

# 投影図を利用した共面図表

—共線図表の空間への拡張—

能崎克己

数学の分野においても、また、日常その他においても、数値計算は一般に繁雑なものであり、その手数を容易にするために、いろいろな図表を用いて計算することが少くない。特に、同一類型の計算を数多く行う場合——ただし、精密さをさほど要求されていない場合——には、計算図表に対する要請は大きなものがある。しかし、現在実用に供されている計算図表の大部分は、平面上の図形によって作成された図表を応用したものであって、その使用にはいくらかの制限が伴うのは当然である。ここに、おのずから、共線図表の原理を空間に拡張することが考えられる。従来も、立体計算図表もしくは共面図表の原理については、後述するように、いろいろと研究され紹介されている〔文献1, 3, 5〕が、実際にそれを作成し利用する場合に、甚だしい手数を要したり、また特殊な器具を必要としたり、いろいろな不便があつて、現在のところ、あまり実用的ではないと思われる。私は、かねてこの共面図表を投影図を用いて作成し、利用することを考えていたが、たまたま同じ意図をもって著わされた Douglas P. Adams の論文〔文献2〕に接し、この機会に、前記論文を参考として、「投影図を用いた共面図表による計算」についてまとめてみたいと思う。もちろん、投影図を用いても、後述のように、不便は全面的に除去されるわけではないが、その不便な点については、その場合に応じて適当な補正を行い、一步でも実用に近づくことができるならば、大いに結構なことではないかと思う。

以上の意味から、私は、ここに、共線図表の原理を空間に拡張し、いくつかの具体例について、実際に、投影図による共面図表を作成し、計算する。その際に、予想される不便な点については、場合に応じて適当な補正を行い、できるだけ便利な、かつ広汎な利用を心がける。また、一例については、実際利用上の便利のため、更に射影変換を施して、共面図表の変換を試みる。なお、以下の所論のうち、一部は、既に、本誌第9号において発表したものである。

## § 1 平面における共線図表の原理

平面上の三点  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ ,  $P_3(x_3, y_3)$  が同一直線上にある（共線である）ための必要かつ十分な条件は、方程式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

が成立することである。いま  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  の座標を、媒介変数  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  を用い、これらの函数として、

$$\left. \begin{array}{l} (z_1) : \quad x_1 = f_1(z_1), \quad y_1 = g_1(z_1); \\ (z_2) : \quad x_2 = f_2(z_2), \quad y_2 = g_2(z_2); \\ (z_3) : \quad x_3 = f_3(z_3), \quad y_3 = g_3(z_3) \end{array} \right\} \quad (2)$$

と表わすとする。ここに,  $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$  の各函数は, すべて一価連続函数を表わすものとする。これらの媒介変数  $z_1, z_2, z_3$  にいろいろな値を与えるならば, 点  $P_1, P_2, P_3$  は, それぞれ第1図に示すように, 軌跡  $F_1, F_2, F_3$  をえがく。故に, 方程式(1)において,  $x_i, y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) がそれぞれ上の三組の方程式(2)で定義された三つの曲線  $F_1, F_2, F_3$  上の点  $P_1, P_2, P_3$  の座標を表わすものとすれば, 同一直線上にある三点を決定する媒介変数  $z_1, z_2, z_3$  の各々は, 常に, 方程式

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1) & g_1(z_1) & 1 \\ f_2(z_2) & g_2(z_2) & 1 \\ f_3(z_3) & g_3(z_3) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

を満足する。方程式(3)を,

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3')$$

と略記する。

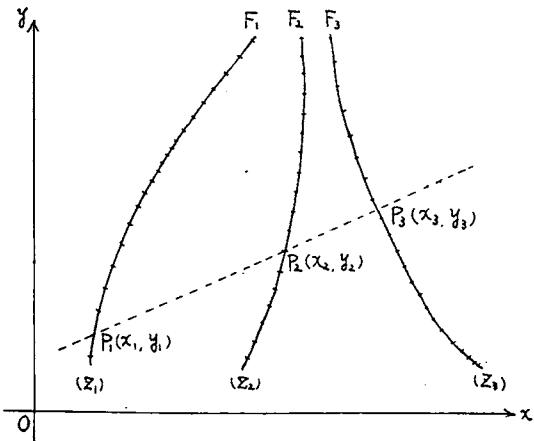
従って, 三変数の方程式の共線图表を求めるには, 与えられた方程式を(3)の行列式の形に表わし (このとき,  $f_1, g_1$  は  $z_1$  のみの函数,  $f_2, g_2$  は  $z_2$  のみの函数,  $f_3, g_3$  は  $z_3$  のみの函数として表わさねばならないことに注意), (2)で定義される三つの曲線をえがいて, それぞれの曲線上に, (2)に従って,  $z_1, z_2, z_3$ , なる目盛をつけなければよい。ただし, 上記の所論は, 各尺の尺度係数をすべて 1 として取扱ったものであるが, 尺度係数は, 必要に応じて適当に定めることができる。

方程式(3)を満足する  $z_1, z_2, z_3$  のうち, 任意の二つが与えられれば, 他の一つは必然的に決定される。例えば,  $z_1, z_2$  が与えられたとき,  $z_3$  を求めるには, 曲線  $F_1, F_2$  上にそれぞれ目盛  $z_1, z_2$  なる二点  $P_1, P_2$  をとり, この二点で定められる直線と, 残りの一曲線  $F_3$  との交点  $P_3$  に付されている目盛  $z_3$  を読みれば, これが求めるものである。

## § 2 共線图表の原理の空間への拡張——共面图表の原理——

空間における四点  $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2), P_3(x_3, y_3, z_3), P_4(x_4, y_4, z_4)$  が同一平面上にある (共面である) ための必要かつ十分な条件は, 方程式

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

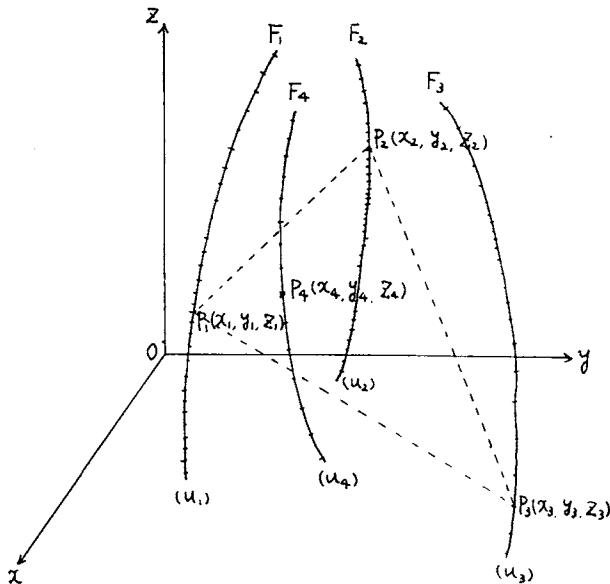


(第 1 図)

が成立することである。いま、 $P_1, P_2, P_3, P_4$  の座標を、媒介変数  $u_1, u_2, u_3, u_4$  を用い、これらの函数として、

$$\left. \begin{array}{l} (u_1) : x_1 = f_1(u_1), \quad y_1 = g_1(u_1), \quad z_1 = h_1(u_1); \\ (u_2) : x_2 = f_2(u_2), \quad y_2 = g_2(u_2), \quad z_2 = h_2(u_2); \\ (u_3) : x_3 = f_3(u_3), \quad y_3 = g_3(u_3), \quad z_3 = h_3(u_3); \\ (u_4) : x_4 = f_4(u_4), \quad y_4 = g_4(u_4), \quad z_4 = h_4(u_4) \end{array} \right\} \quad (5)$$

と表わすとする。ここに、 $f_1, f_2, f_3, f_4, g_1, g_2, g_3, g_4, h_1, h_2, h_3, h_4$  の各函数は、すべて一価連続函数を表わすものとする。これらの媒介変数  $u_1, u_2, u_3, u_4$  にいろいろな値を与えるならば、点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  は、それぞれ第2図に示すように、軌跡  $F_1, F_2, F_3, F_4$  をえがく。ここに、 $F_1, F_2, F_3, F_4$  は、空間曲線である。故に、方程式(4)において、 $x_i, y_i, z_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) がそれぞれ上の四組の方程式(5)で定義された四つの空間曲線  $F_1, F_2, F_3, F_4$  上の点  $P_1, P_2, P_3, P_4$  の座標を表わすものとすれば、同一平面上にある四点を決定する媒介変数  $u_1, u_2, u_3, u_4$  の各々は、常に、方程式



