行列の指導について

能崎克己

1 はじめに

本校では，昭和42年より新しい高等学校数学科指導内容について検討を進め，43年には本校の研究協議会においてその中間発表をし，その後さらに一部修正した上44年には第18回北陸四県数学教育研究大会において「高等学校教育課程改訂を前にして数学科教育課程試案（数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲの内容）」として発表した。その際に北陸四県の各校の要望を参考にしてさらに修正を行ない，第18回北陸四県数学教育研究大会の名で，文部省および教育課程審議会へ提出した。

45年度はさきの試案にあげたそれぞれの項目について指導内容の試案を作成し，その実験研究を進めているが，本稿では，そのうち「行列」についての指導内容案およびその実験授業の結果について報告する。

上に述べた第18回北陸四県数学教育研究大会案のうち，行列に関する部分はつぎの通りである。

第18回北陸四県数学教育研究大会案

基本方針

(7) ベクトルについては一次独立，一次従属などについてもふれ，行列をとり入れ，基本的な演算法則や1次変換などへの応用ができるようにする。

数学Ⅲ （Aコース文科系5単位 / Bコース理科系6単位） 第3学年

項目	指導内容	備考
Ⅵ ベクトルと行列（40時間）	(1) ベクトル空間の定義とその例	矢線ベクトル，数ベクトルにより表現される例をあげる。今迄学んだ体系の中でベクトル空間の例となるものをしらべる。
	(2) 内積 成分表示 一次独立 一次従属 ベクトルの応用	有限次元のベクトルを扱うことから内積の定義は $(x_1,x_2,\cdots x_n)(y_1,y_2,\cdots y_n)$ $=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k$ とする
	(3) 行列 行列の相等 加減乗法 実数との積	零行列，単位行列，逆行列 行列の演算の法則
	(4) 一次変換	行列による表現

45年5月に文部省から高等学校学習指導要領案が発表され，それによると行列は数学ⅡBに含まれている。また，群の考えについてふれてもよいとなっていることなどを参考にして指導内容の作成に当った。ちなみに，45年10月に文部省から告示された高等学校学習指導要領の行列に関する部分はつぎの通りである。

第2章 各教科 第3節 数学

第1款　目　　標

事象を数学的にとらえ，論理的に考え，統合的，発展的に考察し，処理する能力と態度を育成し，また，社会において数学の果たす役割について認識させる。

このため

1　数学における基本的な概念，原理・法則などを理解させ，より進んだ数学的な考え方や処理のしかたを生み出す能力と態度を養う。

2　数学における基本的な知識の習得と基本的な技能の習熟を図り，それらを的確かつ能率的に活用する能力を伸ばす。

3　数学的な用語や記号を用いることの意義について理解を深め，それらによって，数学的な性質や関係を簡潔，明確に表現し，思考を進める能力と態度を養う。

4　事象の考察に際して，適切な見通しをもち，抽象化し，論理的に思考する能力を伸ばすとともに，目的に応じて結果を検討し，処理する態度を養う。

5　体系的に組み立てていく数学の考え方を理解させ，その意義と方法について知らせる。

第2款　各　科　目

第4　数学ⅡB

1　目　　標

(3)　行列を通して，いくつかのものの組を一つのものとしてとらえ，数学的に表現するしかたを理解させ，それを用いる能力を養う。

2　内　　容

A　代数・幾何

(3)　行　　列

行列とその演算について理解させ，連立一次方程式が一つの方程式として表わされることや一次変換と行列との関係について理解させる。

ア　行列の意味

イ　行列の演算

加法，減法，実数との乗法，乗法

ウ　連立一次方程式

エ　一次変換

平面上で，原点を動かさない一次変換を扱う。

オ　用語および記号

行列，逆行列　A^{-1}，一次変換，加法定理（三角関数に関するもの）

3　内容の取り扱い

(3)　内容のAの(3)のイのうちの乗法については，2×2 行列までを取り扱うものとする。

(4)　三角関数の加法定理は，内容のAの(3)のエまたはAの(2)のエなどに関連して取り扱うものとするが，それを導く程度とする。

(5)　内容のAの(3)のエなどに関連して，群の考えについて知らせることもさしつかえない。

2 指導の概略

1に述べたことから，つぎのような方法で実験指導を行なった。

対　象　本校第2学年3クラス（生徒数 149名）

時　期　昭和45年9月上旬から10月上旬まで

時間配当

§1	行列の意味	1時間
§2	行列の相等	
§3	行列の加法	1時間
§4	行列と実数の乗法	1時間
§5	行列の乗法	3時間
§6	逆行列 (1)	2時間
§7	逆行列 (2)	2時間
§8	一次変換と行列	1時間
§9	体，環，群	3時間
§10	同形	1時間
	考査	1時間
	計	16時間

3 指導内容の概略

実験指導に用いた指導内容はつぎの通りである。なお，〔 〕内は指導上の留意点である。また，# は省略してもよい内容である。

§1 行　列

例1　2種類の錠剤甲，乙に含まれている成分A，B，Cの表の表

錠剤＼成分	A	B	C
甲	3	2	7
乙	1	4	5

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

例2　ある学力テストにおけるA君の得点の表

教科	国語	英語	数学	社会	理科
A君の得点	65	70	90	65	80
満点	100	100	100	100	100

$$\begin{pmatrix} 65 & 70 & 90 & 65 & 80 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \end{pmatrix}$$

