ある双対性の周辺について

デザルグの定理から メネラウスの定理・チェバの定理へ

数 学 科 岡 山 正 歩

新しい教育課程での授業元年である。数学Aの平面幾何において，メネラウスの定理・チェバの定理を学習する。私自身の不勉強を恥じなければならないが，これまでにこの２つの定理の持つ数学的な背景について考える機会を一度も持ったことがなかった。定理が双対の関係にあると言われていることに対して少しの知識があった。だから，その一般的になされているいくつかの証明方法に対して，釈然としないものを感じてきた。過去の経験から，双対の関係にある主張の証明は，概念の対応関係を明らかにすることによって，実に美しく自然に流れていくという心象があったからである。このノートは，そういう日常の漠然とした問題意識を私なりに鮮明にしようとする試みの中で書かれたものである。結果的には定理の拡張を試みた形になったが，解釈や捉え方に未熟な点があるかと思われる。一読いただいてご意見がいただけたら幸いである。

０．はじめに

メネラウスの定理・チェバの定理は，通常，一つの三角形と一つの直線，一つの三角形と一つの点に関する主張となっている。それぞれを，４つの直線，４つの点の結びつきに関する主張であると考えるようになったのは，(射影)幾何の公理論的構成の中で生まれた発想で（19世紀以降)，双対原理についても，その中で得られたことであると思われる。その(射影)幾何において重要な役割を果たしているデザルグの定理もまた，再検討され再評価を受けている。

結論的な言い方をすれば，デザルグの定理が自己双対性を持っているために，メネラウスの定理・チェバの定理は双対の関係にあると考えることができる。メネラウスの定理の図形からチェバの定理の図形をつくることができること，その逆も可能であること，それを根拠づけるものがデザルグの定理とその逆であると考えられる。双対のイメージを大切にして証明を試みて，主張の数量的な扱いの部分は射影変換の不変量として考えた。ある特殊な射影によって図形上のいくつかの点を無限遠点に飛ばして考えると，等式は平行線の性質を利用して導かれ，それはまた定理の直観的な理解を容易にするものであった。

第１節では，射影平面の発想はいかにして生まれてきたかについて思いを巡らした。射影平面のイメージと，射影することの意味などあれこれについて考えてみた。射影幾何の公理と双対の原理についても紹介した。

第２節では，定理は通常どのようにして主張されているかについて紹介した。それらを射影幾何の公理と双対の原理に忠実に，双対であることが鮮明になる表現に改め，通常の定理の拡張として認識するためにいくつかの補足を考えた。デザルグの定理の背景について言及した。

第３節では，証明の準備のために，射影変換の不変量に関する２つの結果について紹介した。それを用いて証明を試み，定理とその逆も含めた相互の関係について考えてみた。公理論的展開の原点に立って，必要とする知識を最小限にとどめた。

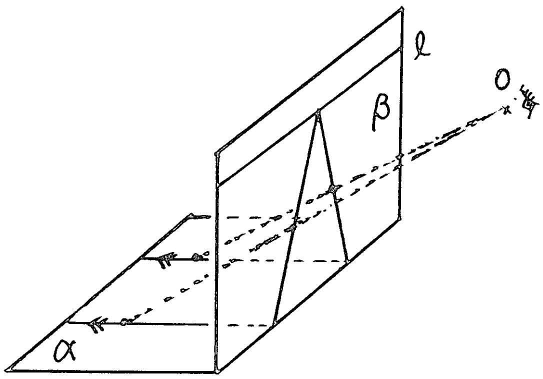
言うまでもなく，この双対性の背景には数学の思想の革命的な転換を示唆するものがあり，それが現代数学の射影空間の理論へと発展していったものと思われる。そういう味わいを持てたことは喜びであったが，図や直観に頼る部分を重視したために数学的な精密さを欠く部分を十分に補っていないことをお許しいただきたい。

2．射影幾何における直線，平面，空間と平面射影幾何の公理

Menelaos(98(？)～)とG. Ceva(1647～1734)。しばしば，G. Desargues(1593～1662)も含めて，彼等による定理は私達の間でよく同時に話題になってきた。彼らが1500年もの時を隔てた時代に生きたことを改めて思うとき，心地よい驚きを感ずるのである。本職は機関士であったというチェバ。彼もまた地平線の彼方で交叉するレール上を走りながら，ユークリッドの平行線公理と苦闘していたのであろうか。1500年の時の流れの中に，新しい幾何学が萌芽期を迎えるための苦悩があったことは想像に難くない。

射影幾何の起こりは，ルネッサンス期の絵画芸術にあると言われている。実体を正確に絵画面に表現しようとして，透視画法(遠近法)という手法を生み出したと言う。([1])

例えば右図において，平面α上にある現実の世界は，透明なスクリーンである平面β上に，点Oにある人間の目を通してどのように写るのであろうか。透視画法とは，平面β上に格子を目盛り，正確に写しとるために絵画面を同じ格子状に目盛り，そこにスクリーンβ上の世界を写しとる，そのような類いのものであったようである。このとき地平線は，平面β上の目の高さにある直線lとして写る。また図にあるような平行線は直線l上の一点で交叉すると考えられる。



