$\sum_{k=1}^{n} k^p$（ベルヌーイの多項式）のある帰納的構成

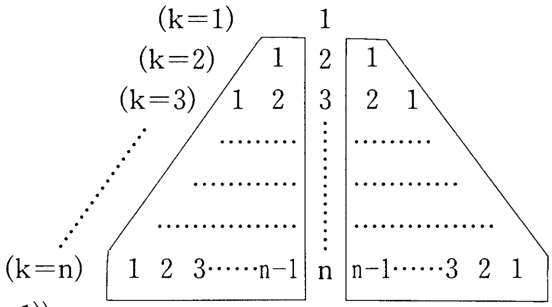
数学科　岡　山　正　歩

$\sum_{k=1}^{n} k^p$（以下これを B_p とかくことにする）は n の $p+1$ 次式となるが、この多項式はベルヌーイの多項式と呼ばれ古くから知られている。(例えば「数と式」遠山啓（講談社）) このノートは、多項式 B_p に関する興味ある結果に検討を加えて、定理の証明方法を主として、これを高等学校における数学の中で身近な存在として位置づけることを試みたものである。

新しい教育課程になって、数学Ⅰにおいて三角数・四角数が導入されたが、B_2、B_3の公式は、それぞれは $\frac{2n+1}{3}$ 個(？)、$\frac{n(n+1)}{2}$ 個の三角数に分割できることを教えている。k^2、k^3 をどのように分割したら、Σ記号を用いて計算することなく（そのことが〝個数の処理〟の目標の一つでもあるのだが……）これを説明できるか。証明のきっかけは、これを考えたことにある。

(Ⅰ)　B_2，B_3 の三角数による分割

(1)　$B_2=\frac{2n+1}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ の分割



$k^2=1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1$

であるから　$k=1\sim n$ を代入して右図のように並べる。

このとき

$S_n=1+2+3+\cdots\cdots+n$

$T_{n-1}=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+(n-1))$

とおくと

$B_2=S_n+2T_{n-1}$

である。ここで

$3T_{n-1}=(n-1)S_n$

が成り立つ。(右図)　したがって

$3B_2=3S_n+2(3T_{n-1})$

$\quad=3S_n+2(n-1)S_n=(2n+1)S_n$

である。

（T_{n-1} が 3 個）

$$
\begin{array}{l}
1\ \ 1_{+①}\ \ 2_{+①}\ \ 3_{+①}\cdots n-3_{+①}\ \ n-2_{+①}\ n-1_{+①}\\
1\ \ 2\ \ 1_{+②}\ \ 2_{+②}\ \ 3_{+②}\cdots n-3_{+②}\ \ n-2_{+②}\\
1\ \ 2\ \ 3\ \ 1_{+③}\ \ 2_{+③}\ \ 3_{+③}\cdots n-3_{+③}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
1\ \ 2\cdots\cdots n-3\ n-2\ \ 1_{+(n-2)}\ 2_{+(n-2)}\\
1\ \ 2\ \ 3\cdots\cdots n-2\ n-1\ \ 1_{+(n-1)}
\end{array}
$$

（(注)各行の総和が三角数の和である）

(2)　$B_3=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ の分割

$k^3=\{k+(k+k)+\cdots+\underbrace{(k+k+\cdots+k)}_{k-1\text{個}}\}+\{\underbrace{(1+2+\cdots+k)+(1+2+\cdots+k)+\cdots+(1+2+\cdots+k)}_{k\text{個}}\}$

即ち

k^3 は　$1+2+\cdots+(k-1)\left(=\frac{(k-1)k}{2}\right)$ 個の k と、k 個 の $1+2+\cdots+k\left(=\frac{k(k+1)}{2}\right)$ に分割される。$k=1\sim n$ を代入して各列ごとに加えると、それぞれの和が S_n であるから（次ページ図）

$(k=1)$ 1

$(k=2)$ 2 $1+2$ $1+2$

$(k=3)$ 3 3 3 $1+2+3$ $1+2+3$ $1+2+3$

……… ………………………………………………………

$(k=n)$ $\underbrace{n}_{1\text{個}}$ $\underbrace{n \quad n}_{2\text{個}}$ $\underbrace{n \quad n \quad n}_{3\text{個}}$ …… $\underbrace{n \cdots\cdots\cdots\cdots n}_{n-1\text{ 個}}$ $\underbrace{1+2+\cdots+n \ \cdots\cdots \ 1+2+\cdots+n}_{n\text{個}}$