例3　ある機械製造工場における形式別の1日の生産台数の表

形式＼日	第1日	第2日	第3日
形式1	7	8	3
形式2	3	4	5
形式3	8	5	6

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

定義1　行列，要素（元），行，列

定義 2　行列の位数（m行n列），行行列，列行列

〔行ベクトル，列ベクトルもあわせて定義する〕

定義 3　正方行列，# 転置行列 A^t

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

a_{ij} は第 i 行第 j 列の要素

問　$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ -1 & -3 & -5 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$ とする。

(1)　Aの位数はどれだけか。

(2)　第 4 行の要素をいえ。

(3)　第 3 列の要素をいえ。

(4)　a_{43}, a_{14}, a_{41} は何か。

#(5)　転置行列 A^t をかけ。

§2　行列の相等

定義 4　行列の相等，不等

問 1　つぎの各式に適する x, y を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} x+2 \\ 3-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} x-2y \\ x+y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x-y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$　　(4) $\begin{pmatrix} x^2 & y \\ x & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

問 2　3 つの行列 A, B, C について，$A=B$, $B=C$ ならば，$A=C$ といえるか。

反射律　$A=A$

対称律　$A=B$　ならば　$B=A$

推移律　$A=B$, $B=C$　ならば　$A=C$

§3　行列の加法

例 1　ベクトル　$\vec{a}=(2,\ 1,\ 5)$　$\vec{b}=(-4,\ 3,\ -6)$ の和

例 2　学力テストの第 1 回，第 2 回の合計成績

定義 5　行列の加法，和

定義 6　零行列　$\underline{0}$　($\underline{0}_{m\times n}$, $\underline{0}_n$)　$(A+\underline{0}=\underline{0}+A=A)$

定理 1　$A+B=B+A$

定理 2　$(A+B)+C=A+(B+C)$

定義 7　$-A$　$(A+(-A)=\underline{0})$

定義 8　行列の差　$A-B=A+(-B)$

定理 3　(1)　$A+(-A)=\underline{0}$　　(2)　$-(-A)=A$

(3)　$-\underline{0}=\underline{0}$　　(4)　$-(A+B)=-A-B$

問 1　$\begin{pmatrix} x+3 & 2y-8 \\ a+1 & 4x-6 \\ b-3 & 3b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & x \\ 2b & -10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -8 & x \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$ を満足するx, y, a, b

を求めよ。

問2 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ p & s & t \\ u & v & w \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-x & -y & -z \\ -p & 1-s & -t \\ -u & -v & 1-w \end{pmatrix}$ を計算せよ。

問3 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

として，つぎのものを求めよ。

(1) $A+B$　(2) $(A+B)+C$　(3) $A+(B+C)$

(4) $A-B$　(5) $(A-B)+C$　(6) $B-A$

#問4 $(A+B)^t=A^t+B^t$ を証明せよ。

問5 つぎの式を満足する行列 X を求めよ。

(1) $X+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $X+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

問6 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ は正しいか。

§4 行列と実数の乗法

$A+A=2A$　$A+A+A=3A$　$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A=A$

定義9　行列 A と実数 C の積　$CA=AC$

定理4　A, B が $m\times n$ 行列，x, y が実数のとき

(1) $x(yA)=(xy)A$,　(2) $(x+y)A=xA+yA$

(3) $(-1)A=-A$　(4) $x(A+B)=xA+xB$

(5) $x\,\underline{0}=\underline{0}$　(6) $0A=\underline{0}$

問1 $-2\left\{X+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}=3X+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を満足する行列 X を求めよ。

問2 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，つぎのものを求めよ。

(1) $2A-B+C$　(2) $3A-4B-2C$

(3) $7A-2(B-C)$　(4) $3(A-2B+3C)$

問3 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

のとき

(1) つぎのものを求めよ。

(i) $2A-B+C$　(ii) $3A-6B+9C$

(iii) $7A-2(B-C)$　(iv) $3(A-2B+3C)$

(2) つぎの式を満足する行列 X を求めよ。

(i) $\frac{1}{2}(X+A)=3(X+(2X+B))+C$

(ii) $2(X+B)=3(X+\frac{1}{2}(X+A))+C$

問2 (1), (3)の第1行，第2行と，問3(1)(i)(iii)の第2行，第3行がそれぞれ等しいことを確かめる。また，問3(1)の(ii)と(iv)が等しいことを確かめる。また，問3の(2)では，定理1～4により，すでに学んだ一次方程式と同様に扱えることを説明する。

§5，行列の乗法

例1 §1の例2、のA君が，P，Q，R各大学の入学試験を受験した場合の予想得点

右の表は配点の重さを示すもので例えばP大学では国語150点満点，英語200点満点，など

教科＼大学	P	Q	R
国　語	1.5	1.0	0
英　語	2.0	1.5	2.0
数　学	2.0	1.5	2.5
社　会	1.5	1.0	0
理　科	2.0	1.0	2.0

P大学を受験した場合の予想得点

$65\times1.5+70\times2.0+90\times2.0+65\times1.5+80\times2.0=675$

P大学の満点は

$100\times1.5+100\times2.0+100\times2.0+100\times1.5+100\times2.0=900$

Q，R大学を受験した場合はそれぞれ

Q 450 (600)　　R 525 (650)