(図Ｉ)

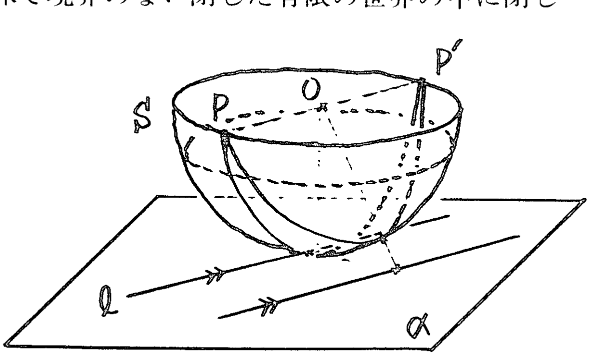
この手法を用いれば，無限遠にあるものはすべて，有限の世界に引き寄せられたものとして描かれる。その結果，すべての直線は交わらざるを得なくなってしまう。この事実を数学の中に持ち込んだのが射影幾何である。無限遠点，無限遠直線という抽象的概念を導入して，平行線を無限遠点で交わる直線であるとする考えは，同時代に生きたJ. Kepler(1571～1630)とデザルグに始まると言われている。([1])

射影平面は，次のようなものとして考えられる。([1])

＊ユークリッド平面上のすべての直線に無限遠点と称する１点を抽象的に付け加える。
＊ユークリッドの意味で互いに平行な直線は，すべて同一の無限遠点を通る。
＊平行でない直線上にある無限遠点の全体は，無限遠直線と称する直線である。

これに加えて用語の，平面を空間に，直線を平面に，点を直線に置き替えて得られるものが射影空間であると考えればよい。したがって上の図において，平面αやβは射影空間の中の射影平面と考えることもできるであろうし，射影空間の中に埋め込まれたユークリッド空間の中のユークリッド平面とも考えられる。こうして，射影平面(空間)は，境界のない無限の広がりを持ったユークリッド平面(空間)を，球面のような意味で境界のない閉じた有限の世界の中に閉じこめてしまった。ユークリッドの平行線公理からの解放の第一歩であった。

(註)　半球面Sの，Sの中心Oから平面α上への射影を考える。これによって平面αは，Sの縁を除いたものと同一視される。この同一視によって図中の直線lおよびそれに平行なα上の直線のすべてに付け加えられる無限遠点は，点P，P′を同一視したものと考えればよい。無限遠直線は，Sの縁について点Oに関する対称点

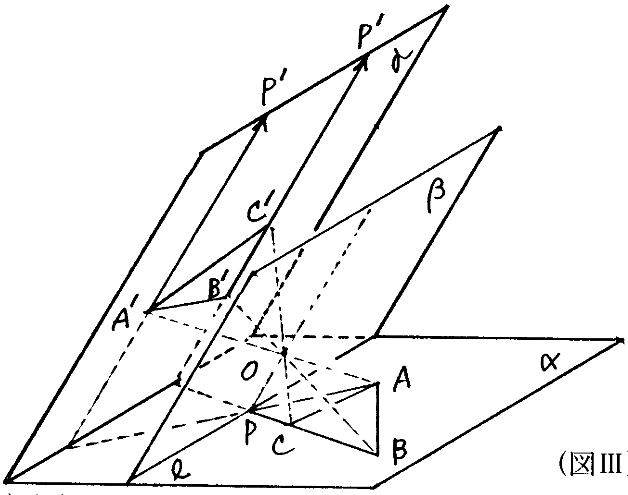


(図II)

を同一視したものである。射影平面上の直線は，それのみを考えれば円周である。射影平面をSからこの同一視によって得られると考えて，これを図中の点線に沿って２つに分ける。Sの縁のある方はメービウスの帯になっていることはよく知られた事実である。

図Ｉにおいて，点Oを通る直線上で平面α上の点を平面β上の点に写すことを，平面αの平面βへの点Oからの射影という。円錐曲線のいくつかの性質が，射影を介して円の性質から導かれたように，それが通常の意味で図形の性質の研究に大きな役割を果たしてきたことは言うまでもない。このことに加えて，後々のために注目したいのは，無限遠にある点，直線，平面が，それによって有限に引き寄せられ，実体を伴うものとなった点である。

例えば，右図において，平面αと平面βの交線をlとし，l上に点Pをとる。平面γはβに平行であるとして，β上の点Oから，αのγへの射影を考える。この射影には次の性質がある。



(図III)

＊Pで交わるα上の２直線は，γ上の平行な２直線に写る。したがって点Pはこの射影によるγ上のある無限遠点の逆像であり，lはγにつけ加えられた無限遠直線の逆像となる。Oを固定してβ，γを動かすとαとの交線上の点はすべて上の性質をもつ。このときαはγの逆像と考えられる。

＊α上の△ＡＢＣはこの射影によって，γ上の△A′B′C′に写るとすれば△ＡＢＣがlのどちらにあるかにより、その一方では頂点の回転の向きが逆になる。

これらの事実は一体何を意味するのであろうか。射影空間では平行でない平面上にある無限遠直線の全体は無限遠平面をつくる。この無限遠平面に近いγを(一部を)lに近いαに見ているということである。lの近しはγにつけ加えられた無限遠直線の近くの逆像となっている。したがって，我々は無限遠直線によって両極端が繋げられた平面のかつて無限遠であった近くを，α上のlに近い両側に(局所的に)見ているということになる。△ＡＢＣの回転の向きに関する注意は両極端の繋がり具合いを示唆するものである。

