

衝撃強度設計の基礎

放生明廣

A Basic Theory of The Impact Strength Design

Akihiro HOUSYOU

I. はじめに

衝撃荷重を受ける機械や構造物の強度設計においては、材料の衝撃強度を知る必要があり、そのためには、衝撃負荷に対する材料や構造物の挙動を把握する必要がある。そのためには衝撃挙動の解析が必要であり、専門書・解説 1~6) や文献を参考に設計段階における動的挙動の解析や測定が行われるようになってきている。特に最近のコンピュータの発達にともなって専用の構造解析プログラム 7~8) を利用した計算も実用されるようになってきている。

しかしながら、丸棒の縦衝撃など単純なケースについて応力波の発生と伝ば現象を把握することが衝撃現象を理解するための基礎として重要である。また、設計の観点からは、必ずしも大がかりな計算は必要でなく、応力の大きさや挙動の概略を把握すれば十分であることも多いと思われる。そのような場合には、手軽に利用できる簡便な評価式や資料によって衝撃応力を評価できれば有益であろう。他方、設計上からは、材料の衝撃強度を知る事も欠かせないが、これは実験的に求めざるを得ないのが現状である。その場合も衝撃に特有な現象を理解した上で試験機の製作や実験方法を考える必要がある。

以上のような観点から、主に丸棒の縦衝撃を例に、応力波の発生と伝ば現象について解説し、図式解法によって衝撃応力を求める手法を示す。

II. 衝撃応力の簡便評価法

1. エネルギー法

応力波伝ば現象について説明する前に、衝撃応力の最大値を簡便に評価する方法を示す。

衝撃により構造物に生ずる荷重あるいは応力を評価するもっとも簡便な方法はエネルギー法である。すなわち、構造物内の変形は静的な場合と同じであると仮定し

$$(\text{衝突前の運動エネルギー}) = (\text{衝突後のひずみエネルギー}) \quad (1)$$

とにおいて、発生する荷重や応力を求める。

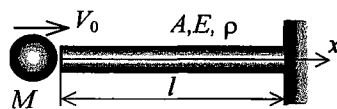


図1 剛体の衝突を受ける棒

図1のように、質量 M の剛体が速度 V_0 で棒に衝突すれば、式(1)は

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{\sigma_0^2}{2E}Al$$

であるから衝撃応力 σ_0 は

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{ME}{Al}}V_0 = \sqrt{\frac{M\rho}{(Al\rho)E}}V_0E = \frac{1}{\sqrt{\beta}}\sigma_0$$

$$\text{ただし、} \beta = \frac{m}{M}, m = Al\rho, \sigma_0 = V_0E/\sqrt{E/\rho}, = \sqrt{E/\rho}$$

A, l, ρ, E : 棒の断面積, 長さ, 密度, ヤング率
となる。

2. ばね質量系モデルと動荷重係数

1. では時間の影響を無視しているのをこれをこれを考慮するために、衝撃荷重を受ける構造物をばね質量系に置きかえる。この場合も構造物内の変形は静的なものと同じであると仮定する。

(ばね, 質量系にモデル化) (2)

図1の例では、棒のばね定数は $K = AE/l$ であるから、運動方程式および初期条件は、ばねのたわみを y として

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} = -Ky \quad t=0 \text{ で, } y=0, \quad dy/dt = V_0$$

そして、応力は $\sigma_s = Ky/A$ で与えられる。これを解けば、

$$y = V_0 \sqrt{\frac{M}{K}} \sin\left(t \sqrt{\frac{K}{M}}\right)$$

であるから、応力 σ_s は

$$\sigma_s = \frac{K}{A} V_0 \sqrt{\frac{M}{K}} \sin\left(t \sqrt{\frac{K}{M}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sigma_0 \sin(\sqrt{\beta} \tau)$$

$$\text{ただし、} \tau = Ct/l$$

となる。最大値は $\sigma_{s_max} = \sigma_0$ となりエネルギー法の結果に一致する。

衝撃力を受ける物体をばね質量系モデルに置き換えこれに作用する荷重を評価する手法として、動荷重係数による評価法がある 2), 9)。

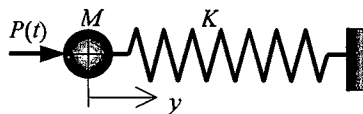


図2 動荷重が加わるばね質量系

これは、荷重 $P(t)$ が加わる対象を図 2 のようなばね質量系と見なし、運動方程式

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + Ky = P(t) \quad \text{ただし, } y|_{t=0} = 0, \quad dy/dt|_{t=0} = 0 \quad [\text{a}]$$

の解すなわち、動荷重によるたわみと、同じ荷重が静的に加わるときのたわみの比

$$\text{動荷重係数}(DLF) = \frac{\text{動荷重によるたわみ}}{\text{静荷重によるたわみ}} \quad [\text{b}]$$

を動荷重係数 (DLF) と定義し、

$$(\text{構造物に作用する荷重}) = (DLF \text{ の最大値}) \times (\text{静荷重}) \quad [\text{c}]$$

とするものである。一般に動荷重は、

$$P(t) = P_0 f(t) \quad (3)$$

ここで、 P_0 : 静荷重、 $f(t)$: 無次元関数
と表せるから、式[a]の解は、

$$y = y_{st} \int_0^t \omega \cdot \sin(\omega \tau) f(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

