A New Skewed Distribution Function Applicable to Biology Ⅰ.

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-04 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/8563

生物学に応用できる新しい非対称分布関数　Ⅰ．

金沢大学医学部衛生学講座（金沢大学衛生学協力研究員）
茶　谷　士　一

私は今回，新たに別の非対称分布関数を考案した．それは，以前，私が本誌上に発表したものより，尖鋭度の小さい分布に適合するものである．この関数は，ピアソンの分布関数のⅡ型から透導されたもので，上限，下限の両端があり，特殊の条件の下で，前述の非対称分布関数に移行し一致する．すなわち両者の適合範囲は接続して居り，理論的には同じ系列に属するものである．私は以前発表したものを，非対称分布関数Ⅰ型，今回のものを，同じくⅡ型と呼ぶことにする．

Key words　Pearson distribution function, skewed distribution function

前に，非対称分布を，複合関数の形で考案し本誌上に発表した[1]が，それは，歪度，尖鋭度に関し，広い適合範囲を持っており，応用面では充分と思っていた．しかしながら，この複合関数は，それ以前に発表した非対称分布関数[2]と比較したとき，歪度が等しく，尖鋭度が後者より小さい範囲では，その差が大きくなるに従って，僅かではあるが近似値となるので，この範囲に適する単独関数を考案して，単独関数の系列として統一したいと考え，ほぼその目的を達したので次に報告する．

本文で記載する非対称分布関数は，Pearson 系曲線の第二型[3]を変換して考案したので，證明の過程において必要なるため，先づ，この曲線と，證明に必要となる特性を記して論を進める．

Ⅰ．ピアソンの第二型曲線

上記の曲線の方程式は

$$y=y_0\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)^m \qquad (1)$$

である，ここに

$$y_0=\frac{1}{a}\frac{\Gamma(2m+2)}{2^{2m+1}\{\Gamma(m+1)\}^2} \qquad (2)$$

$$m=\frac{5\beta_2-9}{2(3-\beta_2)} \qquad \beta_2：尖鋭度 \qquad (3)$$

$$a^2=\frac{2\mu_2\beta_2}{3-\beta_2} \qquad \sqrt{\mu_2}：標準偏差 \qquad (4)$$

(3)と(4)より，β_2 を消去して

$$a^2=(2m+3)\mu_2 \qquad (5)$$

Ⅱ．非対称分布関数　Ⅱ型

(1) の定積分

$$I=y_0\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{t^2}{a^2}\right)^m dt$$

において

$$t=m\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\} \qquad (6)$$

とおけば

$$dt=m\cdot\frac{1}{m}\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1}\cdot\frac{1}{b}\cdot d\chi$$

$$=\frac{1}{b}\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1}\cdot d\chi$$

となるから，

$$I=\frac{y_0}{b}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[1-\frac{m^2}{a^2}\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^2\right]^m\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1}d\chi$$

と書ける．

このとき，変換されて出来た関数をZとすれば

$$Z=\frac{y_0}{b}\left[1-\frac{m^2}{a^2}\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^2\right]^m\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}-1} \qquad (7)$$

は新しい非対称の分布関数となる．これを非対称分布関数Ⅱ型と呼び，先に発表したもの[2]を，Ⅰ型と呼ぶことにする．

(6) の置換式は，m→∞のとき，対数関数となることは，次のようにして證明される．

(6) より

$$\chi=b\left\{\left(1+\frac{t}{m}\right)^m-1\right\}$$

と書ける．ここで，b，tを定数，mを変数と考えると，Xはmの関数となる，tの任意の一つの値を，t_iで表わし，m→∞とすると

$$\lim_{m\to\infty}\chi=\lim_{m\to\infty}b\left\{\left(1+\frac{t_i}{m}\right)^m-1\right\}=b\left(e^{t_i}-1\right)$$