この射影については，〔2〕が示唆を与えてくれた。言及される定理には，一直線上に並ぶいくつかの点があり，その点で交叉する２直線がよく現われる。後述するようにその図形を，この射影を介して眺めたことで，自らの疑問に一応の納得が得られた。

すべての幾何学を最も単純にしてしまうと，点，直線，平面のみを対象にして，点を通る直線や平面をつくること，平面や直線の上にある直線や点をつくることが本質的であるものになってしまう。これらの結びつきのみを考えようとする幾何学から，すべての幾何学が始まるとする立場は自然に受けとめることができる。それが射影幾何である。1899年，D. Hilbert(1862～1943)は，彼の「幾何学基礎論」(〔3〕)の中で，ユークリッド幾何を原論の不備を補って５種の公理系によって組み立てた。平面上の射影幾何は，その中の結合の公理系と同様の形の，次の４つの結合の公理系のみで展開される。(〔4〕を参考にした。)

(＊)　基本的な対象としての無定義元として「点」，「直線」をとり，これらの間に成りたつ無定義関係として「結びつく」をとる。

結合の公理　(Ⅰ)　結びつかない点と直線が存在する。

(Ⅱ)　すべての直線は，少なくとも異なる3点に結びつく。

(Ⅲ)　任意の異なる2点に対し，これに結びつくただ1つの直線が存在する。

(Ⅳ)　任意の異なる2直線に対し，これに結びつくただ1つの点が存在する。

これらの公理から，次の定理が導かれる。

(Ⅴ)　すべての点は，少なくとも異なる3直線と結びつく。

(註)　公理(Ⅰ)の点をP_0，直線をl_0とする。証明は，任意の点PがP_0の場合と，P_0と異なるときは，Pがl_0と結びつく場合と結びつかない場合について示せばよい。(以下省略)

これらの(Ⅰ)から(Ⅴ)において，「点」「直線」という用語を互いに入れ替える。このとき，(Ⅰ)は(Ⅰ)自身に，(Ⅱ)は(Ⅴ)に，(Ⅲ)は(Ⅳ)に，(Ⅳ)は(Ⅲ)に，(Ⅴ)は(Ⅱ)に入れ替わる。したがって，同一の公理系が再びできる。このことは，これらの公理のみを用いて示されるすべての命題に対して，次が成りたつことを意味している。

双対の原理　射影平面上で，ある命題が成り立てば，その命題の中の点と直線を入れ替えた命題もつねに成り立つ。(このような関係にある命題を双対命題，双対性を持っている命題などと言う。)

(註)　公理の表現において，無定義関係として「結びつく」という用語を使っているのは，それが点から見ても直線から見ても同等の言葉として使えるからである。通常，点が直線に結びつくときは「点は直線の上にある」，直線が点に結びつくときには「直線は点を通る」という表現になる。これらを双対に注目して日常用いている用語で表現すると，

＊直線l_1，l_2の上にある点(直線l_1，l_2の交点)↔点P_1，P_2を通る直線(直線P_1P_2)

＊3点P，Q，Rは直線lの上にある。(一直線上にある。共線である。)

↔3直線l_1，l_2，l_3は点Pを通る。(一点で交わる。共点である。)

などとなる。

3．定理の主張と双対表現に対する検討，デザルグの定理の背景

3つの定理を教科書ではどのように扱っているか，主要な5，6冊について調べてみた。デザルグの定理については唯一，1冊の章末の問題の中にあるのみであった。メネラウスの定理・チェバの定理について，学習の順序，定理の表現とそこに現われる等式の記述の仕方，定理の逆の扱い方，証明の方法などに注目してみた。それらについて言及することはこのノートの目的ではないので省略するが，編集者の教育的配慮に対するそれぞれの考えを読みとることができた。証明の方法は章の構成と展開に深い関わりを持っているという印象を受けた。

定理は，通常次のように表現される。(〔5〕を参考にした。)

(M)　メネラウスの定理とその逆

△ABCにおいて，直線BC，CA，AB上にそれぞれ点P，Q，Rをとる。ただし，点P，Q，Rは△ABCのいずれの頂点とも異なるものとし，3つともまたは1つが辺の延長上にあるものとする。このとき，3点P，Q，Rが共線であるならば，等式$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$が成りたつ。この逆も成りたつ。

(C)　チェバの定理とその逆

△ABCにおいて，直線BC，CA，AB上にそれぞれ点P，Q，Rをとる。ただし，点P， Q，Rは△ABCのいずれの頂点とも異なるものとし，3つともまたは1つが辺上にあるものとする。このとき，3直線AP，BQ，CRが共点であるか，または互いに平行であるならば，等式$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$が成りたつ。この逆も成りたつ。

（註）　3点P，Q，Rの配列に対する仮定の叙述が煩雑であるため，この仮定を省いて，等式を有向距離の比の値を用いて表わすという方法もあることはよく知られている。（〔5〕）