ただし、 $\omega = \sqrt{K/M}$ 、 $y_{st} = P_0 / K$: 静荷重によるたわみ
となり、 DLF は次式で求まる。

$$DLF = \int_0^t \omega \cdot \sin(\omega \tau) f(t - \tau) d\tau \quad (5)$$

例えば、大きさ P_0 のステップ荷重は

$$P = P_0 H(t) \quad H(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

と表せるから $f(t) = H(t)$ とおき

$$DLF = \int_0^t \omega \cdot \sin(\omega \tau) H(t - \tau) d\tau = \int_0^t \omega \cdot \sin(\omega \tau) d\tau = 1 - \cos(\omega t)$$

$$\therefore DLF_{\max} = 2$$

すなわち、荷重 P_0 がステップ状に加われれば、構造物には $2P_0$ の荷重が作用する事になる。

この例のように荷重が 1 度だけ加わる場合は、 $DLF_{\max} \leq 2$ であるから、物体に生ずる応力は、荷重が静的に加わるとして求めたものの 2 倍であるとすれば安全側である。しかしながら荷重が周期的に繰返す場合には、 $DLF_{\max} \leq 2$ となるから注意を要する。例えば $P = P_0 \sin \omega_0 t$ の場合式 (5) は、

$$DLF = \frac{\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad \omega \neq \omega_0, \quad DLF = \frac{\sin \omega_0 - \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 t}{2} \quad \omega = \omega_0$$

となり、 $\omega = \omega_0$ では共振が起き物体内の応力は時間の経過とともに大きくなる。動荷重係数の計算例を以下に示す。

[1] ステップ荷重 : $f(t) = H(t)$ $DLF = 1 - \cos(2\pi t / T)$

[2] ランプ状荷重 : $f(t) = \frac{t}{t_1} - H(t - t_1) \frac{t - t_1}{t_1}$

$$DLF = \tau - \frac{\sin(2\pi\alpha\tau)}{2\pi\alpha} - H(\tau - 1) \left\{ (\tau - 1) - \frac{\sin(2\pi\alpha(\tau - 1))}{2\pi\alpha} \right\}$$

[3] 矩形状荷重 : $f(t) = 1 - H(t - t_1)$

$$DLF = 1 - \cos(2\pi\alpha\tau) - H(\tau - 1) \{ 1 - \cos(2\pi\alpha(\tau - 1)) \}$$

[4] 三角形状荷重 : $f(t) = \frac{t}{t_1/2} - 2H(t - t_1/2) \frac{t - t_1/2}{t_1/2} + H(t - t_1) \frac{t - t_1}{t_1/2}$

$$\begin{aligned} \frac{DLF}{2} = & \tau - \frac{\sin(2\pi\alpha\tau)}{2\pi\alpha} - 2H(\tau - 0.5) \left\{ (\tau - 0.5) - \frac{\sin(2\pi\alpha(\tau - 0.5))}{2\pi\alpha} \right\} \\ & + H(\tau - 1) \left\{ (\tau - 1) - \frac{\sin(2\pi\alpha(\tau - 1))}{2\pi\alpha} \right\} \end{aligned}$$

ただし、 $T = 2\pi\sqrt{M/K}$, $\tau = t/t_1$, $\alpha = t_1/T$

これらの DLF 及び DLF_{\max} と $\alpha = t_1/T$ の関係は図 3 のようになる。

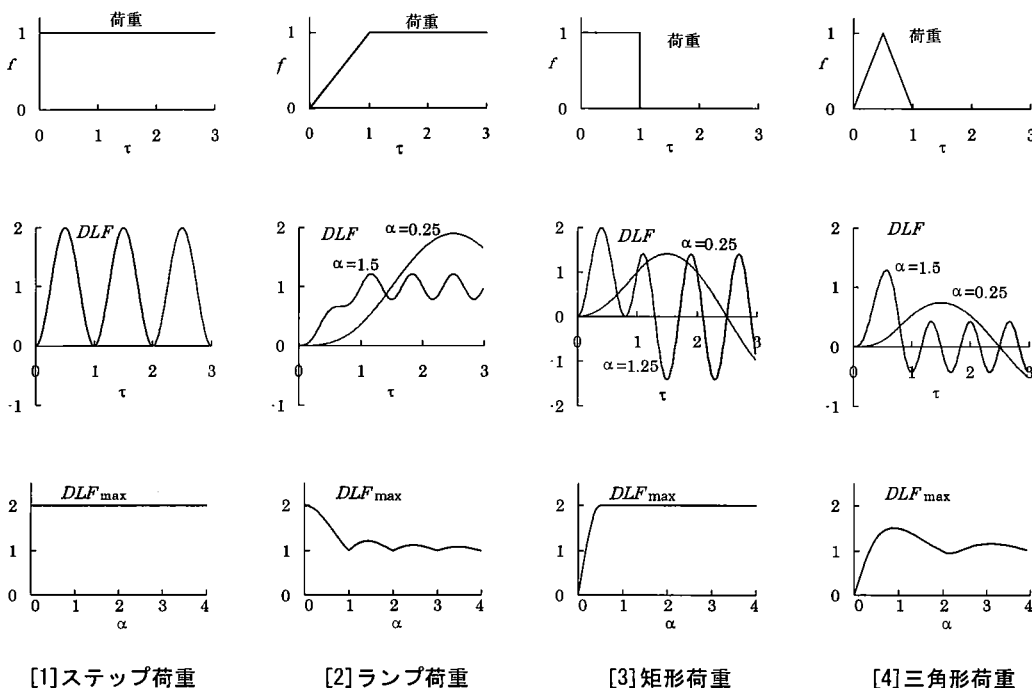


図 3 種々の荷重に対する DLF

Ⅲ. 棒の縦衝撃による応力波の伝播現象

1. 応力波の発生と伝ば

前章で述べた簡便評価法では物体の質量すなわち慣性の影響を無視している。しかしながら、急激に荷重が加わる衝撃現象では物体の慣性のために、物体内には応力波が発生伝ばする。応力波は波であるので、境界に達すると反射、透過しその挙動は複雑になる。ここでは、慣性の影響によって応力波が発生する原理を、波動方程式を用いず物理的に説明する。また、静的応力と衝撃応力の違いについても示す。