(第 2 図)

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1) & g_1(u_1) & h_1(u_1) & 1 \\ f_2(u_2) & g_2(u_2) & h_2(u_2) & 1 \\ f_3(u_3) & g_3(u_3) & h_3(u_3) & 1 \\ f_4(u_4) & g_4(u_4) & h_4(u_4) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

を満足する。方程式(6)を

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 & 1 \\ f_2 & g_2 & h_2 & 1 \\ f_3 & g_3 & h_3 & 1 \\ f_4 & g_4 & h_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6')$$

と略記する。

従って、四変数の方程式の共面図表を求めるには、与えられた方程式を(6)の行列式の形に表わし（このとき、 $f_1, g_1, h_1$  は  $u_1$  のみの函数、 $f_2, g_2, h_2$  は  $u_2$  のみの函数、 $f_3, g_3, h_3$  は  $u_3$  のみの函数、 $f_4, g_4, h_4$  は  $u_4$  のみの函数として表わさねばならないことに注意）、(5)で定義される四つの空間曲線をえがいて、それぞれの曲線上に、(5)に従って、 $u_1, u_2, u_3, u_4$  なる目盛をつければよい。上記の所論も、尺度係数はすべて 1 として取扱ったものであるが、尺度係数は、必要に応じて適当に定めることができる。

方程式(6)を満足する  $u_1, u_2, u_3, u_4$  のうち、任意の三つが与えられれば、他の一つは必然的に決定される。例えば、 $u_1, u_2, u_3$  が与えられたとき、 $u_4$  を求めるには、曲線  $F_1, F_2, F_3$  上にそれぞれ目盛  $u_1, u_2, u_3$  なる三点  $P_1, P_2, P_3$  をとり、この三点で定められる平面と、残りの一曲線  $F_4$  との交点  $P_4$  に付されている目盛  $u_4$  を読めば、これが求めるものである。

さて、次に、この原理を用いて、共面図表を作成すればよいわけであるが、この作成は容易ではない。何故ならば、共面図表は空間图形であるから、そのままの形で表わそうとすれば、立体模型を必要とするからである。かりに、一步をゆずって、このような立体模型が作成できたとしても、実用には相当の繁雑さを要するであろう。過去の文献によれば、いろいろな方法を用いているのがみられるが、何れも、特殊な器具を必要としている。〔文献1, 3〕

この不便を除去するため、私は、はじめに述べたように、Douglas P. Adams の論文〔文献2〕に述べられた方法を参考として、この共面図表を、直角投影法を用いて平面上に表わし、平面図、立面図、側面図のうち、できるだけ少数の図表を用いて、実際の計算に直接利用できるよう、試みるのである。

以下に、具体的な例によって、この方法を述べてみたい。

### § 3 例1 $a+b+c=d$ 及び $abc=d$

最初の例としては、四変数方程式としては最も容易な三数の和

$$a+b+c=d \quad (7)$$

をとる。(7)はまた、

$$a+b+c-d=0$$

とも表わされ、次の行列式で表わすことができる。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & c & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & d \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

従って、四直線  $a, b, c, d$  を

$$\left. \begin{array}{l} (a) : x_1=0, \quad y_1=0, \quad z_1=a ; \\ (b) : x_2=1, \quad y_2=0, \quad z_2=b ; \\ (c) : x_3=0, \quad y_3=1, \quad z_3=c ; \\ (d) : x_4=-\frac{1}{3}, \quad y_4=-\frac{1}{3}, \quad z_4=-\frac{1}{3}d \end{array} \right\} \quad (9)$$

によって定義すれば、付図1に示すような四直線が得られる。これらの直線上に、(9)に従って、目盛  $a, b, c, d$  を付ける。

三直線  $a, b, c$  上に、それぞれ、目盛  $(a), (b), (c)$  なる三点をとり、この三点を通る平面と直線  $d$  との交点に付けられた目盛  $(d)$  を読めば、求める和  $a+b+c$  を得る。

付図1 の直角投影図が付図2であるが、この例の場合は、二直線  $c, d$  の中間に、 $c, d$  より等距離にある平行線を補助線として一本つけ加えれば、平面図、及び側面図は、実際上不要で、立面図のみで足りる。もちろん、この補助線には、何らの目盛を付ける必要はない。付図2の中に示してある1, 2, 3の数字は、 $a, b, c$  を与えて、和  $d$  を求める計算の順序を示したものである。即ち、三直線  $a, b, c$  上に、それぞれ目盛  $(a), (b), (c)$  な

る三点をとり、二点  $(a)$ ,  $(c)$  を結ぶ直線（番号 1 の直線）と補助線との交点から、二点  $(b)$ ,  $(c)$  を結ぶ直線（番号 2 の直線）に平行に引いた直線（番号 3 の直線）と、直線  $d$  との交点を  $(d)$  とすれば、求める和  $d$  が得られる。また、この手順を 1, 3, 2 の順に行えば、逆計算、即ち、 $a$ ,  $c$ ,  $d$  を与えて  $b=d-a-c$  を求めることができる。付図 3 は実際に用いる式(7)の計算図で、図中の例は、

$$a=8.5,$$

$$b=1.8,$$

$$c=3.2,$$

を与えて、和

$$d=13.5$$

を得る計算を示したものである。

また、この一つの応用として、三数の積

$$abc=d \quad (10)$$

を求めることができる。即ち、(10)の両辺の常用対数をとれば、

$$\log a + \log b + \log c = \log d$$

$$\therefore \log a + \log b + \log c - \log d = 0 \quad (11)$$

となり、(11)は次の行列式で表わすことができる。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \log a & 1 \\ 1 & 0 & \log b & 1 \\ 0 & 1 & \log c & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \log d & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

従って、四直線  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  を

$$\left. \begin{array}{l} (a) : x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \log a ; \\ (b) : x_2 = 1, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \log b ; \\ (c) : x_3 = 0, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = \log c ; \\ (d) : x_4 = -\frac{1}{3}, \quad y_4 = -\frac{1}{3}, \quad z_4 = -\frac{1}{3} \log d \end{array} \right\} \quad (13)$$

によって定義すれば、前と同じようにして、四直線が得られ、これらの直線上に、(13)に従って、目盛  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  をつける。

三直線  $a$ ,  $b$ ,  $c$  上に、それぞれ、目盛  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$  なる三点をとり、この三点を通る平面と直線  $d$  との交点に付けられた目盛  $(d)$  を読めば、求める積  $abc$  を得る。

付図 1, 付図 2 は、この場合も、全く同様に考えることができ、付図中の 1, 2, 3 の数字は、 $a$ ,  $b$ ,  $c$  を与えて、積  $d$  を求める順序である。その方法は、さきの和の場合と全く同様である。この手順を、1, 3, 2 の順に行えば、逆計算、即ち、 $a$ ,  $c$ ,  $d$  を与えて、 $b=\frac{d}{ac}$  を求めることができる。付図 4 は、実際に用いるための、式(10)の計算図で、図中の例は、

$$a=4.5,$$

$$b=1.5,$$

$$c=2.4$$

を与えて、積

$$d = 16.2$$

を得る計算を示したものである。

更に、上記の所論は、一般に、

$$F_1(u_1) + F_2(u_2) + F_3(u_3) = F_4(u_4) \quad (14)$$

及び

$$F_1(u_1) \cdot F_2(u_2) \cdot F_3(u_3) = F_4(u_4) \quad (15)$$

なる形式の四変数の方程式の計算図表の作成、ならびに計算に、そのまま応用することができる。即ち、式(14), (15)は、それぞれ、行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & F_1(u_1) & 1 \\ 1 & 0 & F_2(u_2) & 1 \\ 0 & 1 & F_3(u_3) & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} F_4(u_4) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