$\lim_{m\to\infty}\chi=\chi_i$ とすれば

$$\chi_i=b\left(e^{t_i}-1\right)$$

$$e^{t_i}=\frac{\chi_i}{b}+1)$$

両辺の対数をとると

$$t_i=\log\left(\frac{\chi_i}{b}+1\right)$$

ここで，iは任意の値であるから，t_i, χ_i, を変数と考えても差支えない．しがたって，これらを変数t, χ と置き換えて，

$$t = \log\left(1+\frac{\chi}{b}\right) \tag{8}$$

と表わすことができる．

Ⅲ．Ⅰ型，Ⅱ型間の関係

前節における関数Zは $m\to\infty$ のとき，Ⅰ型に収斂することは，次のようにして證明される．

$\chi=0$ のときの，Zの値を Z_0 とすれば

$$Z_0 \doteqdot \frac{y_0}{b} \tag{9}$$

(7) 式を (9) 式で，辺々相除して，両辺の対数をとれば

$$\log\frac{Z}{Z_0} = m\log\left[1-\frac{m^2}{a^2}\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^2\right] + \frac{1-m}{m}\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right) \tag{10}$$

(5) より

$$a^2 = (2m+3)\,\mu_2 \tag{11}$$

(10) 式の右辺の第1項を $P(\chi)$, 第2項を $Q(\chi)$ とおき $m\to\infty$ とすれば

$$\lim_{m\to\infty}\log\frac{Z}{Z_6} = \lim_{m\to\infty}p(\chi)+\lim_{m\to\infty}Q(\chi) \tag{12}$$

ここで (11) より，$\alpha^2=(2m+3)u_2$ を $P(\chi)$ に代入して展開すれば，[ ] 内の第2項の絶対値が1より小さいとき

$$\lim_{m\to\infty}p(\chi) = \lim_{m\to\infty}m\log\left[1-\frac{m^2\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^2}{(2m+3)\,\mu_2}\right]$$

$$= \lim_{m\to\infty}-m\left[\frac{m^2\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^2}{(2m+3)\,\mu_2} + \frac{m^4\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^4}{2\,(2m+3)^2\,\mu_2^2} + \frac{m^6\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^6}{3\,(2m+3)^3\,\mu_2^3} + \text{----------}\right]$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{-m\cdot m^2\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^2}{(2m+3)\,\mu_2}\left[1+\frac{m^2\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^2}{2\,(2m+3)\,\mu_2} + \frac{m^4\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\}^4}{3\,(2m+3)^2\,\mu_2^2} + \text{----------}\right] \tag{13}$$

(6), (8) より

$$\lim_{m\to\infty}m\left\{\left(1+\frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}}-1\right\} = \lim_{m\to\infty}t = \log\left(1+\frac{\chi}{b}\right) \tag{14}$$

又，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{-m}{(2m+3)} = \frac{-1}{2} \tag{15}$$

(14), (15) の値を (13) に代入すれば

$$\lim_{m\to\infty}p(\chi) = \lim_{m\to\infty}\frac{-\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^2}{2\mu_2}\left[1+\frac{\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^2}{2\,(2m+3)\,\mu_2} + \frac{\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^4}{3\,(2m+3)^2\mu_2^2} + \text{----}\right] \tag{16}$$

(16) の括弧内に於て第2項以下の項の分母はそれぞれ，1次，2次，3次……の無限大であるが，分子の対数関数は χ が無限大となると無限大になるが，その有限乗は1次より低次の無限大である．したがって $m\to\infty$ のとき，括弧内の第2項以下の値は0となる．

(12) の右辺の第1項は

$$\lim_{m\to\infty}p(\chi) = \frac{-\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^2}{2\mu_2} \tag{17}$$

(12) の右辺の第2項は

$$\lim_{m\to\infty}Q(\chi) = \lim_{m\to\infty}\frac{1-m}{m}\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}-1\right)\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right) = -\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right) \tag{18}$$

したがって (12) は次のように表わされる．

$$\lim_{m\to\infty}\log\frac{Z}{Z_0} = \frac{-\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^2}{2\mu_2} - \log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)$$