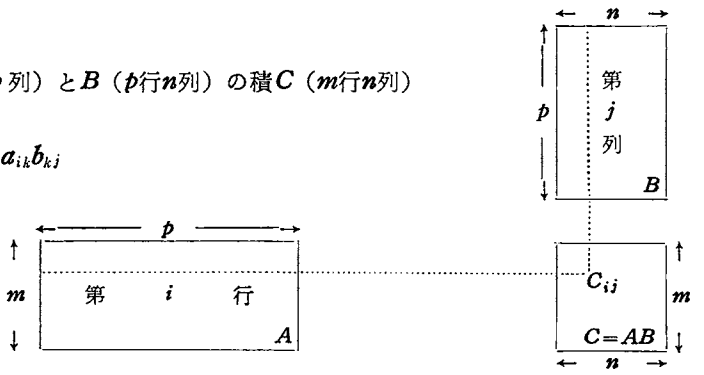
$$\begin{pmatrix}65&70&90&65&80\\100&100&100&100&100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.5&1.0&0\\2.0&1.5&2.0\\2.0&1.5&2.5\\1.5&1.0&0\\2.0&1.0&2.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}675&450&525\\900&600&650\end{pmatrix}$$

定義10　行列 A, B の積 $C=AB$

乗法の図式

A（m行p列）とB（p行n列）の積C（m行n列）

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$



例2 $$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&5\\38&11\\59&17\end{pmatrix}$$

例3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 10 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

例4 $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = (33)$

例5 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 6 \\ 4 & 28 & 12 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

〔例4，例5より $AB \neq BA$ にふれる〕

問1 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 11 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ として，つぎのものを求めよ。

(1) AB　(2) DA　(3) AD　(4) CB　(5) BD

(6) $D(AB)$　(7) $(CB)(DA)$　(8) $B(DA)$

問2 $X=(2 \quad -2 \quad 4)$, $Y=(0 \quad 1 \quad 2)$

$U=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, として，つぎを計算せよ。

(1) $5UX$　(2) $(5W)(3Y)$　(3) $XU+YW$

(4) $5XU-(2X-Y)W$　(5) $(U-W)(X+Y)$　(6) $(X+Y)(U-W)$

問3 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ について，

$A(BC)=(AB)C$ が成立するか。

〔定理5への準備〕

問4 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ としてつぎの計算をせよ。

(1) AB　#(2) AB^t　#(3) BB^t　#(4) $(AB)B^t$

#(5) $A(BB^t)$　#(6) $A(B+B^t)$　#(7) $A(B-B^t)$

#(8) $AB-AB^t$　#(9) $AA-BB+B^tB^t$　(10) $(AA)A$

〔(4), (5) $(AB)B^t=A(BB^t)$ 定理5への準備
(7), (8) $A(B-B^t)=AB-AB^t$ 定理6への準備〕

#問5 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ について

$(AB)^t$, B^tA^t を求めよ。

〔$(AB)^t=B^tA^t$ にふれる，問17参照〕

例6　$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$　のとき

$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,　$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

〔$AB\neq BA$, 乗法の交換法則の成立しない例〕

例7　$A=\begin{pmatrix}3&1\\6&2\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-9\end{pmatrix}$　のとき

$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

また,　$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\-1&4&0\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&4&9\end{pmatrix}$　のとき

$AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

〔$A\neq \underline{0}$, $B\neq \underline{0}$ で $AB=\underline{0}$ となる例〕

例8　$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&1&0\\-1&4&0\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\2&2&2\end{pmatrix}$,　$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

ならば,　$AB=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&3&2\\3&2&-7\end{pmatrix}=AC$

〔$A\neq \underline{0}$, $B\neq C$ で $AB=AC$ となる例〕

例9　$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ について

$II=JJ=KK=LL=I$ を示せ。

問6　例9のIについて, $XX=I$ となる行列Xは上の I, J, K, L のほか, 存在するかどうかをしらべよ。

#また, $XX=L=-I$ となる行列Xを見つけてみよ。

〔例9と問, I の平方根, $-I$ の平方根にあたる行列の存在についての検討〕

問7　$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$,　$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

とするとき, AI, IA, BI, IB, $(AI)B$ を計算せよ。

〔単位行列への準備〕

問8　$A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$　とするとき

(1)　$(A+B)(A+B)=AA+2AB+BB$　は成立するか。

(2)　$(A+B)(A-B)=AA-BB$　は成立するか。

〔成立する例は $AB=BA$ 問18, 19参照〕

問9　$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

のとき　$AA=I$, $BB=I$, $II=I$　を示せ。

問10　$A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ について，$AA=\underline{0}$　を示せ。また $XX=\underline{0}$　なる 2×2 行列 X はほかにどんなものがあるか，例をあげてみよ。

問11　$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ について，$A\,(AA)=\underline{0}$　を示せ。また $(AA)\,A=\underline{0}$　は成立するか。

問12　$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$　とするとき，つぎの各式は成立するかどうかをしらべよ。

$A\,(B+C)=AB+AC$,　$(B+C)\,A=BA+CA$

$A\,(B+C)=AB+CA$,　$A\,(B+C)=BA+CA$

〔定理6，定理7　への準備〕

定理5　$A=(a_{ij})_{m\times p}$,　$B=(b_{jk})_{p\times n}$,　$C=(c_{kh})_{n\times q}$

ならば　$(AB)\,C=A\,(BC)$

定理6　$A=(a_{ij})_{m\times p}$,　$B=(b_{jk})_{p\times n}$,　$C=(c_{jk})_{p\times n}$

ならば　$A\,(B+C)=AB+AC$

定理7　$B=(b_{jk})_{p\times n}$,　$C=(c_{jk})_{p\times n}$,　$A=(a_{ki})_{n\times q}$

ならば　$(B+C)\,A=BA+CA$

（定理5，6，7の一般的な証明はかなり複雑な式の計算が必要なので，問3，問12　などを例示するほか，2×2 行列について証明する程度とし，一般的な証明は進んだ生徒の自習にまかせる。）