及び

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \log F_1(u_1) & 1 \\ 1 & 0 & \log F_2(u_2) & 1 \\ 0 & 1 & \log F_3(u_3) & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \log F_4(u_4) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

で表わされ、四直線は、それぞれ、

$$\left. \begin{array}{l} (u_1) : x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = F_1(u_1); \\ (u_2) : x_2 = 1, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = F_2(u_2); \\ (u_3) : x_3 = 0, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = F_3(u_3); \\ (u_4) : x_4 = -\frac{1}{3}, \quad y_4 = -\frac{1}{3}, \quad z_4 = -\frac{1}{3} F_4(u_4) \end{array} \right\} \quad (18)$$

及び

$$\left. \begin{array}{l} (u_1) : x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \log F_1(u_1); \\ (u_2) : x_2 = 1, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = \log F_2(u_2); \\ (u_3) : x_3 = 0, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = \log F_3(u_3); \\ (u_4) : x_4 = -\frac{1}{3}, \quad y_4 = -\frac{1}{3}, \quad z_4 = -\frac{1}{3} \log F_4(u_4) \end{array} \right\} \quad (19)$$

で定義される。図表の作り方、ならびに、計算方法は、上にあげた二つの例と全く同様である。

$$\S 4 \quad \text{例2} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{及び} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

第二の例として、和、積と共に、最も有用な比例式

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (20)$$

をとる。(20)はまた、

$$ad - bc = 0$$

と表わすことができ、この式は、行列式

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & d & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

で表わされる。従って、四直線  $a, b, c, d$  を、

$$\left. \begin{array}{l} (a) : x_1=a, \quad y_1=0, \quad z_1=0 ; \\ (b) : x_2=b, \quad y_2=1, \quad z_2=0 ; \\ (c) : x_3=0, \quad y_3=0, \quad z_3=c ; \\ (d) : x_4=0, \quad y_4=1, \quad z_4=d \end{array} \right\} \quad (22)$$

によって定義すれば、付図5に示すような四直線が得られる。これらの直線上に、(22)に従って、目盛  $a, b, c, d$  を付ける。

例えば、 $a, b, c$  が与えられて、第四比例項  $d$  を求めるには、三直線  $a, b, c$  上に、それぞれ、目盛 (a), (b), (c) なる三点をとり、この三点を通る平面と直線  $d$  との交点に付せられた目盛 (d) を読めば、これが、第四比例項  $d$  である。

付図5の直角投影図が、付図6であるが、この場合は、側面図は必要なく、立面図及び平面図のみで計算することができる。付図6の中に示してある1, 2の数字は、 $a, b, c$  を与えて、第四比例項  $d$  を求める計算の順序を示したものである。即ち、二直線  $a, b$  上に、それぞれ、目盛(a), (b) なる二点をとり、二点(a), (b) を結ぶ直線（番号1の直線）と基線との交点と、直線  $c$  上の目盛(c) なる点を結ぶ直線（番号2の直線）を引き、直線  $d$  との交点を(d) とすれば  $d$  は、求める第四比例項である。また、この場合は、 $a, b, c, d$  のうち、 $a, b, c$  に限らず、どの三つを与えて、他の一つを求める計算においても、その方法は、上記の方法と、本質的には同一である。

なお、本例においては、何も、立面図と平面図とを、はっきりと区別することは必要でなく、作成及び計算の便宜から考えれば、平面図を立面図と一致させれば更に便利である。即ち、平画面を、基線を軸として、立画面に一致するまで回転させればよい。付図7はこれを考慮に入れて作成された、実際に用いるための、式(20)の計算図で、図中の例は、

$$\begin{aligned} a &= 9.3, \\ b &= 3.1, \\ c &= 4.5 \end{aligned}$$

を与えて、第四比例項

$$d = 1.5$$

を得る計算を示したものである。

この一つの応用として、平面三角法における正弦法則

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad (23)$$

の共面図表を求めてみよう。(23)はまた、

$$a \sin B - b \sin A = 0$$

と表わすことができる。また、

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

は、記号を変えれば、(23)と同様であるから、別に論ずる要はない。式(23)は、次の行列式で表

わすことができる。

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 10\sin A & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 10\sin B & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

従つて、四直線  $a, A, b, B$  を、

$$\left. \begin{array}{l} (a) : x_1 = a, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0 ; \\ (A) : x_2 = 10\sin A, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 0 ; \\ (b) : x_3 = 0, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = b ; \\ (B) : x_4 = 0, \quad y_4 = 1, \quad z_4 = 10\sin B \end{array} \right\} \quad (25)$$

によって定義すれば、前と同じようにして、四直線が得られ、これらの直線上に、(25)に従つて、目盛  $a, A, b, B$  をつける。

四変数のうち、任意の三つ、例えば、 $a, A, B$  が与えられたとき、他の一つ  $b$  を求めるには、三直線  $a, A, B$  上に、それぞれ、目盛  $(a), (A), (B)$  なる三点をとり、この三点を通る平面と直線  $b$  との交点に付けられた目盛  $(b)$  を読めば、これが求める  $b$  である。

付図 5, 付図 6 は、図中の文字  $a, b, c, d$  を  $a, A, b, B$  とつけかえれば、この場合も、全く同様に考えることができる。計算のための手順は、前例とほぼ同様であつて、図中の数字 1, 2 は同じ意味で解くことができる。また、他の三つが与えられても、計算方法は、本質的には同一である。

なお、本例においても、立面図と平面図とを、基線を軸とする回転によって一致させるならば、更に便利である。付図 8 は、これを考慮に入れて作成された、実際に用いるための、式(24)の計算図で、図中の例は、

$$\begin{aligned} a &= 9.5, \\ A &= 30^\circ, \quad (\text{或いは } 150^\circ), \\ B &= 18^\circ \end{aligned}$$

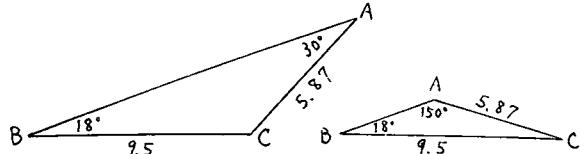
を与えて、

$$b = 5.87$$

を得る計算を示したものである。(第 3 図の二つの三角形参照)

なお、本節の例のような比例式の計算は、よく知られているように、共線図表においても有用な一例である。後述するように、共面図表においても、かような比例計算を、補助として用いると、便利な場合も多いので、ここに一例としてあげておきたい。詳細は周知であろうから省略するが、例えば、付図 9 は、式(24)のための共線図表である。この図の中に示してある例は、

$$\begin{aligned} a &= 5.0, \\ A &= 65^\circ, \\ B &= 40^\circ \end{aligned}$$



(第 3 図)

を与えて、

$$b = 3.55$$

を求める計算を示したものである。

また、正弦法則(2)を用いて、三角形を解く際の計算においては、付図10のような、

$$A + B + C = 180 \quad (26)$$

の共線図表を用いれば、一層便利となろう。図中の例は、

$$A = 45^\circ,$$

$$B = 75^\circ$$

を与えて、

$$C = 60^\circ$$

を求めたものである。

更に、上記の所論は、一般に、

$$\frac{F_1(u_1)}{F_2(u_2)} = \frac{F_3(u_3)}{F_4(u_4)}, \quad (27)$$

あるいは、

$$F_1(u_1) \cdot F_4(u_4) = F_2(u_2) \cdot F_3(u_3)$$

なる形式の四変数の方程式の共面図表の作成、ならびに計算に、そのまま応用することができる。即ち、式(27)は、行列式

$$\begin{vmatrix} F_1(u_1) & 0 & 0 & 1 \\ F_2(u_2) & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & F_3(u_3) & 1 \\ 0 & 1 & F_4(u_4) & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (28)$$

で表わされ、四直線  $u_1, u_2, u_3, u_4$  は、それぞれ、

$$\left. \begin{array}{l} (u_1) : x_1 = F_1(u_1), \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0 \\ (u_2) : x_2 = F_2(u_2), \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 0 \\ (u_3) : x_3 = 0, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = F_3(u_3); \\ (u_4) : x_4 = 0, \quad y_4 = 1, \quad z_4 = F_4(u_4) \end{array} \right\} \quad (29)$$