したがって $B_3=(1+2+3+\cdots+n)S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}S_n$ である。

(II) B_4～B_9 の構成

(1) B_2 から B_4 へ

(I)(2)の k^3 の分割は $k^3=\dfrac{(k-1)k}{2}k+k\dfrac{k(k+1)}{2}$ と変形できることを根拠にしている。この右辺に注目して、等式

$$\frac{(k-1)k}{2}k^2+k(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)\left(=\frac{(k-1)k}{2}k^2+k\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)=\frac{5}{6}k^4+\frac{1}{6}k^2$$

を考える。両辺に $k=1$～n を代入して辺々を加えると、左辺は(I)(2)と同様に下図の総和であるから

$(k=1)$ 1^2

$(k=2)$ 2^2 1^2+2^2 1^2+2^2

$(k=3)$ 3^2 3^2 3^2 $1^2+2^2+3^2$ $1^2+2^2+3^2$ $1^2+2^2+3^2$

……… ………………………………………………………

$(k=n)$ $\underbrace{n^2}_{1\text{個}}$ $\underbrace{n^2 \quad n^2}_{2\text{個}}$ $\underbrace{n^2 \quad n^2 \quad n^2}_{3\text{個}}$ …… $\underbrace{n^2 \cdots\cdots\cdots\cdots n^2}_{n-1\text{個}}$ $\underbrace{1^2+2^2+\cdots+n^2 \ \cdots\cdots \ 1^2+2^2+\cdots+n^2}_{n\text{個}}$

各列の和が B_2 であることに注目すれば

$$\frac{n(n+1)}{2}B_2=\frac{5}{6}B_4+\frac{1}{6}B_2 \quad \text{より} \quad 5B_4=B_2\left(6\frac{n(n+1)}{2}-1\right)$$

となる。(このことは k^4 ではなくて $5k^4+k^2$ は、それぞれの k に対応して上図の各行の 6 個分に分割されて、その結果 B_4 ではなくて $5B_4+B_2$ が、上図の 6 個分即ち $6\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個のB_2 に分割されるということである。) したがって

$$B_4=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(\frac{6}{5}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n$$

(2) B_3 から B_5 へ

等式 $\dfrac{(k-1)k}{2}k^3+k(1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3)\left(=\dfrac{(k-1)k}{2}k^3+k\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}\right)=\dfrac{3}{4}k^5+\dfrac{1}{4}k^3$ において

$k=1$～n を代入して辺々を加えると

$$\frac{n(n+1)}{2}B_3=\frac{3}{4}B_5+\frac{1}{4}B_3 \quad \text{より} \quad 3B_5=B_3\left(4\frac{n(n+1)}{2}-1\right)$$

となる。したがって

$$B_5=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left(\frac{4}{3}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2$$

(3) $B_6 \sim B_9$ について

(1)、(2)と全く同様であるから、結果のみを記すことにする。

(B_6) $\frac{n(n+1)}{2}B_4=\frac{7}{10}B_6+\frac{1}{3}B_4-\frac{1}{30}B_2$

$$B_6=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left\{\frac{12}{7}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{6}{7}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{7}\right\}$$

$$=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n$$

(B_7) $\frac{n(n+1)}{2}B_5=\frac{2}{3}B_7+\frac{5}{12}B_5-\frac{1}{12}B_3$

$$B_7=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left\{2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{4}{3}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2$$

(B_8) $\frac{n(n+1)}{2}B_6=\frac{9}{14}B_8+\frac{1}{2}B_6-\frac{1}{6}B_4+\frac{1}{42}B_2$

$$B_8=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left\{\frac{8}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3-\frac{8}{3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{6}{5}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{5}\right\}$$

$$=\frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n$$

(B_9) $\frac{n(n+1)}{2}B_7=\frac{5}{8}B_9+\frac{7}{12}B_7-\frac{7}{24}B_5+\frac{1}{12}B_3$

$$B_9=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\left\{\frac{16}{5}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3-4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{12}{5}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{3}{5}\right\}$$

$$=\frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2$$

(III) 定理とその証明

多項式 B_p を割りきる因数や係数に共通する性質についてはよく知られていることであるが、それは(II)における結果から容易に予想できることでもある。これを一歩踏みこんで商についてまで言及すると定理の主張は次のようになる。