定理8　$A_{p\times n}=(a_{ij})_{p\times n}$　について

$\underline{0}_{m\times p}\cdot A_{p\times n}=\underline{0}_{m\times n}$　　$A_{p\times n}\cdot\underline{0}_{n\times q}=\underline{0}_{p\times q}$

定義11　乗法の単位行列　I_n,

定理9　Aが　$m\times n$　行列ならば

$AI_n=A$,　　$I_mA=A$

問13　つぎの積が I となるように x の値を定めよ。

$$\begin{pmatrix}2&0&7\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x&-14x&7x\\0&1&0\\x&4x&-2x\end{pmatrix}$$

問14　$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$　のとき，$A\,(AA)=I$　を示せ。また

$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$　ではどうか。

問15　$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ は方程式 $AA-5A+7I=0$ の解であることを示せ。

#問16　V, W が n 行1列の行列（列ベクトル）のとき $V^tW=W^tV$ を示せ。

#問17　A を 2×3 行列 B を 3×2 行列とするとき $(AB)^t=B^tA^t$ を証明せよ。

問18　$A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c\end{pmatrix}$ のとき $AB=BA$ を示せ。

問19　位数2の正方行列 A, B について
$(A+B)(A-B)=AA-BB$ が成立する例をあげよ。

§6　逆　行　列　(1)

例1　2元1次連立方程式の行列表示

$$\begin{cases}2x-y=4 & (1)\\ x+y=5 & (2)\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

(2)を(1)に加える

$$\begin{cases}3x=9 & (3)\\ x+y=5 & (2)\end{cases}\qquad \text{第2行を第1行に加える}\quad \begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\ 5\end{pmatrix}$$

(3)を3でわる

$$\begin{cases}x=3 & (4)\\ x+y=5 & (2)\end{cases}\qquad \text{第1行を3でわる}\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 5\end{pmatrix}$$

(4)を(2)からひく

$$\begin{cases}x=3 & (4)\\ y=2 & (5)\end{cases}\qquad \text{第1行を第2行からひく}\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

$\therefore\quad x=3,\ y=2$

〔許される行演算について述べておく〕

問1　例1　の方法でつぎの方程式を解け。

(1) $\begin{cases}2x+3y=8\\ 5x-4y=-3\end{cases}$　(2) $\begin{cases}3x+4y=4\\ 5x+7y=1\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+3y=9\\ -x+4y=10\end{cases}$　(4) $\begin{cases}ax+by=p\\ cx+dy=q\end{cases}$

ただし $abcd(ad-bc)\neq0$

例1の方程式で $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$ とすると $AX=B$

もし $A^{-1}A=I$ なる A^{-1} が存在するならば

$A^{-1}(AX)=A^{-1}B\quad\therefore\quad(A^{-1}A)X=A^{-1}B\quad\therefore\quad X=A^{-1}B$

問2　つぎの行列をAとするとき $A^{-1}A=I$ となるような A^{-1} を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

問3　問2のそれぞれについて $AA^{-1}=I$ となるか。

定義12　行列Aの逆行列 A^{-1}

例2　$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ について A^{-1} はどんな場合に存在するか。

存在する場合には A^{-1} を求めよ。

定理10　行列 A の逆行列 A^{-1} が存在するならば，それはただ一つである。

定理11　行列 A, B, AB がそれぞれ逆行列をもつならば

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

問4　逆行列を用いて問1の方程式を解け。

「$AX=B \rightarrow X=A^{-1}B$」は「$AX=IB \rightarrow IX=A^{-1}B$」

これより，AをIに変える行演算によってIがA^{-1}に変わる。

例3

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \left|\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I\right.$$

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \left|\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \left|\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right.$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \left|\quad \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=A^{-1}\right.$$

例1の方程式に対して両辺に左から逆行列をかけると

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix} \qquad \therefore \quad x=3,\quad y=2$$

問5　上の方法で問1の方程式を解け。

#問6　つぎの方程式を満足するx, yについて考察せよ。

(1) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 10\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\end{pmatrix}$

§7　逆　行　列　(2)

例1

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$の逆行列$A^{-1}$を§6，例3の方法にならって求めよ。

問1　例1において$AA^{-1}=I$, $A^{-1}A=I$を確かめよ。

#問2　つぎの各行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 3 & 6\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$

例2

方程式 $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ を解け。

〔例1の逆行列を用いる〕

#問3　つぎの方程式を解け。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

〔問2(5)の逆行列を用いる〕

#問4 方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 \\ 6 & -13 & -8 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の両辺に左から

$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ をかけよ。 また，この結果を用いて上の方程式を解け。

#問5 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & u & m & r \\ y & v & n & s \\ z & w & p & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -9 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ を

満足する行列 $\begin{pmatrix} x & u & m & r \\ y & v & n & s \\ z & w & p & t \end{pmatrix}$ を求めよ。

〔例1の逆行列を用いる〕

#問6 つぎの連立方程式を行列を用いて解け。

(1) $\begin{cases} 2x+y+2z-3w=0 \\ 4x+y+z+w=15 \\ 6x-y-z-w=5 \\ 4x-2y+3z-w=2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 9x-y=37 \\ 4y-z=-2 \\ 7z-3w=-17 \\ x+3w=7 \end{cases}$

#問7 つぎの方程式を満足する x, y, z について考察せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

#問8 2つの行列 $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ は互いに他の逆行列であることを示せ。 また，このとき AA と BB は互いに他の逆行列となるか。また，A^t と B^t ではどうか。