で定義される。図表の作り方、ならびに、計算方法は、上にあげた二つの例と全く同様である。

### § 5 例 3 $Y = \frac{X - M}{\sigma}$

数理統計学によれば、平均値がそれぞれ  $M_1, M_2$ 、標準偏差がそれぞれ  $\sigma_1, \sigma_2$  なる二つの相異った正規母集団から取り出された二つの変量を、それぞれ、 $X_1, X_2$  とするとき、この二者を比較するには、それぞれの母集団における、 $X_1, X_2$  の標準測度

$$Y_1 = \frac{X_1 - M_1}{\sigma_1}, \quad \text{及び} \quad Y_2 = \frac{X_2 - M_2}{\sigma_2}$$

を算出し、この  $Y_1, Y_2$  によって、比較を行うことが知られている。

この計算のために、

$$Y = \frac{X - M}{\sigma} \quad (30)$$

の共面図表の作成を試みる。

式(30)は、また、

$$\sigma Y - X + M = 0$$

と表わされ、これは、次の行列式で表わすことができる。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & X & 1 \\ 0 & 1 & M & 1 \\ 1 & \frac{1}{\sigma} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & Y & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

従って、四直線  $X, M, \sigma, Y$  を、

$$\left. \begin{array}{l} (X) : x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = X ; \\ (M) : x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = M ; \\ (\sigma) : x_3 = 1, \quad y_3 = \frac{1}{\sigma}, \quad z_3 = 0 ; \\ (Y) : x_4 = 1, \quad y_4 = 0, \quad z_4 = Y \end{array} \right\} \quad (32)$$

によって定義すれば、付図11に示すような四直線が得られる。これらの直線上に、(32)に従って、それぞれ、目盛  $X, M, \sigma, Y$  をつける。

$X, M, \sigma$  が与えられたとき、標準測度  $Y$  を求めるには、三直線  $X, M, \sigma$  上にそれぞれ  $(X), (M), (\sigma)$  なる三点をとり、この三点を通る平面と、直線  $Y$  との交点に付けられた目盛  $(Y)$  を読めば、この  $(Y)$  が、求める標準測度である。

付図12は、付図11の直角投影法による投影図である。二直線  $X, M$  上に、それぞれ、目盛  $(X), (M)$  なる二点をとり、二点  $(X), (M)$  を結ぶ直線（番号1の直線）と基線（ $y$  軸）との交点と、直線  $\sigma$  上の目盛  $(\sigma)$  なる点とを結ぶ（番号2の直線）。この直線と基線（ $x$  軸）との交点と、点  $(X)$  とを結ぶ直線（番号3の直線）と、直線  $Y$  との交点に付されている目盛  $(Y)$  を読めば、この  $(Y)$  が、求める標準測度である。

この場合には、一応、平面図、立面図、側面図のすべてを必要とするが、側面図を、基線（ $z$  軸）を対称軸として、対称移動を行い、立面図の位置に移すならば、紙面の無駄をはぶき、必要部分の図表を更に拡大して、精度を上げることができよう。付図13は、このようにして得られたものである。なお、この際に、 $M$  直線と  $Y$  直線とを一致させることも可能であり、こうすれば、作図上便利なのであるが、目盛の幅や、計算の精度などを考えて、意識的に、異った直線として図示してあることを諒解されたい。また、単に、計算上の便利から考えれば、 $X$  直線及び  $Y$  直線を、原点を回転の中心として、 $-90^\circ$  の回転移動を施し、 $Y$  直線を、 $\sigma$  直線と一致させ（もちろん、目盛は同一ではない）ておけば、四分円を作図する手数が省かれて、計算の手順を一回減らすこともできる（付図14）。付図15は、これらを考慮して作成された、実際に用いるための、式(30)の計算図である。

付図15に示された、式(30)の計算図には、 $X, M$  共に、34以上の目盛ではなく、34以上の  $X, M$  については用いることができない。しかし、式(30)によれば、明らかに、 $X$  と  $M$  とは、その値自体よりも、その差が必要とされている。従って、付図15に表わされていない目盛を用いる必要があれば（むしろ、そのような場合が一般に多いのであるが）、 $X, M$  から、それぞれ、一定値を減じて、計算することができる。例えば、 $X=70, M=50$  の際には、それぞれ40を減じて、 $X=30, M=10$  として求めて、標準測度  $Y$  の値には変りがない。この性質を考えれば、付図15に表わされている目盛で、実用上、何ら差支えないことが理解され

るであろう。また、 $M > X$  のときは、 $M$ 直線、 $X$ 直線を逆に用い、 $Y$ の目盛を負として考えれば、実用上、更に好都合である。

付図15に示された計算例は、

$$X=80, \quad (X=30),$$

$$M=62, \quad (M=12),$$

$$\sigma=2.5$$

を与えて、標準測度

$$Y=7.2$$

を求める計算である。

更に、 $\sigma$  をもっと有効に利用するために、 $X$ 直線、 $M$ 直線はそのままとし、 $\sigma$ 直線、 $Y$ 直線の目盛を、一次変換によって変換することができる。即ち、式(30)において、任意の定数 $n$ を定め、 $\sigma$ 及び $Y$ の代りに、それぞれ、 $\frac{1}{n}\sigma$ 、 $nY$ を用いても、式(30)には、何らの影響も起らないから、式(31)の代りに、行列式

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & X & 1 \\ 0 & 1 & M & 1 \\ 1 & \frac{n}{\sigma} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & nY & 1 \end{array} \right| = 0 \quad (33)$$

を用い、四直線  $X$ 、 $M$ 、 $\sigma$ 、 $Y$  を、

$$\left. \begin{array}{l} (X) : x_1=0, \quad y_1=0, \quad z_1=X ; \\ (M) : x_2=0, \quad y_2=1, \quad z_2=M ; \\ (\sigma) : x_3=1, \quad y_3=\frac{n}{\sigma}, \quad z_3=0 ; \\ (Y) : x_4=0, \quad y_4=0, \quad z_4=nY \end{array} \right\} \quad (34)$$

で定義することができる。ここに、 $n$ は任意な定数であるから、このような一次変換を用いるならば、必要に応じて、定数 $n$ を適当に定め、実用上好都合な図表を作成することができる。作成、及び、計算の方法は、前述と全く同様である。付図16は、(33)、(34)において、 $n=5$ とおいて作成した計算図であって、図中の例は、

$$X=80, \quad (X=30),$$

$$M=62, \quad (M=12),$$

$$\sigma=10$$

を与えて、

$$Y=1.8$$

を求める計算を示したものである。

教育統計学においては、知能検査の際ににおける標準偏差値など、標準検査の成績の処理の際に、式(30)の代りに、

$$Y=50 + \frac{10(X-M)}{\sigma} \quad (35)$$

を用いる場合が多い。このときには、

$$\frac{Y-50}{10} = Y'$$

とおけば、式(36)は、事実上、式(30)と同一となるから、例えば、式(33)で、 $n=5$ とおいた図表(付図16)にならって、式(36)を、行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & X & 1 \\ 0 & 1 & M & 1 \\ 1 & \frac{5}{\sigma} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \times \frac{Y-50}{10} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (36)$$

で表わし、四直線  $X, M, \sigma, Y$  を、

$$\left. \begin{array}{l} (X) : \quad x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = X ; \\ (M) : \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = M ; \\ (\sigma) : \quad x_3 = 1, \quad y_3 = \frac{5}{\sigma}, \quad z_3 = 0 ; \\ (Y) : \quad x_4 = 1, \quad y_4 = 0, \quad z_4 = \frac{1}{2}(Y-50) \end{array} \right\} \quad (37)$$

で定義すれば、式(36)の共面図表が得られる。作成、及び、計算の方法は、前述と全く同様であり、付図17は、このようにして得られた、実際に用いるための、式(36)の計算図であって、図中の例は、

$$\begin{aligned} X &= 80, \quad (X=30), \\ M &= 62, \quad (M=12), \\ \sigma &= 6 \end{aligned}$$