[定理] 多項式 $B_p(p\geqq 2)$ は n の $p+1$ 次式であり、

(1) p が偶数であるとき (*) B_2 を因数に持ち、商は $\frac{n(n+1)}{2}$ の $\frac{p-2}{2}$ 次式である。

(*) $n^{2i}(2i\leqq p)$ の係数は、$2i=p$ のときは $\frac{1}{2}$、その他のときは 0 である。

(2) p が奇数であるとき (*) B_3 を因数に持ち、商は $\frac{n(n+1)}{2}$ の $\frac{p-3}{2}$ 次式である。

(*) $n^{2i-1}(2i-1\leqq p)$ の係数は、$2i-1=p$ のときは $\frac{1}{2}$、その他のときは 0 である。

(証明)

数学的帰納法を用いる。pが偶数である場合について示そう。(pが奇数の場合については、同様であるから省略する。)

$p=2$のときは明らかに成りたつ。

pが偶数であるとして、p以下の偶数に対して定理が成りたつとき、$p+2$に対しても成りたつことを示そう。

$2i \leqq p$を満たすiに対して、$N=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $b_{2j}^{(2i)}$は$j \neq 1$のときすべて0であるとして

$$B_{2i}=B_2(a_1^{(2i)}N^{i-1}+a_2^{(2i)}N^{i-2}+\cdots+a_i^{(2i)})=b_1^{(2i)}n^{2i+1}+\frac{1}{2}n^{2i}+b_3^{(2i)}n^{2i-1}+\cdots+b_{2i+1}^{(2i)}n \quad \text{——— ①}$$

とする。このとき

$$\frac{(k-1)k}{2}k^p+k(1^p+2^p+\cdots+k^p)=\frac{(k-1)k}{2}k^p+k\left(b_1^{(p)}k^{p+1}+\frac{1}{2}k^p+b_3^{(p)}k^{p-1}+\cdots+b_{p+1}^{(p)}k\right)$$

$$=\left(b_1^{(p)}+\frac{1}{2}\right)k^{p+2}+b_3^{(p)}k^p+b_5^{(p)}k^{p-2}+\cdots+b_{p+1}^{(p)}k^2$$

と変形される。$k=1\sim n$を代入して辺々を加えると

$$\frac{n(n+1)}{2}B_p=\left(b_1^{(p)}+\frac{1}{2}\right)B_{p+2}+b_3^{(p)}B_p+b_5^{(p)}B_{p-2}+\cdots\cdots+b_{p+1}^{(p)}B_2 \quad \text{——— ②}$$

が成り立つ。仮定により　B_p, B_{p-2}, …, B_2はB_2を因数にもち商はNの多項式であるから、B_{p+2}もB_2を因数にもち商はNの多項式である。$B_p=B_2\times$(Nの$\dfrac{p-2}{2}$次式)であるから、

B_{p+2}の商は、Nの$\dfrac{p-2}{2}+1=\dfrac{(p+2)-2}{2}$次式である。

次に

$$(\text{②の左辺})=\frac{n^2+n}{2}\left(b_1^{(p)}n^{p+1}+\frac{1}{2}n^p+b_3^{(p)}n^{p-1}+b_5^{(p)}n^{p-3}+\cdots\cdots+b_{p+1}^{(p)}n\right)$$