（D）　デザルグの定理とその逆

△ABCと△A′B′C′において，直線ABとA′B′，BCとB′C′，CAとC′A′の交点をそれぞれP，Q，Rとする。このとき，3直線AA′，BB′，CC′が共点であるならば，3点P，Q，Rは共線である。この逆も成りたつ。

これらの定理を，結合の公理と双対原理に注目しながら表現を改めた。純粋に射影幾何として扱える部分は定理の前半のみで，主張の数量的な部分は，言うまでもなく結合の公理のみでは解決できない。射影平面を，ユークリッド平面が埋め込まれた平面と考えて，無限遠が関係する図形は有限で構成されるユークリッド平面上の図形の極限として考える。等式もまた，このときの極限として扱うのが自然である。

（$\widetilde{\mathrm{M}}$）　メネラウスの定理とその逆

異なる3直線の組（l_1，l_2，l_3）がある。直線l_2とl_3，l_3とl_1，l_1とl_2の上にある点をそれぞれA，B，Cとし，直線l_1，l_2，l_3の上にある点をそれぞれP，Q，Rとする。ただし，P，Q，RはA，B，Cのいずれとも異なるものとする。このとき，3点P，Q，Rが共線であるならば，等式$(-1)^{\varepsilon}\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=-1$が成りたつ。この逆も成りたつ。

（$\widetilde{\mathrm{C}}$）　チェバの定理とその逆

異なる3点の組（A，B，C）がある。点BとC，CとA，AとBを通る直線をそれぞれl_1，l_2，l_3とし，点A，B，Cを通る直線をそれぞれp，q，rとする。ただし，p，q，rはl_1，l_2，l_3のいずれとも異なるものとする。このとき，3直線p，q，rが共点であるならば，等式$(-1)^{\varepsilon}\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$が成りたつ。この逆も成りたつ。（ただし，点P，Q，Rはそれぞれ，直線l_1とp，l_2とq，l_3とrの上にある点である。）

（＊）　通常の定理の拡張として認識するための補足。

（ア）　定理における点，直線は無限遠点，無限遠直線である場合も含む。射影平面上の直線は両端で繋（つな）がっている（閉じている）から，線分は一意には定まらない。したがって線分は，射影平面を無限遠直線に沿って切り開いた縁のあるユークリッド平面上で考える。この場合でも例えば点Bが無限遠点であるとすると線分ABは一意には定まらない。しかしこの平面上の△ABCをユークリッド平面上の三角形の極限の図形と考えると△ABCがつくれるような線分AB，BC，CAの組は定まる（一意ではない）。

（イ）　等式の記述については，双対のイメージを大切にして表現したつもりである。係数$(-1)^{\varepsilon}$は，それに続く式の中で，この場合は点P，Q，Rがそれぞれ線分BC，CA，ABの外分点であるか否かにより，その個数が偶数ならば＋1を，奇数ならば－1を表わすものとする。（有向距離の考えと本質的には同じである。（〔5〕））

（ウ）　点A，B，C，P，Q，Rは無限遠点となることもあるので，ユークリッド平面におけ

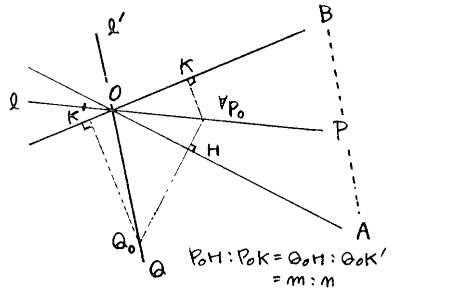
る内分点，外分点の定義を次のように拡張する。

・点A，Bが無限遠点でないとき，線分ABを1：1に外分する点は無限遠点である。

・点Bが無限遠点であるとき，線分ABをk：∞に内分する点PをAP＝kで定める。線分ABをk：∞に外分する点Qは，点Aに関する点Pの対称点である。

（註）　一般に線分ABをm：n($m<n$)に内分，外分する点をそれぞれC，Dとすると，線分CDを$n-m$，$n+m$に内分，外分する点がそれぞれA，Bである。この場合，線分PQを$\infty-k$：$\infty+k$＝1：1に内分，外分する点がそれぞれA，Bであるから，定義は一つの妥当性を持っている。

・ユークリッド平面上の平行でない2直線に付加された無限遠点をそれぞれA，Bとする。線分ABをm：nに内分する点P，外分する点Qはそれぞれ，直線上の任意の点から下ろした垂線の長さがm：nであるようなl，l'に付加された無限遠点である．(図Ⅳ)



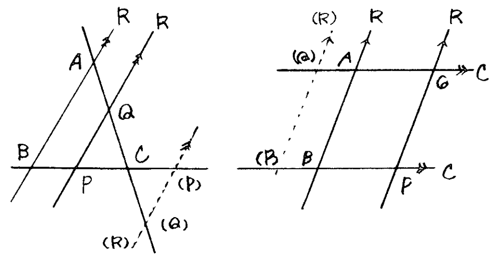
(図Ⅳ)