即ち $m\to\infty$ のとき

$$\log\frac{Z}{Z_0} = \frac{-\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^2}{2\mu_2} - \log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)$$

$$\log\frac{Z}{Z_0}\left(1+\frac{\chi}{b}\right) = \frac{-\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^2}{2\mu_2}$$

(9) より Z_0 の値を代入すれば

$$\log\frac{Z}{y_0}(\chi+b) = \frac{-\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^2}{2\mu_2}$$

$$Z = y_0(\chi+b)^{-1}e^{\frac{-\left\{\log\left(1+\frac{\chi}{b}\right)\right\}^2}{2\mu_2}} \tag{19}$$

Zが非対称分布関数，Ⅰ型であることは，次のようにして證明される．

(19) において，

$b = M-a$

注　aは非対称分布関数，Ⅰ[2]における下限値aを表すもので，本文中の (1), (7), (11) におけるaとは異なるものである．

とおき，χ の原点0をMに移せば

$$\chi+b \text{ は } \chi-M+M-a = \chi-a$$

$$1+\frac{\chi}{b} \text{ は } \frac{M-a+\chi-M}{M-a} = \frac{\chi-a}{M-a}$$

と表わされるので

$$Z = y_0(\chi - a)^{-1} e^{-\frac{\left\{\log\left(\frac{\chi - a}{M - a}\right)\right\}^2}{2\mu_2}} \tag{20}$$

となる．

$$\int_a^\infty Z d\chi = y_0 \int_a^\infty (\chi - a)^{-1} e^{-\frac{\left\{\log\left(\frac{\chi - a}{M - a}\right)\right\}^2}{2\mu_2}} d\chi \tag{21}$$

において

$$\log \frac{\chi - a}{M - a} \Big/ \sqrt{\mu_2} = t \tag{a}$$

とおけば

$$\log \frac{\chi - a}{M - a} = \sqrt{\mu_2}\, t$$

これより

$$\chi = (M - a)\, e^{\sqrt{\mu_2} t} + a \tag{b}$$

$$d\chi = (M - a)\, e^{\sqrt{\mu_2} t} \sqrt{\mu_2}\, dt \tag{c}$$

(a) (b) (c) の値を (21) に代入すれば

$$\int_a^\infty Z d\chi = y_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(M - a) e^{\sqrt{\mu_2} t}} e^{-\frac{t^2}{2}} (M - a)\, e^{\sqrt{\mu_2} t} \sqrt{\mu_2}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \sqrt{\mu_2}\, y_0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{22}$$

Zは確立関数であるから，転換された被積分関数も確立関数である．したがって (22) の値は 1 となり，この関係より，転換された被積分関数は正規関数となることが判る．すなわち

$$\int_a^\infty Z d\chi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 \tag{22}$$

が成立する．

次にZの平均値 ε は，次のようにして求められる．

$$\varepsilon = \int_a^\infty \chi \cdot Z \cdot d\chi \tag{23}$$

(23) において (21) の場合と同じ変換を行い，(22) の結果を当てはめると

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left\{(M - a)\, e^{\sqrt{\mu_2} t} + a\right\} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{(M - a)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{\sqrt{\mu_2} t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

右辺の第1項 I_1 において，

$$e^{\sqrt{\mu_2} t} e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2 - 2\sqrt{\mu_2} t + \mu_2}{2} + \frac{\mu_2}{2}} = e^{-\frac{(t - \mu_2)^2}{2}} \cdot e^{\frac{\mu_2}{2}}$$

となるので，I_1, II_1 は次のようになる．

$$I_1 = (M - a) e^{\frac{\mu_2}{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t - \mu_2)^2}{2}} dt = (M - a)\, e^{\frac{\mu_2}{2}}$$

$$II_2 = a$$

したがって

$$\varepsilon = (M - a)\, e^{\frac{\mu_2}{2}} + a$$

これより

$$e^{\frac{\mu_2}{2}} = (\varepsilon - a) \Big/ (M - a)$$

$$\mu_2 = 2 \log \frac{\varepsilon - a}{M - a} \tag{24}$$

が求められる．(24) の値を (20) に代入すれば

$$Z = y_0(\chi - a)^{-1} e^{-\frac{\left(\log \frac{\chi - a}{M - a}\right)^2}{4 \log \frac{\varepsilon - a}{M - a}}} \tag{25}$$