であるから、pが偶数であることよりn^{2i}の形の項の和は

$\dfrac{1}{2}\left(b_1^{(p)}+\dfrac{1}{2}\right)n^{p+2}+\dfrac{1}{2}\left(b_3^{(p)}n^p+b_5^{(p)}n^{p-2}+\cdots\cdots+b_{p+1}^{(p)}n^2\right)$となり、この第2項は、仮定により②の右辺における$b_3^{(p)}B_p+b_5^{(p)}B_{p-2}+\cdots+b_{p+1}^{(p)}B_2$の$n^{2i}$の形の項の和に一致する。更に、$B_{p+2}$の係数は$b_1^{(p)}+\dfrac{1}{2}$、$n^{p+2}$の係数は$\dfrac{1}{2}\left(b_1^{(p)}+\dfrac{1}{2}\right)$であることに注目すれば、$B_{p+2}$の$n^{2i}(2i \leqq p+2)$の係数は$2i=p+2$のときは$\dfrac{1}{2}$、その他のときは0である。ゆえに示された。

(注)　B_pをnの$p+1$次関数と考えるとき、そのグラフの対称性についても既知のことであるが、それは、nを$-1-n$に置きかえたとき、$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$は符号のみ変わるが、$\dfrac{n(n+1)}{2}$は不変であることからもわかる。即ち、関数B_pのグラフはpが偶数のときは、点$\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$に関して対称であり、pが奇数のときは、直線$n=-\dfrac{1}{2}$に関して対称である。

(IV)　係数を決定する漸化式

(III)において、関係式②に関係式①を代入して、係数を決定する漸化式を行列表現したものが以下である。(III)と同様に、pが偶数である場合についてのみ記すことにする。
$a_j^{(p)}$ から $a_j^{(p+2)}$ をつくる、$b_{2j-1}^{(p)}$ から $b_{2j-1}^{(p+2)}$ をつくる漸化式はそれぞれ次の(1)、(2)である。

(1)

$$\left(b_1^{(p)}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} a_1^{(p+2)} \\ a_2^{(p+2)} \\ a_3^{(p+2)} \\ \vdots \\ a_{\frac{p}{2}}^{(p+2)} \\ a_{\frac{p+2}{2}}^{(p+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(p)} & 0 & \cdots & & & 0 \\ a_2^{(p)} & a_1^{(p)} & 0 & & & \vdots \\ a_3^{(p)} & a_2^{(p)} & a_1^{(p-2)} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\frac{p}{2}}^{(p)} & a_{\frac{p}{2}-1}^{(p)} & a_{\frac{p-2}{2}-1}^{(p-2)} & \cdots & a_1^{(4)} & 0 \\ 0 & a_{\frac{p}{2}}^{(p)} & a_{\frac{p-2}{2}}^{(p-2)} & \cdots & a_2^{(4)} & a_1^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -b_3^{(p)} \\ -b_5^{(p)} \\ \vdots \\ -b_{p-1}^{(p)} \\ -b_{p+1}^{(p)} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\left(b_1^{(p)}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} b_1^{(p+2)} \\ b_3^{(p+2)} \\ b_5^{(p+2)} \\ \vdots \\ b_{p+1}^{(p+2)} \\ b_{p+3}^{(p+2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1^{(p)} & 0 & \cdots & & & 0 \\ \frac{1}{2} & b_3^{(p)} & b_1^{(p)} & 0 & & & \vdots \\ 0 & b_5^{(p)} & b_3^{(p)} & b_1^{(p-2)} & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & b_{p+1}^{(p)} & b_{p-1}^{(p)} & b_{p-3}^{(p-2)} & \cdots & b_3^{(4)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 0 & b_{p+1}^{(p)} & b_{p-1}^{(p-2)} & \cdots & b_5^{(4)} & b_3^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -b_3^{(p)} \\ \vdots \\ -b_{p-1}^{(p)} \\ -b_{p+1}^{(p)} \end{pmatrix}$$

(*) B_2 から B_4 へ $\left(p=2\,;\,a_1^{(2)}=1\,;\,b_1^{(2)}=\frac{1}{3},\ b_3^{(2)}=\frac{1}{6}\right)$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} a_1^{(4)} \\ a_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(2)} & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} a_1^{(4)} \\ a_2^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} b_1^{(4)} \\ b_3^{(4)} \\ b_5^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1^{(2)} & 0 \\ \frac{1}{2} & b_3^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 0 & b_3^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix} b_1^{(3)} \\ b_3^{(4)} \\ b_5^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