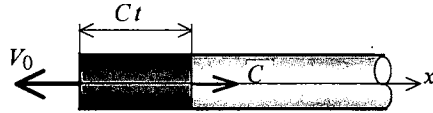


図4 一端に引張速度を受ける棒

図4は棒の左端に速度 V_0 をいきなり加え、その後加え続ける場合である。棒の左端は速度を与えた瞬間（この時を時間 $t=0$ とする）から V_0 で動き続けるが、その他の位置は直ちには動き出さない。速度が加わったという、いわば情報が応力波として、伝ば速度 $C=\sqrt{E/\rho}$ で棒中を伝ばし始める。 C は棒中を伝わる音速に等しい。そうして、応力波が到達した瞬間からその位置は速度 V_0 で動き始め、時刻 t では左端からの距離 $x \leq Ct$ の部分が動いておりその先は静止したままである。

動き出した部分に注目すれば、時刻 t での各部の変位は $u(x, t) = -V_0(t - x/C)$ 、左端では $u(0, t) = -V_0 t$ であるから、この部分は、元の長さ Ct が $V_0 t$ だけ一様に伸びた事になる。したがって、応力波が伝ばした部分には、

$$\sigma_0 = E\varepsilon = E \frac{V_0 t}{Ct} = \frac{V_0}{C} E \quad (6)$$

の引張り応力が発生する。時間の経過に連れてこの領域は広がり、棒全体が動き出す。

2. 静的応力と動的応力

前節では衝撃負荷により応力波が発生伝ばする原理を説明した。この考え方が静的負荷にも当てはまる事を以下に示す。

図5は棒の右端を固定して左端を V_0 で引張り続けた場合であり、棒は時間の経過と共に以下のようにふるまう。

1] 時刻 $0 < t < l/C$

先に述べたように、

$$\text{応力値 } \sigma_0 = V_0 E / C \quad [a]$$

$$\text{変位速度 } v = -V_0$$

となる応力波が発生し棒中を $x > 0$ 方向に伝ばする。

（ここでは、棒の変位速度 v は $x > 0$ 方向を正と定義する。したがって、 $v = -V_0$ ）

2] 時刻 $t = l/C$

この応力波は棒の固定端に到達し、棒は一様に応力 σ_0 、速度 $-V_0$ となる。

しかし、固定端は常に速度0であるから、この時固定端には、速度成分が V_0 の応力波が発生し $x < 0$ の方向へ反射伝ばする事になる。この応力波の応力の値は、先ほどと同様に考えて、

$$\sigma = V_0 E / C = \sigma_0 \quad [b]$$

となることがわかる。

3] 時刻 $l/C < t < 2l/C$

反射波が既に到達した位置の応力および変位速度は、足し合わせれば良いから、

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_0 = 2\sigma_0, \quad v = -V_0 + V_0 = 0 \quad [c]$$

4] 時刻 $t = 2l/C$

応力波は棒中を1往復し棒は一様に応力 $2\sigma_0$ となり、静止する。

しかし、先端は常に速度 $-V_0$ であるから、固定端と同様に速度成分が $-V_0$ の応力波が発生し再び $x > 0$ の方向へ反射伝ばする。この応力波が持つ応力成分はやはり

$$\sigma = V_0 E / C = \sigma_0 \quad [d]$$

である。

結局、棒中には応力波が変位速度の符号を変えながら往復することになる。任意の時刻の値は、これら応力波の値を順次加え合わせたものとなる。

5] 時刻 $2nl/C < t < (2n+1)l/C$ (n は整数) での棒の任意点の応力は次式となり、

$$2n\sigma_0 \leq \sigma < 2n\sigma_0 \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \quad [d]$$

n が大きければ $1/2n \approx 0$ であるから棒の応力はほぼ一様に

$$\sigma = 2n\sigma_0 \quad [e]$$

となる。一方、このとき棒先端の変位は

$$\delta \approx (2nl/C)V_0 \quad [f]$$

であるから、 $2n = C\delta/V_0 l$ とおけば、[e]より

$$\sigma = \frac{C\delta}{V_0 l} \sigma_0 = \frac{C\delta}{V_0 l} \frac{V_0}{C} E = \frac{\delta}{l} E \quad [g]$$

となる。すなわち、棒の伸びと応力の間には静的フックの法則が成立する。

以上のように、静的負荷により生ずる応力も応力波の伝ば現象として説明できる。静的負荷は σ_0 が極めて小さい場合であり、個々の波の反射透過は問題にならないから、式[g]で十分であるのに対し、衝撃負荷ではこれが大きく応力波の数回の反射透過が問題となる。