を与えて、

$$Y=80$$

を得る計算を示したものである。なお、この場合も、 $M>X$  のときは、 $M$  直線、 $X$  直線を逆に用い、 $Y$  の目盛は、 $Y<50$  の方を用いて、 $Y$  を求めることができる。

$$\S 6 \text{ 例 4 } \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

三角形の内接円の半径を  $R$ 、三つの傍接円の半径を、それぞれ、 $r_1, r_2, r_3$  とすると、これらの間には、

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \quad (38)$$

なる関係式が成立立つ。また、電気抵抗が、それぞれ、 $r_1, r_2, r_3$  なる導線を、並列に連結したときの合成抵抗  $R$  も、全く同一の式(38)で表わされる。この式は、形からみれば、§3で述べた式(4)と同一の形であるが、本節においては、これを異った方法で論じてみたい。

式(38)の分母を払って、移項し、変形すると、

$$\begin{aligned} r_1 r_2 r_3 - R r_2 r_3 - R r_1 r_3 - R r_1 r_2 &= 0, \\ r_2 r_3 (r_1 - R) - R r_1 r_3 - R r_1 r_2 &= 0 \end{aligned}$$

となり、両辺を  $r_1^2$  で除すると、

$$\frac{r_2 r_3}{r_1^2} (r_1 - R) - \frac{R r_3}{r_1} - \frac{R r_2}{r_1} = 0$$

を得る。ここにおいて、

$$\frac{r_2}{r_1} = r'_2, \quad \frac{r_3}{r_1} = r'_3 \quad (39)$$

とおけば、

$$r'_2 r'_3 (r_1 - R) - R r'_3 - R r'_2 = 0 \quad (40)$$

を得る。

$r_1, r_2, r_3$  が与えられたとき、(39)によつて、 $r'_2, r'_3$  を求め、 $r_1, r'_2, r'_3$  によつて、(40)から、 $R$ を求めることができる。本節では、この意図に従つて、式(39)の代りに、式(40)の共面図表を作成し、計算するのである。

式(40)は、行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & r_1 & 1 \\ 1 & r'_2 + 1 & 0 & 1 \\ r'_3 + 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & R & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

で表わすことができ、従つて、四直線  $r_1, r'_2, r'_3, R$  を、

$$\left. \begin{array}{l} (r_1) : x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = r_1 ; \\ (r'_2) : x_2 = 1, \quad y_2 = r'_2 + 1, \quad z_2 = 0 ; \\ (r'_3) : x_3 = r'_3 + 1, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = 0 ; \\ (R) : x_4 = 1, \quad y_4 = 1, \quad z_4 = R \end{array} \right\} \quad (42)$$

によつて定義すれば、付図18に示すような四直線  $r_1, r'_2, r'_3, R$  が得られ、これらの直線上に、(42)に従つて、それぞれ、目盛  $r_1, r'_2, r'_3, R$  をつける。

$r_1, r_2, r_3$  が与えられたとき、 $R$  を求めるには、次のようにすればよい。即ち、 $r_1, r_2, r_3$  が与えられれば、(39)によつて、 $r'_2, r'_3$  が求まる。従つて、三直線  $r_1, r'_2, r'_3$  上に、それぞれ、目盛  $(r_1), (r'_2), (r'_3)$  なる三点をとり、この三点を通る平面と、直線  $R$  との交点に付されている目盛  $(R)$  を読めば、この  $R$  が求めるものである。

付図19は、付図18の直角投影法による投影図である。二直線  $r'_2, r'_3$  上に、それぞれ目盛  $(r'_2), (r'_3)$  なる二点をとり、二点  $(r'_2), (r'_3)$  を結ぶ直線（番号1の直線）と基線との交点と、直線  $r_1$  上の目盛  $(r_1)$  なる点とを結ぶ（番号2の直線）。次に、直線  $r'_2$  又は  $r'_3$  の目盛0なる点から、番号1の直線に平行な直線（番号3の直線）をひき、これと基線との交点において、基線に垂直な直線（番号4の直線）を立てる。次に、番号4の直線と番号2の直線との交点から、基線に平行にひいた直線（番号5の直線）と、直線  $R$  との交点に付されている目盛  $(R)$  を読めば、この  $(R)$  が求めるものである。この場合には、平面図と立面図とを必要とし、側面図は不要である。

逆計算、即ち、例えれば、 $r_1, r_2, R$  が与えられて、 $r_3$ を求めるには、次のようにすればよい。式(39)より、

$$-\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{R} \quad (43)$$

であるから、式(43)を、

$$\frac{1}{-r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{-R}$$

と考えて、上述の  $r_1, r_2, r_3, R$  の各直線に対して、それぞれ、代りとして、 $r_1, r_2, R, r_3$  の各直線を用い、このうち、 $R, r_3$  の二直線は、負の目盛の方を利用すれば、計算方法は、上述の方法と全く同一である。この便宜を考えれば、二直線  $R, r_3$  には、負の目盛をも付しておくようにすればよい。

また、この共面図表では、逆計算の一つとして、次のような計算に極めて有効である。式(38)において、 $R$ ,  $r_1$ , 及び、比 $\frac{r_2}{r_3}$ が与えられると、 $r_2$ ,  $r_3$ を同時に求めることができる。このことは、他の例にみられない特色である。即ち、付図19において、番号1の直線の傾きは、 $r_2$ ,  $r_3$ の比で定まるから、先ず、二直線 $r'_2$ ,  $r'_3$ 上に、それぞれ、目盛( $r_2$ ), ( $r_3$ )なる二点をとり、この二点を結ぶ直線に平行に、直線 $r'_2$ または $r'_3$ の目盛0なる点を通じて直線(番号3の直線)をひく。番号3の直線と基線との交点において、基線に垂直な直線(番号4の直線)を立て、直線 $R$ 上の目盛( $R$ )なる点から、基線に平行線(番号5の直線)をひき、番号4の直線と番号5の直線との交点をつくる。この交点と、直線 $r_1$ 上の目盛( $r_1$ )なる点を結び(番号2の直線)，この直線と基線との交点から、番号3の直線に平行にひいた直線と、二直線 $r'_2$ ,  $r'_3$ との交点に付されている目盛を、それぞれ、( $r'_2$ ), ( $r'_3$ )とすれば、この $r'_2$ と $r'_3$ ならびに、 $r_1$ から、(39)に従って、

$$r_2 = r_1 r'_2, \quad r_3 = r_1 r'_3 \quad (44)$$

が同時に求められる。

なお、式(39)及び(44)における変換を便利にするためには、補助図表として、

$$r'_i = \frac{r_i}{r_1} \quad (i=2, 3) \quad (45)$$

の共線図表を準備しておけば、更に好都合であろう。

付図20は、以上のこと考慮して作成された、実際に用いるための、式(38)の計算図であって、その右下方にある共線図表は、式(45)のための補助図表である。図中の実線の例は、