〔一般に，逆元をもつ任意の2×2行列についても成立することにふれる。〕

問9 $AA=A^2$, $A^2A=(AA)A=A(AA)=AA^2=A^3$ とかくとき $A^3A=AA^3$ を証明せよ（これを A^4 とかく）。

一般に，n が3以上の自然数であるとき，

$A^{-1}A=AA^{-1}$ $(=A^0)$ を証明せよ。

これより，$A^n=I$ ならば，A^{n-1} は A の逆行列であることを用いて，つぎの各行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問10　$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ とするとき　A^2, A^3 を求めよ。一般に自然数nに対して A^n を求めよ。また，　$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$ のとき，AB および BA を求めよ。

問11　$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ であるとき，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を求めよ。　(x, y)，(x', y') を平面上の2点の座標と考えるとき，この式は，この2点の間のどんな関係を表わしているか。

〔問10，問11は　§8 例3への準備〕

§8　1次変換と行列

定義13　1次変換　$x'=a_1x+b_1y$,　$y'=a_2x+b_2y$

例1　1次変換　$x'=x+3y$,　$y'=-3x+2y$　によって点　A（4，1），B（5，4）はそれぞれ点　A'（7，−10）B'（17，−7）に移る。

定義14　1次変換による写像

問1　例1において，線分 AB は線分 $A'B'$ に写像されることを示せ。

問2　4点　0（0，0），A（4，1），B（5，4），C（1，3）　を頂点とする平行四辺形は，例1の1次変換によって，どんな図形に写像されるか。

1次変換　$x'=a_1x+b_2y$,　$y'=a_2x+b_2y$　は

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\qquad X'=AX$$

とかける。

例2　y 軸を軸とする対称移動

$$x'=-x,\quad y'=y\qquad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

問3　x 軸，$y=x$　をそれぞれ軸とする対称移動について，例2と同じようにかけ。また，$y=-x$ についても同様なことを考えよ。

問4　原点を中心とし　90°，180°，−90°　をそれぞれ回転角とする回転移動について，例2と同じことを考えよ。（180° の回転は原点を中心とする対称移動）

問5　問4を複素平面上で考えた場合，それらの変換を示す行列は，それぞれどんな複素数に対応するか。

〔§10，例2への準備〕

例3　原点を中心とし，回転角 θ の回転移動（§7，問11）

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta\qquad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$
$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta$$

〔これより，2つの回転移動の合成によって
正弦，余弦の加法定理が導かれる。〕

#問6　$A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$,　$B=\begin{pmatrix}a_1' & b_1'\\ a_2' & b_2'\end{pmatrix}$,　$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$,　$X'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$,　$X''=\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}$　とする。$X'=AX$,　$X''=BX'$　のとき，$X''=CX$　となるとすると，行列 C はどんな行列か。A, B を用いて表わせ。

#問7　前問において，$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$,　$B=A^{-1}$　とするとき，C はどんな行列か。

また，A, B をそれぞれ A^{-1}, A でおきかえたときはどうか。

#定義15　恒等変換　逆変数

#定理12　1次変換Aにつづいて1次変換Bを行った結果は1次変換 BA である。

§9　体，環，群

定義16　集合Mが演算 ○ のもとに閉じている。

例1

正の有理数の集合	除法	閉じている
整数の集合	乗法	閉じている
正の整数の集合	除法	閉じていない
有理数の集合	除法	閉じていない
2×2行列の集合	加法，乗法	閉じている

問1　つぎの集合のうち，示された演算のもとで閉じているのはどれか。

(1) 整数の集合　加法
(2) 偶数の集合　乗法
(3) 集合 $\{1\}$　乗法
(4) 正の無理数の集合　除法
(5) 整数の集合　平方の演算
(6) 集合 $A=\{x|x\geqq 3\}$　加法

問2　演算 ○ がつぎのように定義されたとき，交換法則が成立するのはどれか，ただし，x, y は正の整数とする。

(1) $x\bigcirc y=x+2y$　(2) $x\bigcirc y=2xy$　(3) $x\bigcirc y=2x+2y$
(4) $x\bigcirc y=xy^2$　(5) $x\bigcirc y=x^y$　(6) $x\bigcirc y=x+y+1$

問3　演算○がつぎのように定義されたとき，結合法則が成立するのはどれか。ただし，x, y は正の整数とする。

(1) $x\bigcirc y=x+2y$　(2) $x\bigcirc y=x+y$　(3) $x\bigcirc y=xy^2$
(4) $x\bigcirc y=x$　(5) $x\bigcirc y=\sqrt{xy}$　(6) $x\bigcirc y=xy+1$

問4　2つの演算 ○, △ がつぎのように定義されたとき，分配法則　$x\triangle(y\bigcirc z)=(x\triangle y)\bigcirc(x\triangle z)$ および $(y\bigcirc z)\triangle x=(y\triangle x)\bigcirc(z\triangle x)$ が成立するかどうかをしらべよ。ただし，文字はすべて正の整数とする。

(1) $x\bigcirc y=x+y$　$x\triangle y=xy$
(2) $x\bigcirc y=2x+2y$　$x\triangle y=\frac{1}{2}xy$
(3) $x\bigcirc y=x+y+1$　$x\triangle y=xy$
(4) $x\bigcirc y=x$　$x\triangle y=y$