（エ）　定理は，平面図形に関するいくつかのよく知られた結果を含んでいる。メネラウスの定理の特別な場合を図Ⅴで表現した。

左はタレスの定理である。

Rが無限遠点のとき，$\dfrac{AR}{RB}=1$でRは外分点より

$(-1)^{\varepsilon}\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$である。



即ちAB∥PQならばBP:PC＝AQ:QCである。

(図Ⅴ)

右は平行四辺形であるための条件である。CとRが無限点のとき，

$\dfrac{AR}{RB}=1$より$(-1)^{\varepsilon}\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$である。$\dfrac{CQ}{PC}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$より$\dfrac{BP}{QA}=1$である。

即ち，AB∥PQかつAQ∥BPならばAQ＝BPである。

$(\widetilde{\mathrm{D}})$　デザルグの定理とその逆

すべてが異なる3点の組(A，B，C)と(A′，B′，C′)とがある。点BとC，CとA，AとB，B′とC′，C′とA′，A′とB′を通る直線をそれぞれl_1，l_2，l_3，l_1'，l_2'，l_3'とする。いま点AとA′，BとB′，CとC′を通る直線をそれぞれa，b，cとし，直線l_1とl_1'，l_2とl_2'，l_3とl_3'の上にある点をそれぞれP，Q，Rとする。このとき，3直線a，b，cが共点であるならば，3点P，Q，Rは共線である。この逆も成りたつ。

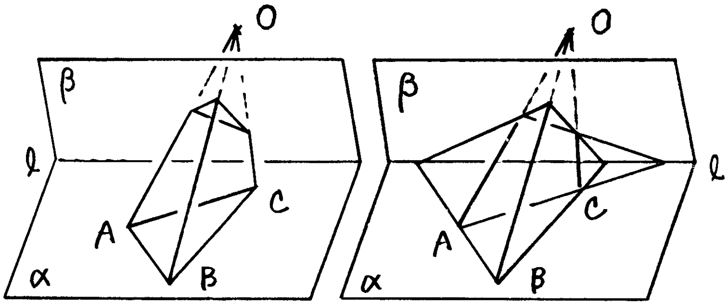
$(\widetilde{\mathrm{D}})'$　デザルグの定理とその逆の双対

すべてが異なる3直線の組(l_1，l_2，l_3)と(l_1'，l_2'，l_3')とがある。直線l_2とl_3，l_3とl_1，l_1とl_2，l_2'とl_3'，l_3'とl_1'，l_1'とl_2'の上にある点をそれぞれ，A，B，C，A′，B′，C′とする。いま，直線l_1とl_1'，l_2とl_2'，l_3とl_3'の上にある点をそれぞれP，Q，Rとし，点AとA′，BとB′，CとC′を通る直線をそれぞれa，b，cとする。このとき，3点P，Q，Rが共線であるならば，3直線a，b，cは共点である。この逆も成りたつ。

デザルグの定理の双対は，デザルグの定理の逆である。定理とその逆を含む主張は，双対をとればそれ自身になる。即ち自己双対となっている。

射影幾何の定理は，４つしかない結合の公理の上に成立するものであるから多くはないと想像できる。したがって，それ自身とても原始的なものであると考えられる。デザルグの定理には以下のような背景があることを知り得た。

右の２つの図は，〔6〕からの引用である。平面αとβが直線lで交わっている。α上の△ABCを点Oからβ上に射影したものである。左図は何となくお粗末で，三角形が平面上にあるようには見えにくい。図に整合性を持たせたのが右図で，その状況を主張する定理がデザルグの定理である。結合の公理を用いた証明については，〔6〕を参考にしていただきたい。証明にかかわる本質は，異なる２平面(図の平面α，β)は一直線で交わること，平面(図の４点A，B，A′，B′,の決定する平面など)とその上にない直線(図の直線l)は１点で交わることにある。同一平面上にある２つの三角形に対するこの定理を証明するためには，一方をある種の方法を用いて上の図のようにして別の平面に置くという方法をとらない限り不可能であるようである。(以下の(註)) それ故に平面上の射影幾何においては，デザルグの定理は第Ｖ番目の公理として公理系の中に組み込まれている。(〔6〕)



(図Ⅵ)

(註) 証明の手法として何を用いてもよいとするのなら，よく知られているように，それは容易である。不可能であるという意味は，あくまで公理的な理論構成の立場に立てば，ということである。デザルグの定理が成立しえない幾何が，F. Klein(1849～1925)や先のヒルベルトによって構成されているが，〔6〕を参考にしていただきたい。

ユークリッド幾何におけるデザルグの定理も，合同の公理なしに証明は不可能であることが，具体的な構成例によって示されているようである。(〔4〕による。) 証明の中に合同の公理がどのように用いられているかについては〔5〕を参照していただきたい。

射影幾何においては２点が共線であること，２直線が共点であることは自明である。したがって，２点を与えて共点である２直線をつくること，２直線を与えて共線である２点をつくることも自明である。共線である３点を与えて共点である３直線をつくること，共点である３直線を与えて共線である３点をつくることに言及した定理がデザルグの定理であると考えれば双対であることの意味がより鮮明になるのではないだろうか。