$$r_1 = 10,$$

$$r_2 = 70,$$

$$r_3 = 50$$

を与えて、補助図表で、

$$r'_2 = 7,$$

$$r'_3 = 5$$

を求め、その上で、

$$R = 7.45$$

を得る計算を示したものである。なお、このときの $R$ の厳密な値は、

$$R = 7.446808\ldots$$

である。また、点線の例は、

$$r_1 = 2,$$

$$r_2 = 6,$$

$$R = 1$$

を与えて、補助図表で、

$$\frac{r_2}{r_1} = 3,$$

$$\frac{R}{r_1} = 0.5$$

を求め、その上で、

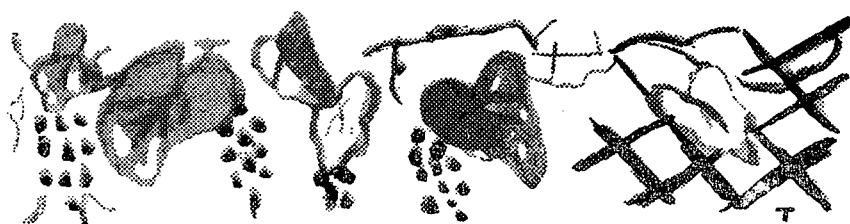
$$r_3 = 3$$

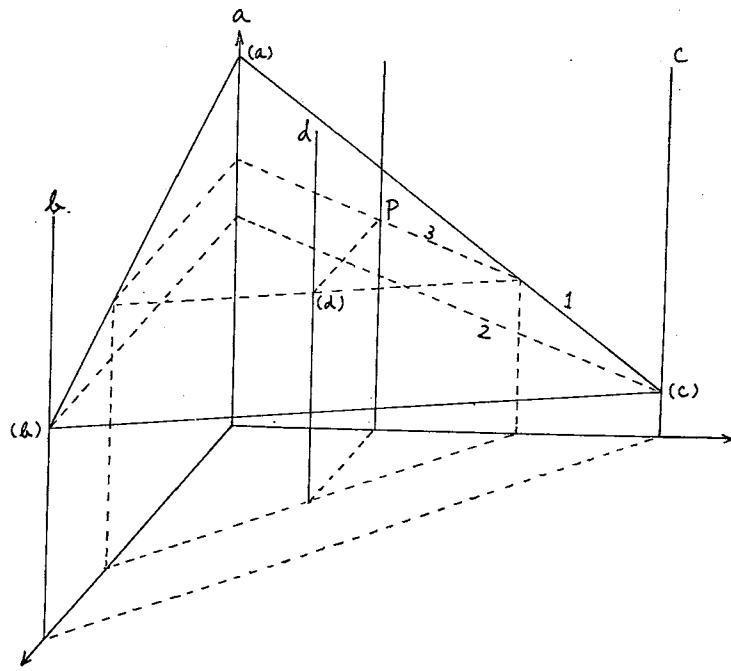
を求める計算を示している。

(以下次号)

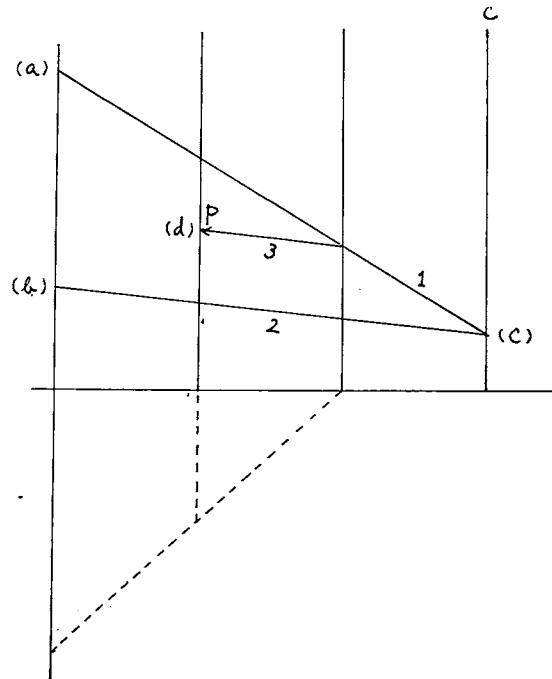
### 参考文献

- 1 Josef Sutor; Stereonomogramme, Mitteilungen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Jan. 1940, Ht. 4, S. 158—171. (航測文献集 No. 11  
=立体計算図表, 大日本航空株式会社航測所刊, 昭和17年)
- 2 Douglas P. Adams; Three Dimensional Nomograms. (Presented to the American Society for Engineering Education, Drawing Division, Winter Session, held at Univ. of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania, Jan. 1954)
- 3 小倉金之助; 計算図表 (岩波全書), 岩波書店, 昭和23年, 144—148ページ
- 4 谷村豊太郎; 計算図表学, 丸善出版株式会社, 昭和23年, 140—143ページ・  
348—357ページ
- 5 渡辺義勝; 計算図表学 (佐々木, 志賀; 計算機械と共に, 応用数学第10巻),  
河出書房, 昭和22年, 191—194ページ・221—228ページ・243—252ページ