定義17　体

例2　有理数の集合　実数の集合

問5　つぎの集合は体をなすか。

(1) 正数の集合　(2) 複素数の集合
(3) $a+b\sqrt{2}$ (a, b は整数) なる形のすべての実数の集合

定義18　環

例3　整数の集合　偶数の集合　〔数についての例〕

例4　2×2行列の集合　〔行列についての例〕

問6　つぎの集合は環をなすか。

(1) $a+b\sqrt{2}$ (a, b は整数) なる形のすべての実数の集合

(2) $\{1, -1, i, -i\}$ （iは虚数単位）

(3) 数$\frac{a}{2}$（aは整数）の集合

問7　aが実数のとき，$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ なる形の行列の集合は環をなすか。

問8　aが実数のとき，$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ なる形の行列の集合は環をなすか。

定義19　群

例5　整数の集合　　加法

正の有理数の集合　　乗法　〔数についての例〕

例6　$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，集合$\{I\}$, $\{I, -I\}$（乗法）

例7　$x^2+y^2=1$ のとき，行列$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ の集合（乗法）

〔上の2例は行列についての例〕

例8　6つの関数 $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{1}{1-x}$, $f_3(x)=\frac{x-1}{x}$,

$f_4(x)=\frac{x}{x-1}$, $f_5(x)=1-x$, $f_6(x)=\frac{1}{x}$の集合（$f_i \bigcirc f_j=f_j(f_i(x))$と定義された演算○）

〔その他の例〕

問9　つぎの集合はそれぞれ示された演算について群をなすか。

(1) 奇数の集合　（加法）

(2) 正の実数の集合　（乗法）

(3) $\{1, \omega, \omega^2\}$ ただし，ω は1の虚数立方根の1つ　（乗法）

(4) $\{1, -1, i, -i\}$　（乗法）

(5) 整数$3m$の集合，ただし，mは整数　（加法）

(6) 複素数の集合　（加法），（乗法）

問10　つぎの集合は，乗法のもとに群をなすか。

(1) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

(2) $\{I, -I, K, -K\}$ ただし，$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

問11　$A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ のとき，集合$\{A, A^2, A^3\}$は乗法のもとに群をなすことを示せ。

問12　t を0でない実数とするとき，$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ なる行列の集合は乗法のもとに群をなすことを証明せよ。

問13　$K=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とし，x, y を実数とする。

$xI+yK$ なる形のすべての行列の集合をHとするとき，つぎのことを証明せよ。

(1) Hの2つの元の積は，またHの元である。

(2) 元 $xI+yK$ は $x^2-y^2\neq 0$ のときに限り逆元をもつ。（乗法に関して）

(3) $x^2-y^2=1$ のとき，すべての元 $xI+yK$ の集合は乗法のもとに群をなす。

問14 $T=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とする。

集合 $\{TIT^{-1},\ T(-I)T^{-1},\ TKT^{-1},\ T(-K)T^{-1}\}$ は乗法のもとに群をなすことを証明せよ。

また，Tを一般に，逆元をもつ 2×2 行列とするとどうか。

問15 2×2 行列の集合 Gが乗法のもとに群をなすときつぎの集合はそれぞれ乗法のもとに群をなすか。

(1) $\{A^t \mid A\in G\}$

(2) $\{A^{-1} \mid A\in G\}$

〔本問は進んだ生徒の自習にまかせる〕

§10 同 形

例1 A, B, C, D 各家庭の家族構成

Aの家庭 年令順に 父 母 長男 二男 長女

Bの家庭 年令順に 父 母 長男 長女 二男

Cの家庭 年令順に 父 母 長男 二男 長女

Dの家庭 年令順に 父 母 長男 長女

対応 性別に，同性の対応

演算○ $a\bigcirc b=a$, b のうちの年長者

例2 複素数の集合 C と行列 $\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$ の集合 z

元
$$x+yi\leftrightarrow xI+yJ=x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}$$
$$(i^2=-1)\leftrightarrow(J^2=-I)$$

加法
$$(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)\leftrightarrow(x_1I+y_1J)+(x_2 1+y_2J)$$

単位元
$$0+0i\leftrightarrow 0I+0J=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\underline{0}$$

逆元
$$-(x+yi)\leftrightarrow\begin{pmatrix}-x & y\\ -y & -x\end{pmatrix}$$

乗法
$$(x_1+y_1i)\ (x_2+y_2i)\leftrightarrow(x_1I+y_1J)\ (x_2I+y_2J)$$

単位元
$$1+0i\leftrightarrow 1I+0J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

逆元
$$\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}\leftrightarrow\frac{1}{x^2+y^2}(xI-yJ)$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & -y\\ y & x\end{pmatrix}^{-1}$$

（ただし，0以外の元について，すなわち，$x^2+y^2\neq 0$ のときに限り）

定義20 同 形

問1 同形の例を考えてみよ。

〔生徒にそれぞれ考えさせる〕

4 結　　果

3 の内容で指導を行なった後，つぎの問題で考査を行なった。

1　つぎの定義をかけ。

(1) 正 方 行 列　　(2) 転 置 行 列

(3) 2つの行列 A, B について　$A=B$

2 (1) 2つの行列 A, B があり，A は m 行 n 列，B は p 行 q 列である。$A+B$, AB が定義されるのはそれぞれどんな場合か，m, n, p, q で答えよ。また，和，積の位数はどれだけか。答は下表に記入すること。

	定義される場合の m, n, p, q の関係	位　数
和　A＋B		行　列
積　AB		行　列

(2) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&2\\1&0\\-2&-4\end{pmatrix}$ として $A+B$ を求めよ。また，$-2A$ を求めよ。