(*) B_4 から B_6 へ

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} a_1^{(6)} \\ a_2^{(6)} \\ a_3^{(6)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^{(4)} & 0 & 0 \\ a_2^{(4)} & a_1^{(4)} & 0 \\ 0 & a_2^{(4)} & a_1^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} a_1^{(6)} \\ a_2^{(6)} \\ a_3^{(6)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} b_1^{(6)} \\ b_3^{(6)} \\ b_5^{(6)} \\ b_7^{(6)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & b_1^{(4)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & b_3^{(4)} & b_1^{(4)} & 0 \\ 0 & b_5^{(4)} & b_3^{(4)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 0 & b_5^{(4)} & b_3^{(2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} b_1^{(6)} \\ b_3^{(6)} \\ b_5^{(6)} \\ b_7^{(6)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{42} \end{pmatrix}$$

以下これを繰り返していけばよいのであるが、B_8 がわかっているので B_{10} を求めてみよう。

$$\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} a_1^{(10)} \\ a_2^{(10)} \\ a_3^{(10)} \\ a_4^{(10)} \\ a_5^{(10)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{8}{3} & \frac{12}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{6}{7} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{15} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} a_1^{(10)} \\ a_2^{(10)} \\ a_3^{(10)} \\ a_4^{(10)} \\ a_5^{(10)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{48}{11} \\ -\frac{80}{11} \\ \frac{68}{11} \\ -\frac{30}{11} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} b_1^{(10)} \\ b_3^{(10)} \\ b_5^{(10)} \\ b_7^{(10)} \\ b_9^{(10)} \\ b_{11}^{(10)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{7}{15} & \frac{2}{3} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & -\frac{7}{15} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{42} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{15} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} b_1^{(10)} \\ b_3^{(10)} \\ b_5^{(10)} \\ b_7^{(10)} \\ b_9^{(10)} \\ b_{11}^{(10)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{5}{6} \\ -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{66} \end{pmatrix}$$

したがって、

$$B_{10}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left\{\frac{48}{11}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4-\frac{80}{11}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3+\frac{68}{11}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{30}{11}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+\frac{5}{11}\right\}$$

$$=\frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n$$

となる。

次の表は B_{10}～B_{15} までのそれぞれの係数をコンピュータを用いて計算したものである。

	1	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^5$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^6$
B_{10}	$\frac{5}{11}$	$-\frac{30}{11}$	$\frac{68}{11}$	$-\frac{80}{11}$	$\frac{48}{11}$		
B_{11}	$\frac{5}{3}$	$-\frac{20}{3}$	$\frac{34}{3}$	$-\frac{32}{3}$	$\frac{16}{3}$		
B_{12}	$-\frac{691}{455}$	$\frac{4146}{455}$	$-\frac{1888}{91}$	$\frac{328}{13}$	$-\frac{240}{13}$	$\frac{96}{13}$	
B_{13}	$-\frac{691}{105}$	$\frac{2764}{105}$	$-\frac{944}{21}$	$\frac{656}{15}$	$-\frac{80}{3}$	$\frac{64}{7}$	
B_{14}	7	-42	$\frac{1436}{15}$	$-\frac{352}{3}$	$\frac{448}{5}$	$-\frac{224}{5}$	$\frac{64}{5}$
B_{15}	35	-140	$\frac{718}{3}$	$-\frac{704}{3}$	$\frac{448}{3}$	-64	16

	n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}	n^{11}	n^{12}	n^{13}	n^{14}	n^{15}	n^{16}
B_{10}	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$					
B_{11}	0	$\frac{5}{12}$	0	$-\frac{11}{8}$	0	$\frac{11}{16}$	0	$-\frac{11}{8}$	0	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$				
B_{12}	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{33}{10}$	0	$\frac{22}{7}$	0	$-\frac{11}{6}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{13}$			
B_{13}	0	$-\frac{691}{420}$	0	$\frac{65}{12}$	0	$-\frac{143}{20}$	0	$\frac{143}{28}$	0	$-\frac{143}{60}$	0	$\frac{13}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$		
B_{14}	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{691}{90}$	0	$\frac{91}{6}$	0	$-\frac{143}{10}$	0	$\frac{143}{18}$	0	$-\frac{91}{30}$	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{15}$	
B_{15}	0	$\frac{35}{4}$	0	$-\frac{691}{24}$	0	$\frac{455}{12}$	0	$-\frac{429}{16}$	0	$\frac{143}{12}$	0	$-\frac{91}{24}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$