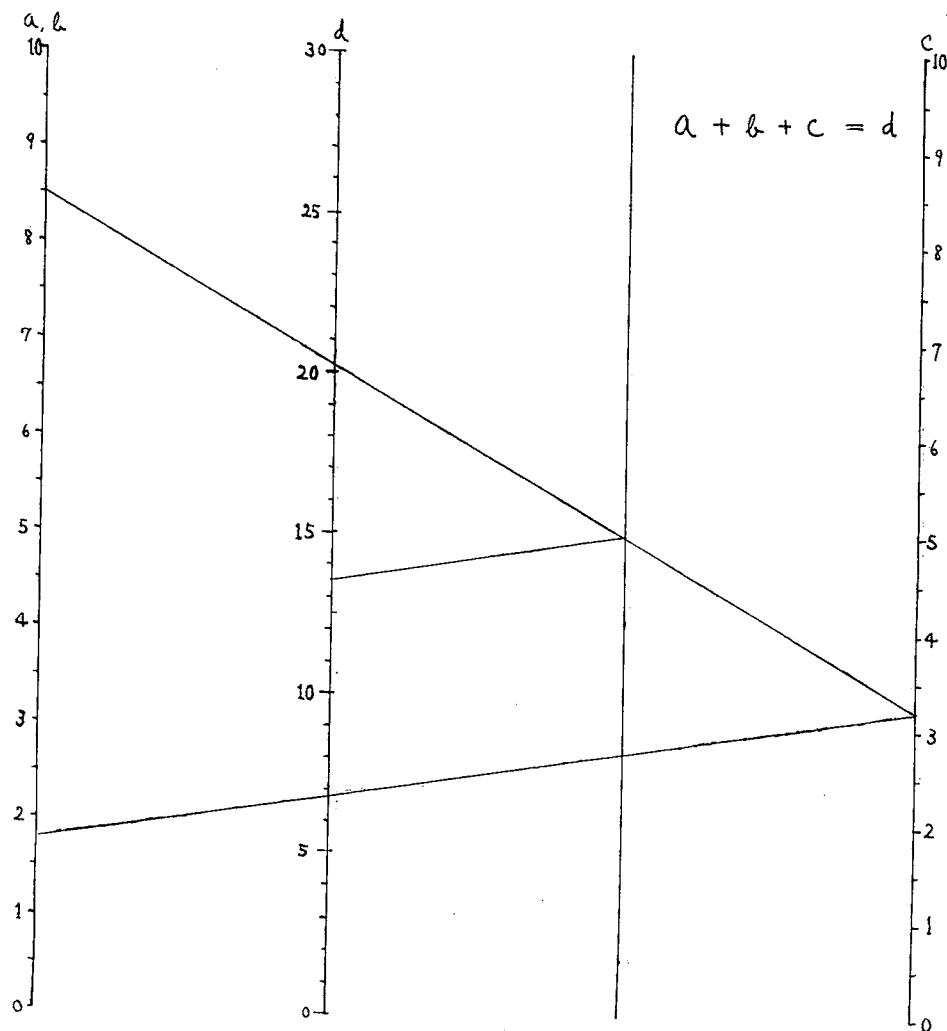




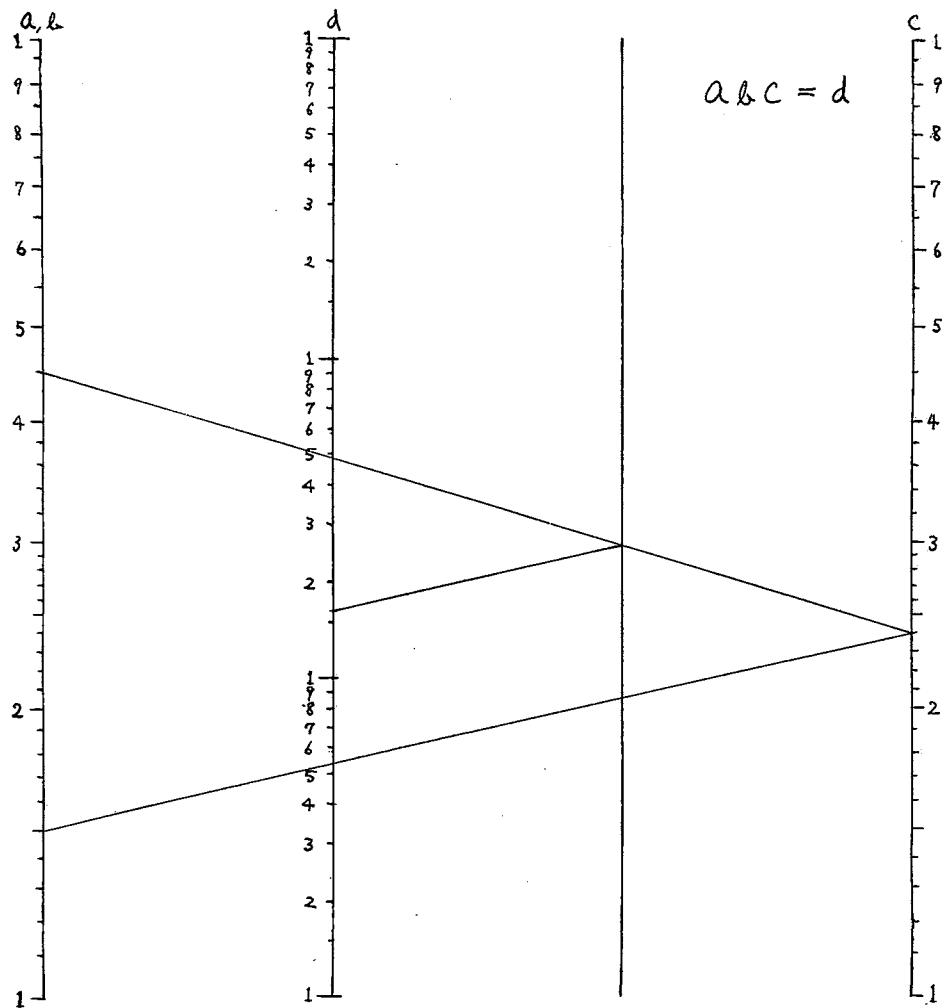
(付図 1)



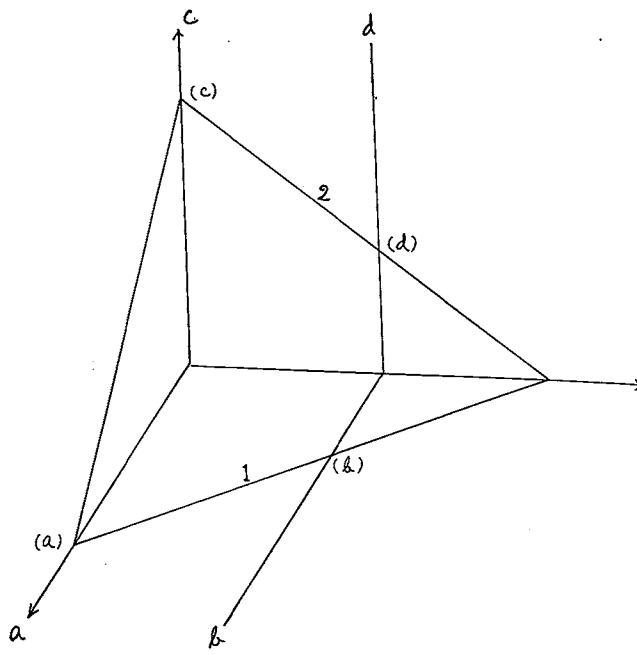
(付図 2)



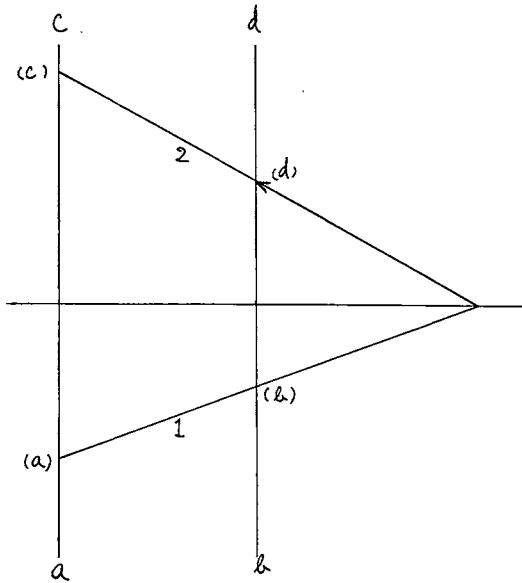
(付図 3)



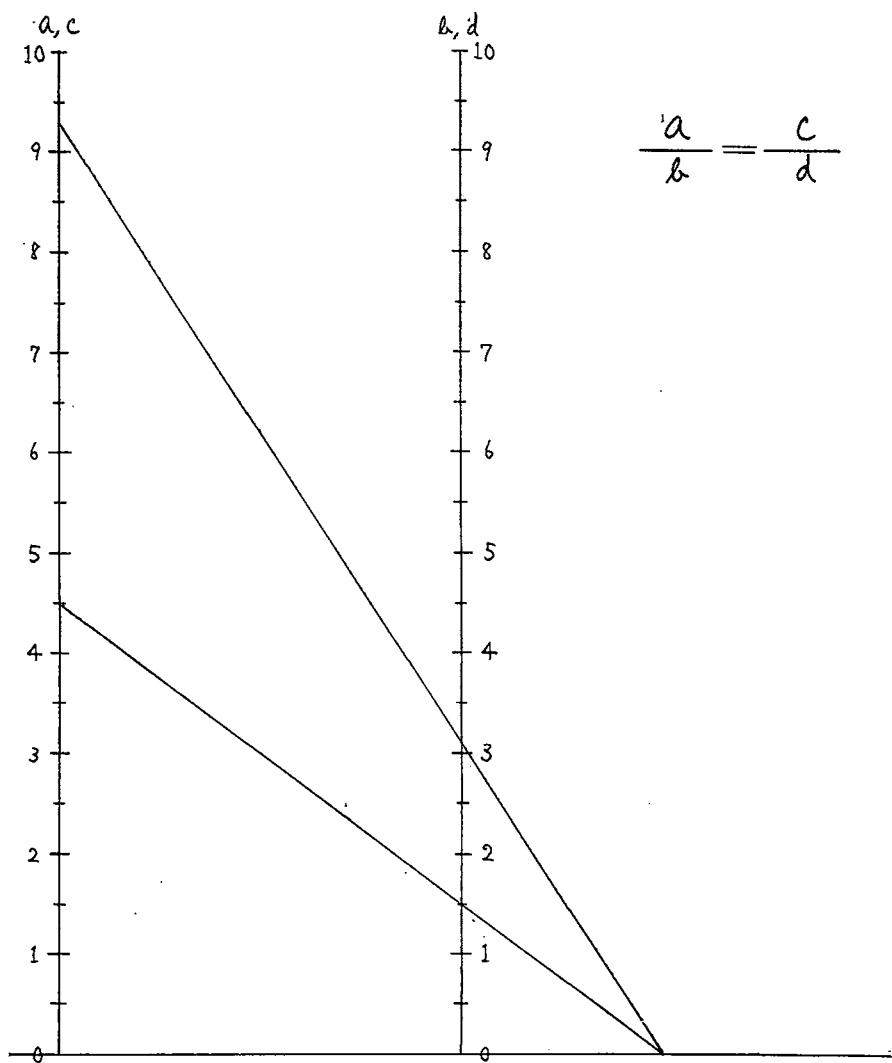
(付図4)



