis with economic demand and cost functions. *Review of Quantitative Finance and Accounting* 17:127-149.

後藤晃範(1999)「損益分岐分析の離散型動的モデルへの拡張」,『管理会計学』第7巻第1・2合併号。

佐藤靖・佐藤清和(2000)『キャッシュ・フロー情報－ブームの異現象を超えて－』同文館出版。

佐藤清和(2010)「不確実性下におけるCVP分析の連続時間モデルへの拡張」金沢大学経済論集, 第30巻第2号。

原田重寿(2000)『金融・証券のためのブラック・ショールズ式とその応用』東京図書。

- 1) 後藤(1999) では, 離散時間型のCVPの時系列が巧妙な形で図式化されている。しかしながら, CVPの各要素は確率過程として論じられていない。
- 2) 本稿における2項確率過程ならびに連続時間モデルに関する議論は, Cox and Ross [1976], Cox et.al.[1979]に依拠している。また本稿の計算過程の多くは, 原田(2000)によるCox et.al.[1979]の解説に負うものである。
- 3) この条件が成立することの証明は, APPENDIXを参照せよ。
- 4) この計算過程については, 佐藤[2010]のAppendix 1を参照せよ。
- 5) 以下の計算の詳細については, 佐藤[2010]のAppendix 2を参照せよ。