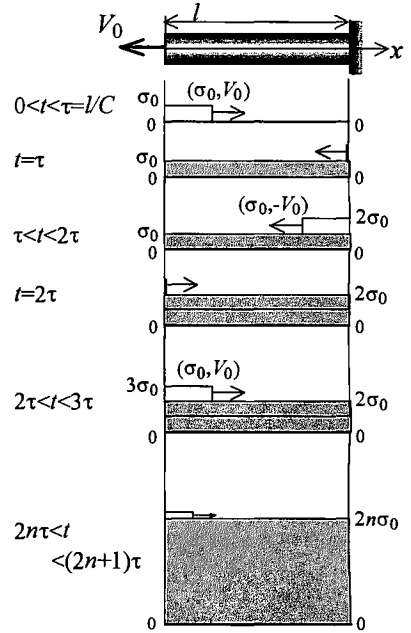


図5 静的応力と衝撃応力

IV. 動的フックの法則と図式解法

前章で示したように、衝撃荷重が加わる物体中には応力波が発生伝ばし、境界で反射・透過を繰り返す、応力はこれらの応力波の重ね合わせとなる。ここでは、一次元応力波の伝ば現象を簡単に評価し縦衝撃問題の特徴を把握する方法として、動的フックの法則を定義し、これを利用した

図式解法 10) について述べる。

1. 動的フックの法則

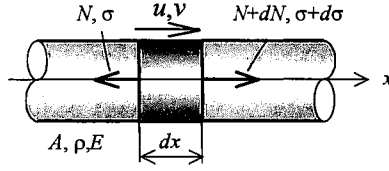


図 6 縦衝撃を受ける丸棒

図 6 のような縦衝撃を受ける丸棒の基礎式は次の波動方程式となる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (7)$$

ここで、 ϕ は変位 u 、変位速度 v 、引張応力 σ あるいは引張ひずみ ε であり、 E, ρ, C はそれぞれヤング率、密度および縦波の伝ば速度である。また、変位とひずみ、応力、変位速度及び軸力 N の関係は次のようである

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad N = A\sigma \quad (8)$$

ただし、 A は断面積

式(7)の一般解は

$$\phi = \phi_R(x - ct) + \phi_L(x + ct)$$

ここで、 $\phi_R()$ は $x > 0$ 方向へ伝ばする波、 $\phi_L()$ は $x < 0$ 方向へ伝ばする波を表すとなる。変位の解を

$$u = u_R(x - ct) + u_L(x + ct)$$

とおけば、変位速度は $v = \partial u / \partial t$ より

$$v_R + v_L = -Cu'_R + Cu'_L$$

と書ける。ここで、 $\phi' = d\phi(\xi) / d\xi$ である。一方、応力は $\sigma = E(\partial u / \partial x)$ であるから

$$\sigma_R + \sigma_L = Eu'_R + Eu'_L \quad \text{したがって、} \sigma_R = -Ev_R / C, \quad \sigma_L = Ev_L / C$$

となる。以上まとめると応力と変位速度の関係は次のようになる。

$$\sigma = \mp \frac{v}{C} E, \quad C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (9)$$

ただし、 $-$: $x > 0$ 方向へ伝ばするとき、 $+$: $x < 0$ 方向へ伝ばするとき

式(9)を動的フックの法則と定義する。なお、これは波動として伝ばしている成分について成立するものであり、ある位置のある時刻における応力と変位速度は、その時までそこに到達した波動成分を全て加え合わせた値になり、これらトータルに応力とひずみの間には静的なフックの法則が成立している。

2. 応力波の発生と反射透過

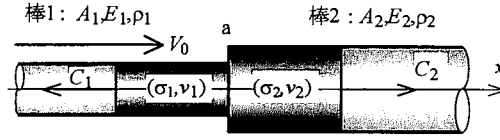


図7 棒の衝突による応力の発生

図7のように棒1が相対速度 V_0 で棒2に衝突するとすれば、衝突面では、両棒の速度は等しく、また力が釣り合っていないといけないことより、衝突面には次の応力波が発生し棒1では $x < 0$ 方向へ、棒2では $x > 0$ 方向へそれぞれ伝ばすることがわかる。

棒1

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{V_0}{C_1} E_1 \\ v_1 &= -\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

棒2

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \frac{V_0}{C_2} E_2 \\ v_2 &= \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\text{ただし, } Z_1 = A_1 \rho_1 C_1, \quad Z_2 = A_2 \rho_2 C_2 \quad (12)$$

Z_1, Z_2 はそれぞれ棒1および2の音響インピーダンスと呼ばれる。

幾つかの例を示せば次のようである。

〔剛体壁への衝突〕 剛体はヤング率が ∞ であるから $C_2 = \infty$ したがって $Z_2 = \infty$ と置けば、

$$\sigma_1 = -\sigma_0 \quad \text{ただし} \quad \sigma_0 = \frac{V_0}{C_1} E_1 \quad (13)$$

となる。棒が鋼材ならば $E = 200 [\text{GPa}]$, $C = 5120 [\text{m/Sec}]$ であるから、衝突速度 $[\text{m/Sec}]$ と発生応力 $[\text{MPa}]$ の関係は

$$\sigma_1 \approx -40V_0$$

となる。秒速 $1 [\text{m}]$ を落下高さに換算すれば約 $0.05 [\text{m}]$ となるから、丸棒を落下高さ $5 [\text{cm}]$ から剛体の床に落とせば、 $40 [\text{MPa}]$ の応力が生ずる事になる。そして、荷重は棒の断面積に比例するので、一般には衝撃荷重は極めて大きく成り得る事がわかる。