４．定理の証明

(Ⅰ) ２つの準備

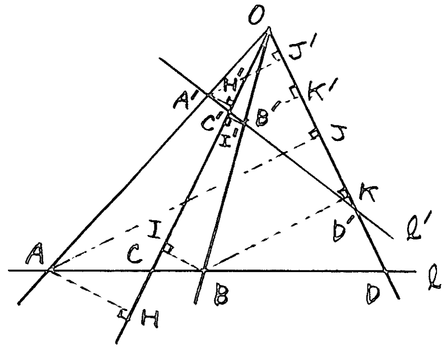
(T_1) 点Oからの射影によって直線l上の点(A，B；C，D)が直線l'上の点(A′，B′；C′，D′)に写るとする。点C，Dがそれぞれ線分ABを同じ比に，内分，外分する点であれば，点C′，D′はそれぞれ線分A′B′を同じ比に内分，外分する点である。即ち $\frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}$ ならば

$\frac{A'C'}{C'B'}=\frac{A'D'}{D'B'}$ である。

(略証)　$\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{AD}{DB}$とすると一般的には右図のようになるから，$\dfrac{AH}{BI}=\dfrac{AJ}{BK}$　即ち　$\dfrac{AH}{AJ}=\dfrac{BI}{BK}$である。

$\dfrac{AH}{AJ}=\dfrac{A'H'}{A'J'}$，$\dfrac{BI}{BK}=\dfrac{B'I'}{B'K'}$　より　$\dfrac{A'H'}{A'J'}=\dfrac{B'I'}{B'K'}$

即ち　$\dfrac{A'H'}{B'I'}=\dfrac{A'J'}{B'K'}$　である。　∴　$\dfrac{A'C'}{C'B'}=\dfrac{A'D'}{D'B'}$



(図Ⅶ)

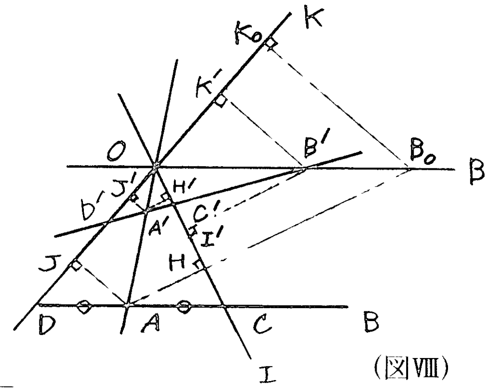
(註)　第2節で拡張した内分，外分の定義でこの結果の成立することが示される。参考までに一例について解説しておく。(図Ⅷ)

Bが無限遠の場合

点Bが無限遠点の場合は垂線の足Ｉ，Ｋも無限点である。したがって，第3節における定義を用いると，

$\dfrac{BI}{BK}=\dfrac{B'I'}{B'K'}=\dfrac{B_0H}{B_0K_0}$　である。

証明はこのことに注目して，上の略証と同様にしてなされるが，$\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{AD}{DB}$　から　$\dfrac{AH}{AJ}=\dfrac{BI}{BK}$　に形式的に変形することにためらいがある。



(図Ⅷ)

しかし，AC＝ADより$\dfrac{AJ}{B_0K_0}=\dfrac{AH}{B_0H}$即ち$\dfrac{AH}{AJ}=\dfrac{B_0H}{B_0K_0}$

であるから矛盾が生じない。ここにも内分点C，外分点Dの定義(C，DはAに関して対称)の妥当性がある。

一般的な言い方をすれば，(T_1)は1直線上の4点の複比(非調和比)は射影交換の不変量である，となる。上で述べたような4点の列を調和点列と言うが，射影変換は調和点列を保つ，ということができる。(〔1〕)

次はボンスレの定理の特別の場合である。(定理については〔1〕を参照のこと)

(T_2)　点Oからの射影によって，直線l_1，l_2，l_3が直線l_1'，l_2'，l_3'にそれぞれ写るとする。直線l_2とl_3，l_3とl_1，l_1とl_2の交点をそれぞれA，B，Cとし，これらと異なる点P，Q，Rをそれぞれl_1，l_2，l_3上にとる。A～Rがこの射影によってA′～R′に写るとすると

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{B'P'}{P'C'}\cdot\frac{C'Q'}{Q'A'}\cdot\frac{A'R'}{R'B'}$$

が成り立つ。(即ちこの値は射影変換の不変量である。)

(略証)　一般的には点H～M′を垂線の足として，

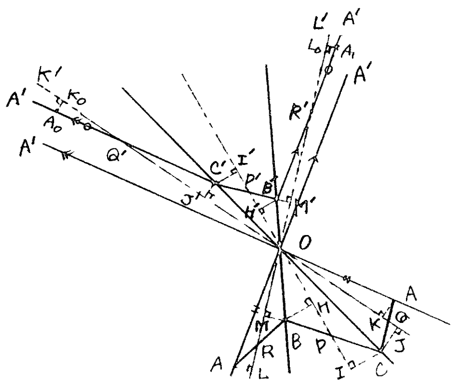
$$左辺=\frac{BH}{CI}\cdot\frac{CJ}{AK}\cdot\frac{AL}{BM}=\frac{BH}{BM}\cdot\frac{CJ}{CI}\cdot\frac{AL}{AK}$$

$$=\frac{B'H'}{B'M'}\cdot\frac{C'J'}{C'I'}\cdot\frac{A'L'}{A'K'}=\frac{B'H'}{C'I'}\cdot\frac{C'J'}{A'K'}\cdot\frac{A'L'}{B'M'}$$