(3) $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&2&3\\-1&1&0\\4&-3&1\end{pmatrix}$ として AB を求めよ。また，BA はどうか。

3　$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ とするとき，

(1) AB, BA を求め，$AB=BA$ が成立するかどうかをしらべよ。

(2) $(AB)C$, $A(BC)$ を求め，$(AB)C=A(BC)$ が成立するかどうかをしらべよ。

(3) $A(B+C)$，$AB+AC$ を求め，$A(B+C)=AB+AC$ が成立するかどうかをしらべよ。

4 (1) 行列 A の逆行列 A^{-1} とはどんな行列か，定義をかけ。

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} はどんな場合に存在するか。また，存在するときには A^{-1} をかけ。（答のみでよい）

(3) 行列 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} を求めよ。

5 (1) 集合 G が，演算○に関して群をなすとはどういうことか。その定義をかけ。

(2) $t\neq 0$ なる実数とするとき，$\begin{pmatrix}t&0\\0&t\end{pmatrix}$ なる行列の集合は，乗法に関して群をなすかどうかをしらべよ。

6　行列 A, B の逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在し，さらに，積 AB が存在し，かつ，その逆行列 $(AB)^{-1}$ が存在するとき，

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ を証明せよ。

7 (1) 1次変換 $x'=x-2y$, $y'=-x+3y$ を行なった後ひきつづいて1次変換 $x''=$=

$2x'+y'$, $y''=x'+3y'$ を行なうと，その結果はどんな変換になるか。

(2) (1)において $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ とおくと

$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ とかくことができる。このとき $\begin{pmatrix}x''\\ y''\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ と表わすならば，Cは，A, B によってどのように表わされるか。（答のみでよい）

考査時間　50分

その結果はつぎの通りである。解答類形の後の数はそれぞれその人数であり，（ ）内の数はその解答に与えた点数を示す。

受験者数　146（欠席　3）

各問題についての解答類形

1(1) 正方行列の定義

正解　（行の数）＝（列の数） m行のm列 $A_{m\times n}$ において $m=n$ など	145	(5)
零行列を除いたもの	1	(4)

(2) 転置行列の定義

正解　$(a_{ij})^t_{m\times n}=(a_{ji})_{n\times m}$ 第i列の要列の要素を第j行第i行第j素としたもの $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ 第1行を第1列になど	107	(5)
行と列を入れかえ，例示したもの	7	(3)
例示ないもの	31	(2)
解答なし	1	(0)

(3) 行列の相等の定義

正解　位数等しく対応要素がそれぞれ等しい	120	(5)
位数等しく要素が等しい（対応要素と明記してないもの）	21	(3)
位数の明記なく対応要素等しい	1	(3)
行の要素と列の要素が等しい	1	(1)
位数等しく要素が対応するもの	1	(1)
表現不適当　$m=p$, $n=q$, $a=b$	1	(2)
殆んど解答なし	1	(0)

2(1) 和が定義される条件

正解　$m=p$, $n=q$	145	(2)
$m=n$, $p=q$	1	(0)

和の位数

正解　m 行 n 列（p 行 q 列）	146	（1）

積が定義される条件

正解　$n=p$	145	（2）
$m=q$	1	（0）

積の位数

正解　m 行 q 列	144	（1）
m 行 n 列	2	（0）

(2)　$A+B$　の計算

正　解	142	（3）
1 要素のみ計算違い	4	（2）

$-2A$ の計算

正　解	145	（3）
1 要素のみの計算違い	1	（2）

上の(1), (2)の誤答者はすべて別の生徒である。

(3)　AB　の計算

正　解		129	（4）
計算違い	1 要素のみ	12	（3）
	2 要素のみ	3	（2）
	3 要素	1	（1）
解答なし		1	（0）

BA について

正　解	定義されない 不可能であるなど	141	（4）
解答なし		5	（0）

3 (1)　交換法則の不成立

正　解		139	（5）

$AB \neq BA$ だが AB, BA の計算において

計算違い	1 要素	3	（2）
	2 要素	3	（1）
	5 要素	1	（0）

(2)　結合法則の成立

正　解	140	（5）
計算違いがあったが成立するとしたもの	4	（2）
計算違いしたため成立しないとしたもの	2	（0）

(3)　分配法則の成立

正　解	143	（5）
計算違いしたため成立しないとしたもの	3	（2）

本問の誤答は各問においてそれぞれ別の生徒であり，そのすべては単純な計算違いによるものであって理解上の欠陥はないと思われる。

4(1) 逆行列の定義

正解 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ となる行列 A^{-1} 107 (5)

$AA^{-1}=I$ なる行列A^{-1}
$A^{-1}A=I$ なる行列A^{-1} } 39 (3)

誤答のうち6名は2×2行列と限定して定義していた。

(2) 2×2行列の逆行列

正 解 129 (5)

分子の誤条件正答
- 位置のみの誤 3
- 位置と符号の誤 5
- その他書き違いなど 2

} 10 (3)

条件誤 A^{-1} 正答 4 (2)

分母を $ac-bd$ としたもの（分子は正解） 1 (1)

解答なし 2 (0)

条件の正解は 139 逆行列の正解は 133

(3) 3×3行列の逆行列の計算

正 解 131 (10)

一部の要素の符号のみの誤 5 (8)

意図は正しいが単なる計算違い 5 (6)

解答なし，または殆んど解答なきもの 5 (2～0)

最後の5名は逆行列の求め方が理解されていないと見られる（もしくは時間不足のせいか）

5(1) 群の定義

正 解 106 (8)