〔同質同断面積の棒の衝突〕 材質及び断面積が同じであれば $Z_1 = Z_2$ であるから、

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{V_0}{2C_1} E_1 = -\frac{\sigma_0}{2} \quad (14)$$

となり、速度 $V_0/2$ で剛体に衝突したのと同じである。棒が鋼材ならば

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -20V_0 \quad [\text{MPa}]$$

となる。

〔同質異断面積の棒の衝突〕 材質は同じであるが、断面積が異なる棒の衝突では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{A_2}{A_1 + A_2} \sigma_0, & \sigma_2 &= -\frac{A_1}{A_1 + A_2} \sigma_0 \\ v_1 &= -\frac{A_2}{A_1 + A_2} V_0, & v_2 &= \frac{A_1}{A_1 + A_2} V_0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

となり，両棒に発生する応力は衝突速度と断面積比によって決まる。

図 8 に示すように，棒 1 中を伝播してきた応力波 (σ_0, v_0) が棒 2 との境界 a で反射透過し，棒 1 には応力波 (σ_1, v_1) が引き返し，棒 2 には応力波 (σ_2, v_2) が透過するとする。境界面では，両棒の速度は等しく，また力が釣り合っていないとすることが，応力および変位速度の反射率，透過率は次式で与えられる。

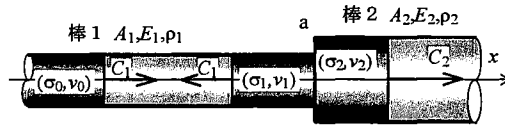


図 8 応力波の反射・透過

応力に関する反射率，透過率

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &\equiv \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ \alpha_{12} &\equiv \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{A_1}{A_2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

変位速度に関する反射率，透過率

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} &\equiv \frac{v_1}{v_0} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \beta_{12} &\equiv \frac{v_2}{v_0} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

幾つかの例を示せば次のようである。

〔自由端反射〕 自由端は棒 2 が存在しないから， $E_2=0$ したがって $Z_2=0$ と置き

$$\alpha_{11} = -1, \beta_{11} = 1 \quad (18)$$

となる。すなわち，自由端では入射応力波と反対符号の応力が引き返すので応力は常に 0 である。一方，変位速度は入射応力波の 2 倍となる

〔固定端反射〕 固定端の場合は $Z_2=\infty$ であるから

$$\alpha_{11} = 1, \beta_{11} = 1 \quad (19)$$

となり，自由端の場合とは逆に固定端の変位速度は常に 0 であるが，応力は入射応力の 2 倍となる。

〔音響インピーダンスが同じ場合〕 音響インピーダンスが等しい場合は $Z_1=Z_2$ と置き

$$\alpha_{11} = 0, \alpha_{12} = \frac{A_1}{A_2}, \quad \beta_{11} = 0, \beta_{12} = 1 \quad (20)$$

となり，反射波の成分は応力変位速度ともに 0 であり，透過波変位速度は入射波のそれと等しい。すなわち，応力波にとって境界は存在しないことになる。

〔材質が同じ場合〕 材質が同じ場合は $E_1=E_2$ ， $C_1=C_2$ であるから，

$$\alpha_{11} = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2}, \alpha_{12} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2}, \quad \beta_{11} = -\alpha_{11}, \beta_{12} = \alpha_{12} \quad (21)$$

となり、反射率および透過率は両棒の断面積比によって決まる。

3. 図式解法

前節の結果を基に、棒中に発生伝播する応力波を図式解法から求める方法を、図9に示す同じ材質の2本の棒の衝突を例に示す。

同図は横軸に時間、縦軸に棒に沿った距離をとったグラフ上に、応力波頭の伝ば軌跡を直線で描いたものであり、各軌跡にはその応力波の応力と変位速度を記してある。

[1] 棒1が速度 V_0 で同じ材質の棒2に衝突すれば、式(15)より、両棒には次の圧縮応力が発生しそれぞれ、上方及び下方へ向かって伝ばしはじめる。

$$\text{棒1: } (-\sigma_1, -v_1), \text{棒2 } (-\sigma_2, v_2) \quad [a]$$

ここで、 $\sigma_0 = V_0 E/C$ とおいて

$$\sigma_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} \sigma_0, v_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} V_0 \quad \sigma_2 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} \sigma_0, v_2 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} V_0 \quad [b]$$

これらは、それぞれ棒1の上端、棒2の下端で自由端反射し次式の引張応力波

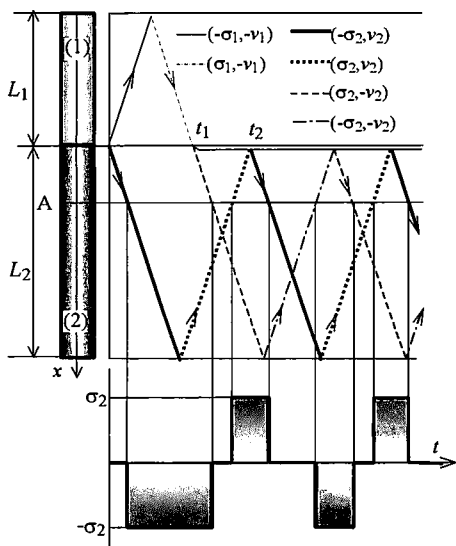
$$\text{棒1: } (\sigma_1, -v_1), \text{棒2: } (\sigma_2, v_2) \quad [c]$$