＝右辺　となる(図省略)

(註)　右図はA′が無限遠点の場合である。このとき，

定義より$\dfrac{A'L'}{A'K'}=\dfrac{A_1L_0}{A_0K_0}$であるから$\dfrac{C'J'}{A'K'}\cdot\dfrac{A'L'}{B'M'}$



(図Ⅸ)

$=\dfrac{C'J'}{A_0K_0}\cdot\dfrac{A_1L_0}{A_0K_0}=\dfrac{C'Q'}{Q'A_0}\cdot\dfrac{A_1R'}{R'B'}=\dfrac{C'Q'}{R'B'}$，一方，$\dfrac{C'Q'}{Q'A'}\cdot\dfrac{A'R'}{R'B'}=\dfrac{C'Q'}{R'B'}$であるから矛盾は生じない。

(II)　図形を双対にうつす方法

メネラウスの定理の図形から，どのようなチェバの定理における図形(双対図形)を考えるかについて以下に述べる。無限遠点が関係しているために複雑に思うかもしれないが，メネラウスの定理の図形にはどのような場合が考えられるかについて述べる。

$l_1\sim l_3$の中に無限遠直線がある場合，外分点の個数が１個，３個の場合がある。以下は，$l_1\sim l_3$の中に無限遠直線がない場合である。

(1)　l_1，l_2，l_3のどの２つも無限遠点を通らない場合
　P，Q，Rのいずれもが無限遠点ではなく，外分点の個数が　(ア)１個，(イ)３個
　P，Q，Rの中に無限遠点があって，外分点の個数が　(ウ)１個，(エ)３個

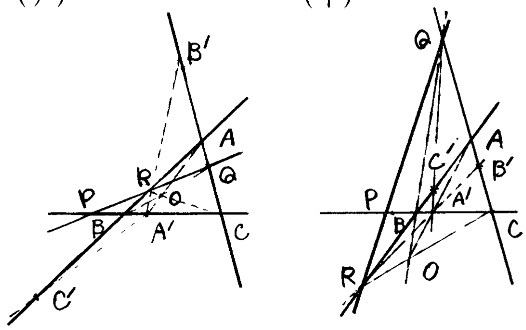
(2)　l_1，l_2，l_3の２つが無限遠点を通る場合(A，B，Cは異なるから２つのみである。)
　P，Q，Rのいずれもが無限遠点ではなく，外分点の個数が　(オ)１個，(カ)３個
　P，Q，Rの中に無限遠点があって，外分点の個数が　(キ)１個，(ク)３個

(註)　図は省略するが(ウ)(キ)についてはその１個は無限遠点，(エ)(ク)については無限遠点が１個の場合と３個の場合がある。

以上であるが，無限遠点のある場合に対する内分，外分に対しては，第２節で述べた定義に従い，以下に述べる方法を実行して双対図形をつくればよい。無限遠点がある場合でも基本的には次の手順を守ればよいので標準的な(ア)，(イ)の場合についてその手順を述べることにする。右図において

①　BQとCRの交点をOとする。
②　AOとl_1との交点をA′とする。
③　A′Rとl_2との交点をB′とする。
④　A′Qとl_3との交点をC′とする。

(ア)　　(イ)



(図X)

こうしてデザルグの定理を適用すれば３点B′, C′, Pは共線であるから△ABCと△A′B′C′に対して，再びデザルグの定理の逆を適用すればよい。

即ち，メネラウスの定理における直線l_1，l_2，l_3と３点P，Q，Rを通る４直線に対応する双対図形は，上述の構成によって得られる，３点A，B，Cと直線AA′，BB′，CC′の交点によって作られる。この逆をたどれば，チェバの定理の図形を双対にうつすことができる。

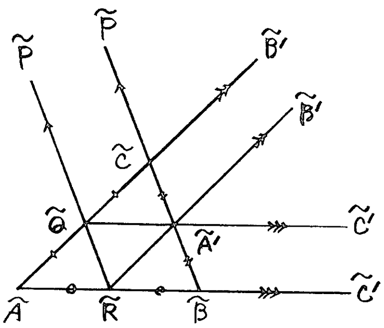
(III)　直線上に並ぶ４点の性質と等式の検討

(II)の(ア)，(イ)の場合の構成において，点P，Q，R，A′，B′，C′の６点は，指定された線分の組BC，CA，ABの外分点と内分点からなる６点である。必要ならデザルグの定理を用いればこのうちの外分点である３点は同一線上にあることがわかる。ここで，第２節図IIIの射影を用いる。

この３点が図IIIのl上にあるように△ABCを平面α上におく。このとき△ABCは平面γ上には，次のように射影される(図XI)。点A，B，Cの像をそれぞれ$\tilde{A}$，$\tilde{B}$，$\tilde{C}$とすると，内分点は△$\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$の各辺の中点に，外分点は各辺の延長上にある無限遠点にうつる。したがって