このうち，「すべての元に関して」と明記したもの 4

表現が不十分のみ 不十分1点 11 (7)

不十分2点 17 (6)

正しい定義の他，交換法則成立を追加したもの 2 (6)

○を×または・としたもの 3 (5)

表現不十分2点と ×・ としたもの 1 (4)

表現不十分2点と 結合法則のかわりに交換法則としたもの 2 (4)

$A\bigcirc E=0$，$A\bigcirc A^{-1}=1$ としたもの 1 (4)

結合法則のかわりに交換法則をあげたもの（他はすべて正解） 2 (6)

○に関して閉じていることのみをあげたもの 1 (2)

表現不十分とは，$A\bigcirc E=E\bigcirc A=A$ などを $A\bigcirc E=A$ などとしたものをいう。

(2) 群をなすことの証明

正 解 134 (12)

交換法則の成立を証明したもの
他はすべて正解　3　(9)
例証（具体的な数の行列について証明し，その証明はすべて正しいもの）　1　(3)
結合法則成立や閉じていることの証明の一部に$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$との乗法を用いたもの　4　(6または3)
閉じていることのみの証明　1　(3)
単位元を$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$としたもの（他はすべて正しい）　1　(9)
逆元なく，従って群ではないとしたもの（他の証明はすべて正しい）　1　(9)
解答なし　1　(0)

6　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ の証明

正解　$(AB)\ (B^{-1}A^{-1})=I$, $(B^{-1}A^{-1})\ (AB)=I$ ともに証明　78　(15)
上のどちらか一方のみ証明　46　(7)
2×2行列についての証明（数値による例証を含む）　7　(5)
不十分な証明　4　(3)
解答なし，または無意味な記述しかないもの　11　(0)

7(1)　一次変換の合成

正　解　139　(10)
　このうち　行列利用　30　直接代入　102　両者併用　7
計算違いによる誤　5　(8または5)
　このうち　行列利用　4　直接代入　1
行列 AB を計算して答えたもの　1　(0)
行列で BA となると答えたもの　1　(3)

(2)　行列との関係

正解　$C=BA$　130　(5)
$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$　9　(3)
$C=AB=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$　3　(0)
$C=BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　2　(2)
$C=(A+B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　1　(0)
解答なし　1　(0)

全体としての成績

満点　120　平均　110.65　標準偏差　9.23
（100点満点に換算すると　平均　92.21　標準偏差　7.69）

度数分布

階級	120点	78—83	84—89	90—95	96—101	102—107	108—113	114—119	120
	100点換算	65以上70未満	70以上75未満	75以上80未満	80以上85未満	85以上90未満	90以上95未満	95以上100未満	100
度数		3	2	9	10	22	31	41	28
相対度数(%)		2.05	1.37	6.16	6.85	15.07	21.23	28.08	19.18

問題別成績

問題番号		配点		正答率(%)	平均点		標準偏差	
1	(1)	15	5	99.32	4.99	13.81	0.08	1.58
	(2)		5	73.29	4.23		1.30	
	(3)		5	82.19	4.58		0.96	
2	(1)	20	2	和，条件 99.32	5.96	19.62	0.26	1.02
			1	和，位数 100.00				
			2	積，条件 99.32				
			1	積，位数 98.63				
	(2)		3	A＋B 97.26	5.97		0.18	
			3	−2A 99.32				
	(3)		4	AB 88.36	7.69		2.27	
			4	BA 96.58				
3	(1)	15	5	95.21	4.82	14.61	0.81	1.44
	(2)		5	95.89	4.85		0.75	
	(3)		5	97.95	4.94		0.43	
4	(1)	20	5	73.29	4.47	18.62	0.88	2.65
	(2)		5	存在 95.21	4.68		0.93	
				A^{-1} 91.10				
	(3)		10	89.73	9.47		1.86	
5	(1)	20	8	72.60	7.42	19.01	1.09	2.30
	(2)		12	91.78	11.59		1.63	
6		15		53.42		10.54		5.10
7	(1)	15	10	95.21	9.77	14.44	2.87	1.88
	(2)		5	89.04	4.66		1.06	

5 反省とまとめ

生徒にとっては，これまで学習してきた内容とやや異なった，しかも，新しい内容であり，しかも交換法則が成立しない演算などははじめて目にふれたものでもあって非常に興味をもっ

て学習していたようである。また，群の考え方で，有限個の元の集合で，ある演算について閉じていることもおもしろい事実であったようである。群の考え，同形の考えもさほど無理なく受け入れているようにみられ，かなりの成果があったと考えられる。考査結果も予想以上に良好であり，指導した私としても非常に嬉しく思っている。

行列は，既に学習したベクトルの成分表示とよく似ており，その点でも導入は困難でないと思う。ただ行列の乗法はやや面倒であり，他に適切な例が多く必要であろう。一次変換の合成を学んでようやくその便利さがわかるのではあまりにも間のびしてしまうのも否めない事実であろう。

2×2 行列より位数の大きい行列の乗法や逆行列，体，環，同形の考えなどは，学習指導要領には含まれてはいないが，あえてこれをとりあげて指導してみた。これらの内容についても，上に述べたように，決して指導は困難ではないように考えられる。

ただ，行列に関する用語，記号はいろいろなものが用いられており，それらを統一する必要が感じられた。無理かもしれないが，ある程度の統一がほしいと思う。

以上，いろいろと愚見を述べたが，大方の諸先生の御意見を承ることができれば幸である。なお，もし，他の高校で実験された内容や結果がありましたら，是非お知らせ下さるようお願いいたします。