が引き返す。時刻 $t_1 = 2L_1/C$ には棒1を応力波が一往復し、この時点で棒1は

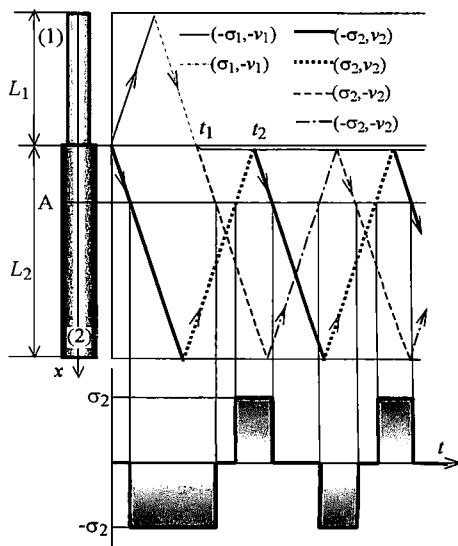
$$\text{応力 } 0, \text{ 速度 } \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} V_0 \quad [d]$$

となる。

その後は、棒の断面積比によって次のようにふるまう。



A 点の応力



A 点の応力

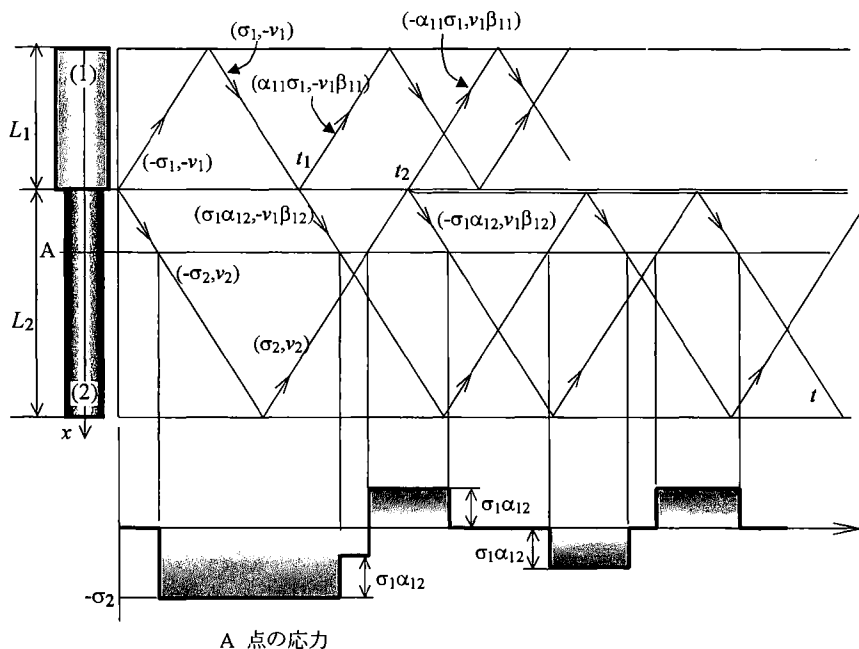


図9 2本の棒の衝突による応力

[2] $A_1 = A_2$ の場合

- ・衝突面における応力の反射率は0であるから、応力波

$$(\sigma_1, -v_1) = (0.5\sigma_0, -0.5V_0)$$

はそのまま棒2へ透過し、棒2の応力、速度も打ち消して行く。

- ・時刻 $t_2 = 2L_2/C$ に棒2下端で反射した引張応力が衝突面に到達。
- ・この時点で、衝突面は既に応力0となっているので、引張応力は衝突面を通過できず、両棒は離れる。これ以後棒1は完全に静止し棒2には2つの応力波が自由端反射を繰返し伝ばする。

[3] $A_1 < A_2$ の場合

- ・棒2の速度は負、すなわち図の上方へ動くので両棒は離れ衝突面は自由端となる。
- ・棒1には新たな応力波は発生せずこれ以後応力0で、最初飛んできた方向と逆方向へ飛び去る。
- ・棒2には既に生じていた応力を打ち消すために、 $(\sigma_2, -V_2)$ の応力波が新たに発生し伝ばする。

[4] $A_1 > A_2$ の場合

- ・棒1から2へ伝ばする応力波が衝突面で反射透過した後も衝突面の応力は圧縮となり接触は保たれ、次の応力波が伝ばする。

$$\left. \begin{array}{l} \text{棒1 } (\sigma_1 \alpha_{11}, -v_1 \beta_{11}) \\ \text{棒2 } (\sigma_1 \alpha_{12}, -v_1 \beta_{12}) \end{array} \right\} \quad \text{ただし,} \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_{11} = -\beta_{11} = \frac{A_2 - A_1}{A_1 + A_2} \\ \alpha_{12} = \beta_{12} = \frac{2A_1}{A_1 + A_2} \end{array} \right\} \quad [e]$$

・時刻 $t_2 = 2L_2/C$ に棒 2 下端からの反射波 ($\sigma_2, -V_2$) が衝突面へ到達し、この時両棒は離れ、衝突面の応力が 0 とならねばならないから、両棒の衝突面には、

$$\left. \begin{array}{l} \text{棒 1 } (-\sigma_1 \alpha_{11}, -v_1 \beta_{11}) \\ \text{棒 2 } (-\sigma_1 \alpha_{12}, v_1 \beta_{12}) \end{array} \right\} \quad [f]$$