(25) でMが中央値となることは，χ がMのとき，(21) の (b) より，(22) において，tが0となることより，容易に判る．

Zと，非対称分布関数Ⅰ型とを比較すると，係数 y_0 の他は，常数並びに関数の形は全く同じであり，また，共に確率関数であるから

$$y_0 = 1 \Big/ 2\sqrt{\pi \log \frac{\varepsilon - a}{M - a}}$$

なることが結論され，両者は同じ関数であることが證明された．

すなわち，Ⅱ型，はmが大きくなるにしたがって，Ⅰ型に近似となり，mが無限大になったとき，Ⅰ型に一致する．したがって，Ⅰ型，Ⅱ型の適合範囲は接続しているのである．

Ⅳ．曲線の概形

Ⅱ型関数を導く基となったピアソンの，Ⅱ型曲線も，$m \to \infty$ のとき，Ⅱ型が収斂していくⅠ型の曲線も，共に単峰性であり，上限，下限，(Ⅰ型の上限は無限大点) において微係数の値が0で有り，モードの両側に各1個の変曲点が有るので，この曲線の概形も，ほぼ同様と考えられるが，モードの位置を知ることは重要である．以下，これについて述べる．

(7) 式の $\frac{y_0}{b}$ をはずして

$$y = \left[1 - \frac{m^2}{a^2}\left\{\left(1 + \frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right\}^2\right]^m \left(1 + \frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}} - 1$$

とおき，一次導関数を求めると，次の3項の積として表される．

$$I: \frac{1}{bm}\left(1 + \frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}} - 2$$

$$II: \left\{1 - \frac{m^2}{a^2}\left(1 + \frac{\chi}{b}\right)^{\frac{2}{m}}\right\}^{m-1}$$

$$III: -\frac{m^2}{a^2}(m+1)\left(1 + \frac{\chi}{b}\right)^{\frac{2}{m}} + \frac{2m^2}{a^2}\left(1 + \frac{\chi}{b}\right)^{\frac{1}{m}} + (m-1)\left(\frac{m^2}{a^2} - 1\right)$$

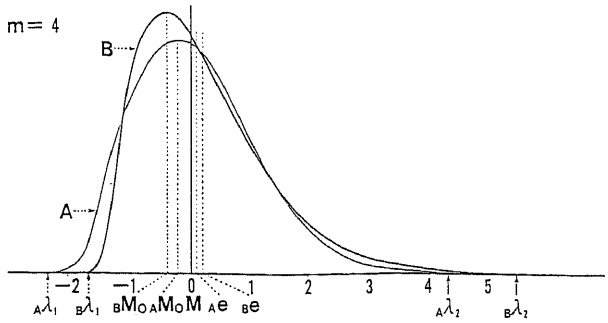


Fig. 1. The figures of the two functions A and B. Curve A and B show the figures of skewed distribution function Ⅱ when both of their constants m are 4, and the constant k of A is 0.2 but that of B is 0.4.

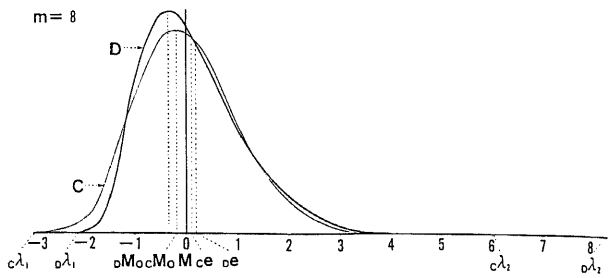


Fig. 2. The figures of the two functions C and D. Curve C and D show the figures of skewed distribution function Ⅱ when both of their constants m are 4, and the constant k of C is 0.1 but that of D is 0.2. To be easier for you to compare the shapes of the functions, I put all of their medians the origin (0), and also set up their standard deviations 1. Calculation method will be shown in another issue.