（V） 2、3 の漸化式を解く

多項式 B_p の 2 通りの表現について、その係数からいくつかのことに気づくが、(IV)の(1)、(2)から得られる次の 4 つの漸化式を解いてみよう。

$$\left(b^{(p)}{}_1+\frac{1}{2}\right)a_1^{(p+2)}=a_1^{(p)} \text{ —— ①},\quad \left(b_1^{(p)}+\frac{1}{2}\right)a_2^{(p+2)}=a_2^{(p)}-b_3^{(p)}a_1^{(p)} \text{ —— ②}$$

$$\left(b_1^{(p)}+\frac{1}{2}\right)b_1^{(p+2)}=\frac{1}{2}b_1^{(p)} \text{—— ③}, \quad \left(b_1^{(p)}+\frac{1}{2}\right)b_3^{(p+2)}=\frac{1}{2}\left(b_3^{(p)}+\frac{1}{2}\right)-b_1^{(p)}b_3^{(p)} \text{—— ④}$$

（ただし、$a_1^{(2)}=1,\ a_2^{(4)}=-\frac{1}{5}$；$b_1^{(2)}=\frac{1}{3},\ b_3^{(2)}=\frac{1}{6}$）

(*) ③より　$b_1^{(p+2)}=\dfrac{b_1^{(p)}}{2b_1^{(p)}+1},\ b_1^{(2)}=\dfrac{1}{3}$

帰納法を用いて、$b_1^{(p)}=\dfrac{1}{p+1}$ が示せる。(B_p の n^{p+1} の係数)

(*) これを①に代入して　$(p+3)a_1^{(p+2)}=2(p+1)a_1^{(p)},\ a_1^{(2)}=1$　したがって　$(p+1)a_1^{(p)}=3\cdot 2^{\frac{p}{2}-1}$

ゆえに　$a_1^{(p)}=\dfrac{3}{p+1}\cdot 2^{\frac{p}{2}-1}$ である。(B_p の $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{p-2}{2}}$ の係数)

再び④に代入して整理すると $(p+3)b_3^{(p+2)}=(p-1)b_3^{(p)}+\dfrac{p+1}{2},\ b_3^{(2)}=\dfrac{1}{6}$

帰納法を用いて、$b_3^{(p)}=\dfrac{p}{12}$ が示せる。(B_p の n^{p-1} の係数)

(*) 以上を②に代入して整理すると

$$(p+3)a_2^{(p+2)}=2(p+1)a_2^{(p)}-p\cdot 2^{\frac{p}{2}-2},\ a_2^{(4)}=-\frac{1}{5}$$

ところで、数列　$a_2^{(4)},\ a_2^{(6)},\ a_2^{(8)},\ \cdots\cdots$ は、$-\frac{1}{5},\ -\frac{6}{7},\ -\frac{24}{9},\ -\frac{80}{11},\ -\frac{240}{13},\ -\frac{672}{15},\ \cdots\cdots\cdots$

となり、分子の数列は、$1\times 2^0,\ 3\times 2^1,\ 6\times 2^2,\ 10\times 2^3,\ 15\times 2^4,\ 21\times 2^5,$ ……………となる。

帰納法を用いて、$a_2^{(p)}=-\dfrac{1}{p+1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{2}-1\right)\dfrac{p}{2}\cdot 2^{\frac{p}{2}-2}$ が示せる。(B_pの $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{p-4}{2}}$ の係数)

この分子の数列の第n項の左側の因子は、n 番目の三角数の総和である。またこれらを利用して以下の漸化式を考えるとき、$(p+3)(p-1)b_5^{(p+2)}=(p+1)(p-3)b_5^{(p)}-\frac{1}{72}p^2(p+1)(p-1)$, ……などの関係式が次々につくられていく。このつくられた方にもルールがあるようで熟考の余地を残すが、所期の目的を達したので、このあたりで取りあえずこのノートは終えることとする。