辺$\widetilde{B}\widetilde{C}$，$\widetilde{C}\widetilde{A}$，$\widetilde{A}\widetilde{B}$のそれぞれの内分点，外分点に対する内分比の値も外分比の値もともに1である。ゆえに，定理(T_1)によって点PとA′，QとB′，RとC′は，それぞれ線分BC，CA，ABを，同じ比で内分する点，外分する点のどちらかになっている。(例えば4点B，CとP，A′は必要ならP，A′を並べかえれば調和点列になっている。)

（＊） $\widetilde{Q}$, $\widetilde{R}$が内分点の場合



(図Ⅺ)

いま，この射影によって点P，Q，R，A′，B′，C′がそれぞれ$\widetilde{P}$，$\widetilde{Q}$，$\widetilde{R}$，$\widetilde{A}'$，$\widetilde{B}'$，$\widetilde{C}'$に写るとする。この6点は$\triangle\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$の辺の中点か辺の延長上にある無限遠点であるから定理(T_2)を用いて $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{\widetilde{B}\widetilde{P}}{\widetilde{P}\widetilde{C}}\cdot\dfrac{\widetilde{C}\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}\widetilde{A}}\cdot\dfrac{\widetilde{A}\widetilde{R}}{\widetilde{R}\widetilde{B}}=1\times1\times1=1$，

$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{\widetilde{B}\widetilde{A}'}{\widetilde{A}'\widetilde{C}}\cdot\dfrac{\widetilde{C}\widetilde{B}'}{\widetilde{B}'\widetilde{A}}\cdot\dfrac{\widetilde{A}\widetilde{C}'}{\widetilde{C}'\widetilde{B}}=1\times1\times1=1$ がなりたつ。この節の(II)で述べたように点P，Q，Rのうちの外分点の個数は奇数個だから，A′，B′，C′のうちの外分点の数は偶数個である。したがって$(-1)^{\varepsilon}$を乗じた等式が意味を持つ。

証明の流れを確認しておく。

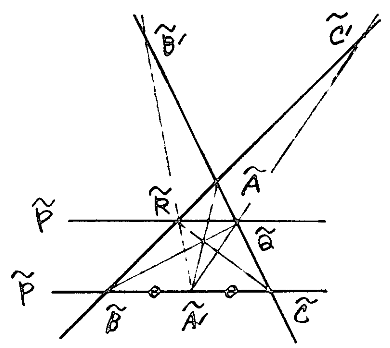
メネラウスの定理の仮定 (3点P，Q，Rが共線)		$(-1)^{\varepsilon}\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=-1$
⇕ デザルグの定理とその逆	⟹ 第2節の射影と定理(T_1)，(T_2)	
チェバの定理の仮定 (AA′，BB′，CC′が共点)		$(-1)^{\varepsilon}\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1$

(Ⅳ) 定理の逆

最後に定理の逆について簡単に述べて拙稿を終えることにする。直線l_1，l_2，l_3上の点A，B，Cと異なる点をそれぞれP，Q，Rとし $(-1)^{\varepsilon}\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=-1$

とするとき，点P，Q，Rが内分点なら外分点を，外分点なら内分点を考えることにより点A′，B′，C′が自然に定まり $(-1)^{\varepsilon}\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1$ となる。P，Q，Rのうちに外分点が必ず存在するので，点Pを外分点として平面βが点Pを通るような第2節図Ⅲの射影を考える。平面α上にある標準的な図形は上図のように射影される。図において(T_2)を用いれば $(-1)^{\varepsilon}\dfrac{\widetilde{B}\widetilde{P}}{\widetilde{P}\widetilde{C}}\cdot\dfrac{\widetilde{C}\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}\widetilde{A}}\cdot\dfrac{\widetilde{A}\widetilde{R}}{\widetilde{R}\widetilde{B}}=-1$，点$\widetilde{P}$は無限遠点であるから $\dfrac{\widetilde{B}\widetilde{P}}{\widetilde{Q}\widetilde{C}}=1$。したがって $(-1)^{\varepsilon}\dfrac{\widetilde{C}\widetilde{Q}}{\widetilde{Q}\widetilde{A}}\cdot\dfrac{\widetilde{A}\widetilde{R}}{\widetilde{R}\widetilde{B}}=1$。即ち$\widetilde{Q}\widetilde{R}\parallel\widetilde{B}\widetilde{C}$ である。

（＊） $\widetilde{Q}$，$\widetilde{R}$が内分点の場合



(図Ⅻ)

ゆえに3点$\widetilde{P}$，$\widetilde{Q}$，$\widetilde{R}$は共線であるからP，Q，Rも共線である。同様にしてAA′，BB′，CC′は共点であることがわかる。

〈参考文献〉

〔1〕 幾何の発想　寺坂英孝　日本評論社

〔2〕 具象から幾何へ　栗田 稔　日本評論社

〔3〕 幾何学基礎論　D. ヒルベルト(中村幸四郎 訳)　清水弘文堂

〔4〕 新数学事典　大阪書籍

〔5〕 幾何のおもしろさ　小平邦彦　岩波書店

〔6〕 幾何とその構造　寺坂英孝　笠摩書房