の応力波が発生し伝ばする。

このような軌跡図を基に、棒の任意位置における応力あるいは変位速度は、各波頭がその位置を横切る時間に、その値を順次加える事によって求まる。図ではこのようにして求めた A 点における応力—時間関係を示してあるが、速度成分を加え合わせれば同様に速度—時間関係もわかる。

4. 丸棒のねじり

縦衝撃と同様に、丸棒のねじり衝撃についても、動的フックの法則が導かれ、図式解法を利用できる。図 10 に示す、衝撃ねじりを受ける丸棒に関する基礎式は、

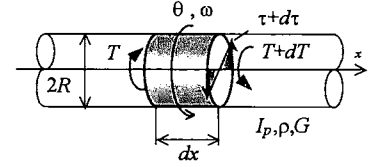


図 10 ねじり衝撃を受ける丸棒

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = C'^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad C' = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (22)$$

で与えられ、これの一般解は縦衝撃の場合と同様に次式となる。

$$\phi = \phi_R(x - C't) + \phi_L(x + C't)$$

ただし、断面の回転角を θ 、回転角速度を ω 、半径を R 、外表のせん断ひずみ及び応力をそれぞれ γ 、 τ として ϕ は $R\theta$ 、 $R\omega$ 、 γ あるいは τ であり、 G は横弾性係数、 C' はせん断波の伝ば速度である。また、 θ 、 ω 、 τ 及びトルク T の関係は次のようである。

$$\frac{\gamma}{R} = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\tau}{R} = G \frac{\gamma}{R} = G \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \omega = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad T = \frac{I_p}{R} \tau \quad (23)$$

これらは、変位速度 v を断面の回転角速度 ω 、垂直応力 σ を棒外表のせん断応力と外半径の比 τ/R 、垂直ひずみ ϵ を棒外表のせん断ひずみと外半径の比 γ/R 、断面積 A を断面二次極モーメント $I_p = \pi R^4/2$ 、ヤング率 E を横弾性係数 G そして伝ば速度 C を $C' = \sqrt{G/\rho}$ と置き換えれば縦衝撃の基礎式(7)、(8)に一致する。したがって、縦衝撃の結果に上の置き換えを行えば、同様の議論および結果がねじり衝撃についてもあてはまる。

すなわち、動的フックの法則は

$$\frac{\tau}{R} = \mp \frac{\omega}{C'} G, \quad C' = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (24)$$

一端に回転角速度 Ω_0 を受ける丸棒外表に生じるせん断応力は

$$\frac{\tau_0}{R} = -\frac{\Omega_0}{C'} G \quad (25)$$

回転角速度 Ω_0 の棒 1 を静止している棒 2 に急激に連結したとき棒 1、2 に生じるねじり応力波は

棒 1 棒 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_1}{R_1} &= -\frac{Z'_2}{Z'_1 + Z'_2} \frac{\Omega_0}{C'_1} G_1 \\ \omega_1 &= -\frac{Z'_2}{Z'_1 + Z'_2} \Omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_2}{R_2} &= -\frac{Z'_1}{Z'_1 + Z'_2} \frac{\Omega_0}{C'_2} G_2 \\ \omega_2 &= \frac{Z'_1}{Z'_1 + Z'_2} \Omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここで、 $Z'_1 = \rho_1 C'_1 I_{p1}$ 、 $Z'_2 = \rho_2 C'_2 I_{p2}$ はねじりの音響インピーダンス (28)

棒 1 中を伝ばしてきたねじり応力波の境界面での反射率と透過率は

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{11} &\equiv \frac{\tau_1}{\tau_0} = \frac{Z'_2 - Z'_1}{Z'_2 + Z'_1} \\ \alpha'_{12} &\equiv \frac{\tau_2 R_1}{\tau_0 R_2} = \frac{2Z'_2}{Z'_1 + Z'_2} \frac{I_{p1}}{I_{p2}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta'_{11} &= \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{Z'_1 - Z'_2}{Z'_1 + Z'_2} \\ \beta'_{12} &= \frac{\omega_2}{\omega_0} = \frac{2Z'_1}{Z'_1 + Z'_2} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となる。したがって、丸棒のねじり衝撃についても縦衝撃の場合と同様に図式解法により衝撃応力を求める事ができる。

図 11 は横棒 1 に取り付けけたピンを落下棒 2 で打撃するとき横棒に発生するねじり応力を図式解法を用いて求めた例である (11)。この場合、ピン先端の速度と落下棒下端の速度が等しい。また、落下棒下端の荷重と横棒中心からピン先端までの積が横棒左端のトルクに等しい。これらの条件と動的フックの法則より、同図 (a) のように落下棒 2 が速度 V_0 で横棒 1 に取り付けけたピンに衝突したとき、落下棒に生ずる縦波 (σ , v) と横棒に生ずるねじり波 (τ , ω) は次式で与えられる。