Table 1. The numerical value of the elements that decide the form of four functions (A, B, C, D) having different constants

Sample	m	a/m	b	Median	Mean	Mode	Skewness	Kurtosis	Minimum	Maximum
A	4	0.2	4.083	0	0.089	−0.242	0.172	2.771	−2.410	4.383
B	4	0.4	1.952	0	0.171	−0.444	0.669	3.439	−1.699	5.548
C	8	0.1	5.365	0	0.079	−0.185	0.172	2.975	−3.056	6.135
D	8	0.2	2.563	0	0.153	−0.341	0.697	3.778	−2.133	8.458

Ⅰの値は

$$b>0, m>a>0, b\left|(1-\frac{a}{m})^m-1\right| < \chi < b\left|(1+\frac{a}{m})^m-1\right|$$

となるとき，常に正である．

Ⅱの値を0とおけば

$$\chi = b\left|(1\pm\frac{a}{m})^m-1\right|$$

となる2根が得られる．これはこの曲線の上限と下限になる．Ⅰにおけるχはこの範囲に含まれる．

Ⅲ$_i$において，

$$(1+\frac{\chi}{b})^{\frac{1}{m}} = X \qquad X>0$$

とおけば，方程式は次のようになる．

$$-\frac{m^2}{a^2}(m+1)X^2+\frac{2m^2}{a^2}X+(m-1)(\frac{m^2}{a^2}-1)=0$$

これを解いて

$$X=\frac{1+\sqrt{1+(1-K^2)(m^2-1)}}{m+1} \qquad K=\frac{a}{m}$$

したがって

$$\chi = b(X^m-1)$$

よりχの値が求められる．この値が，モードの位置である．二次導関数は，計算が煩雑になるため，本文では省略する．

次に曲線の概形を図1，2に示すが，これは次に報告する予定の“関数の常数の決め方”で求めた表1の数値を基にしてある．4例をあげたが，形状の比較をし易くするために，中央値を原点にとり，常数bの値を調節して，標準偏差の値を1に揃えてある．

結　　論

以上私は非対称で単独の分布関数として，先に本誌上に発表したものよりも，尖鋭度の小さい範囲に広く適合の可能性を持つ分布関数を考案した．この関数は，ピアソンの第2型の曲線より変換されたもので，上限，下限の両端があり，また，特定の条件の下で前者に収斂する．すなわち両者は理論的に同じ系列に属するのである．

謝　　辞

稿を終えるに当り，御校閲の労をお願いしました，橋本和夫教授に厚く御礼申し上げます．また，内容について適切な助言を戴きました，金沢大学名誉教授 木戸睦彦先生に深く感謝致します．

文　　献

1） 茶谷士一：生物学に応用できる一種の複合非対称分布関数と其の理論．十全医会誌，**76**, 254-266 (1968).

2） 茶谷士一：生物学に応用できる一種の非対称分布函数と其の理論．十全医会誌，**66**, 383-392 (1960).

3） 佐藤良一郎：数理統計学．増補11版，154頁，倍風館，東京，1954.

A New Skewed Distribution Function Applicable to Biology. (Ⅰ) Shiichi Chadani, Department of Hygiene, School of Medicine, Kanazawa University, Kanazawa 920－J. Juzen Med Soc., **103**, 651－655 (1994)

Key words Pearson distribution function, skewed distribution function

Abstract

I devised another skewed distribution function. It is applicable to the distribution whose peak is lower than the one in the function I had previously published in this journal. The new function is derived from the Pearson distribution function Ⅱ, has the lower and higher limits, and moves to the former function under the particular condition. I call my former function "Skewed Distribution : Ⅰ" and the new one "Skewed Distribution : Ⅱ".