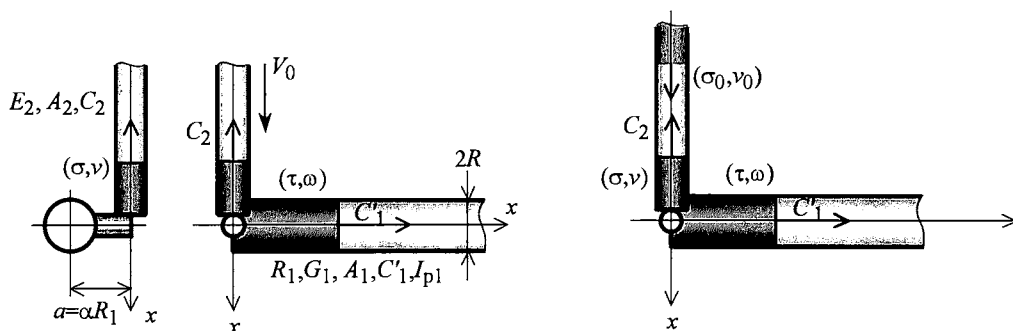
$$\tau = -\frac{1}{\alpha(1+\kappa)} \frac{V_0}{C'_1} G_1, \quad \omega = \frac{1}{1+\kappa} \frac{V_0}{l}, \quad \sigma = -\frac{\kappa}{1+\kappa} \frac{V_0}{C_2} E_2, \quad v = -\frac{\kappa}{1+\kappa} V_0 \quad (31)$$

$$\text{ただし、} \kappa = \frac{A_1 G_1 C'_1}{2\alpha^2 A_2 E_2 C_2}$$

ここで、 R_1 , A_1 , I_{p1} , G_1 , C'_1 はそれぞれ横棒の半径、断面積、断面極二次モーメント、横弾性係数及びせん断波の伝ば速度。 A_2 , E_2 , C_2 はそれぞれ落下棒の断面積、ヤング率及び縦波の伝ば速度である。 $\alpha = \alpha R_1$ はピンの長さであり、簡単のためにピンは剛体と仮定している。上式によれば τ は基本的にはピンの長さ α に逆比例する。すなわちピンが長くなると発生トルクは小さくなり静的な場合とは逆である事がわかる。

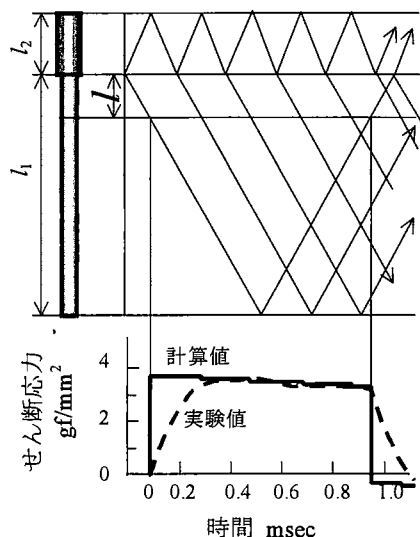
次に、落下棒中を伝ばする応力波 (σ_0 , v_0) がピンとの接触部に達するとき、ねじり応力波 (τ , ω) が横棒中に透過し、縦波 (σ , v) が落下棒中を引き返すとすれば透過率および反射率は次式となる。

$$\alpha_{22} = \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}, \quad \alpha_{21} = \frac{\tau}{\sigma_0} = \frac{4\alpha A_2}{A_1(1 + \kappa)} \quad (32)$$



(a)ねじり応力波の発生

(b)応力波の反射透過



$R_1=12.5\text{mm}$, $l_1=1900\text{mm}$, $\alpha=2.12$
 $R_2=20\text{mm}$, $l_2=540\text{mm}$
 $V_0=3.13\text{m/sec}$, $l=340\text{mm}$
 $C'_1=3170\text{m/sec}$, $C_2=5120\text{m/sec}$

(c)実験値との比較

図 11 棒にとりつけたピンの打撃によるねじり波

以上の結果を用いて、縦衝撃の場合と同様に、横棒に取り付けたピンを落下棒で打撃したとき横棒に生ずるせん断応力—時間関係を求め実験値と比較したものが図 11(c)である。各棒の寸法等は図中に示すとおりである。図を見れば、実験値と計算値は良く一致しており、図式解法の有用性がわかる。

V. おわりに

機械の高速化等にもない、耐衝撃設計がますます重要になってきている。衝撃荷重を受ける物体中には応力波が発生伝ばし、境界で反射・透過を繰り返すために、その挙動は複雑となる。例

えば、前面は打撃を受けて圧縮応力が生ずるのに対し後面には引張応力が発生し剥離が起きたりする。したがって、耐衝撃設計を行うためには、応力波の発生および伝ば現象について十分理解しておく必要がある。そのためには、いつも数値計算に頼るのではなく、問題を単純化し解析的に解を求め、その物理的意味を理解できるようにする必要がある。

以上の観点から、本文では、丸棒の縦衝撃を例に、応力波の発生と伝ば現象について解説し、図式解法によって衝撃応力を求める手法を示した。衝撃現象の理解と耐衝撃設計の一助と成れば幸いである。

参考文献

- 1) W. Goldsmith: Impact, Arnold(1960)
- 2) C.H.Norris et al.: Structural design for dynamic loads, McGraw-Hill(1959)
- 3) G.Herrmann & N.Perrone: Dynamic response of structures, Pergamon(1972)
- 4) H.Kolsky: Stress waves in solids, Dover(1963)
- 5) 林卓夫・田中吉之助: 衝撃工学, 日刊工業(1988)
- 6) 茶谷明義: 衝撃強度設計, 機械の研究, 41, 5(1989), 613.
- 7) DYNA3D, (株) 日本総合研究所
- 8) MARK, 日本マーク社 (株)
- 9) 中原一郎: 機械学会誌, 68, 552(1965), 7.
- 10) 松本浩之ほか: 機械学会論文集, 30, 215(1964), 759.
- 11) 茶谷・放生: 機械学会論文集, 44, 381(1978), 1445.