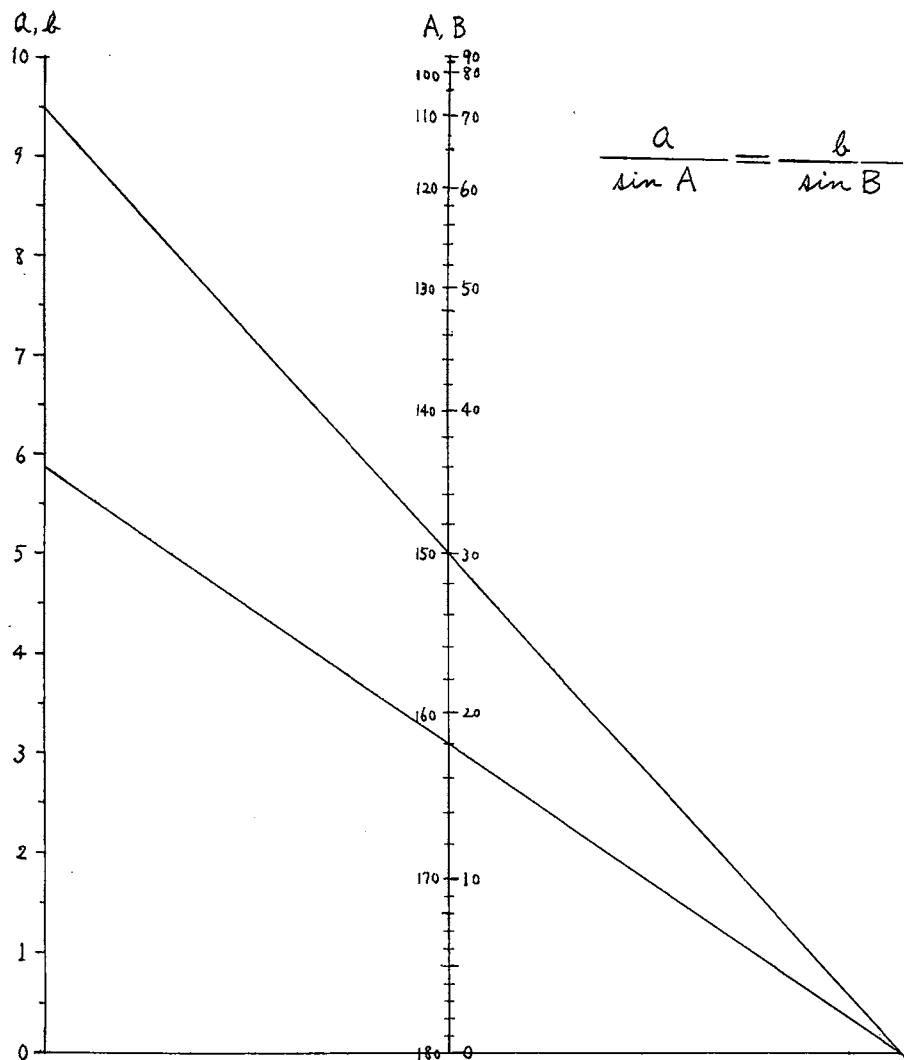
(付図 5)



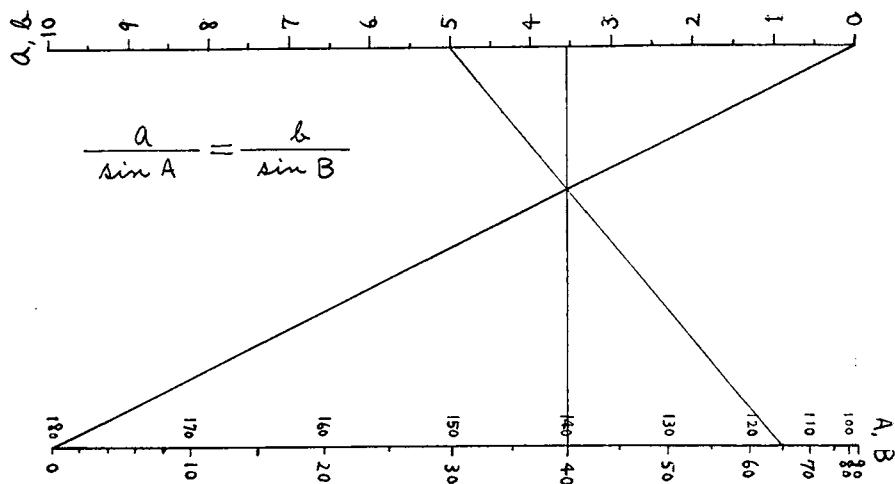
(付図 6)



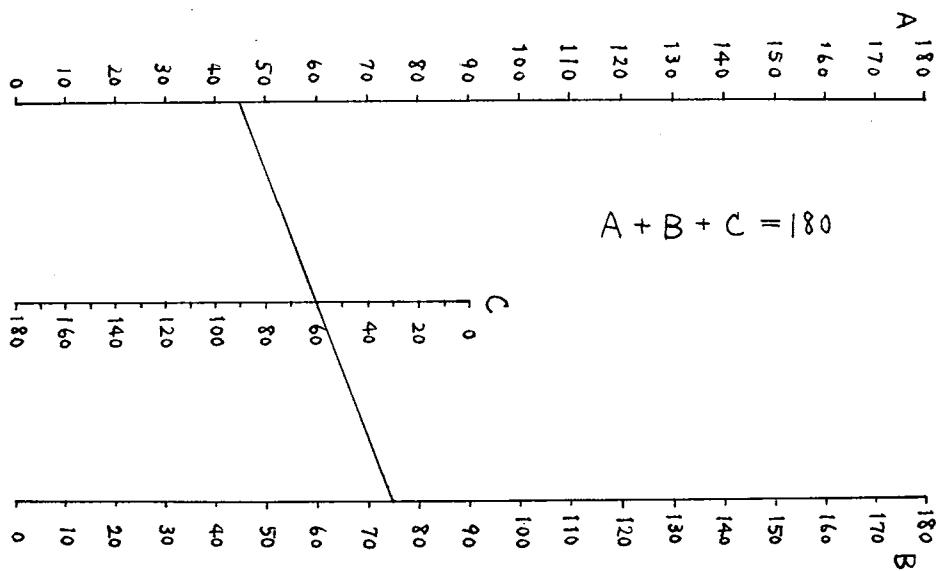
(付図 7)



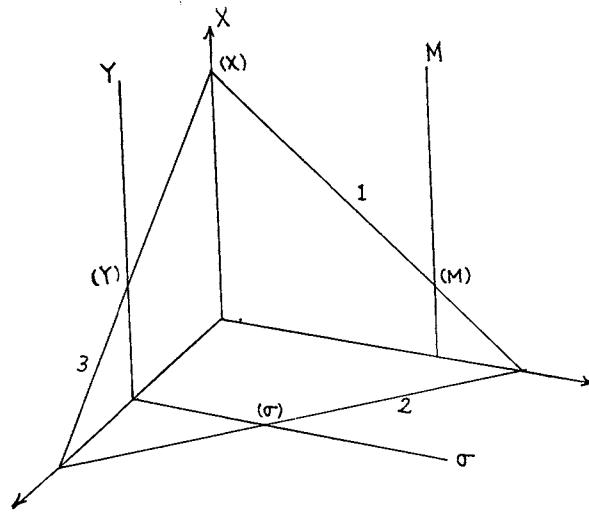
(付図 8)



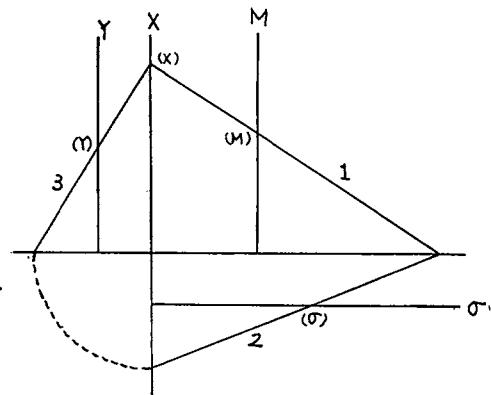
(付図 9)



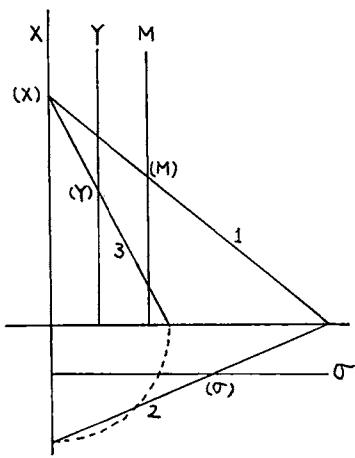
(付図 10)



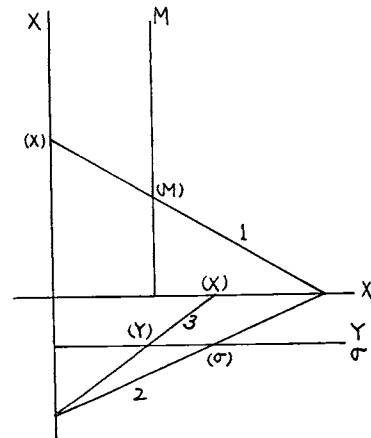
(付図1 1)



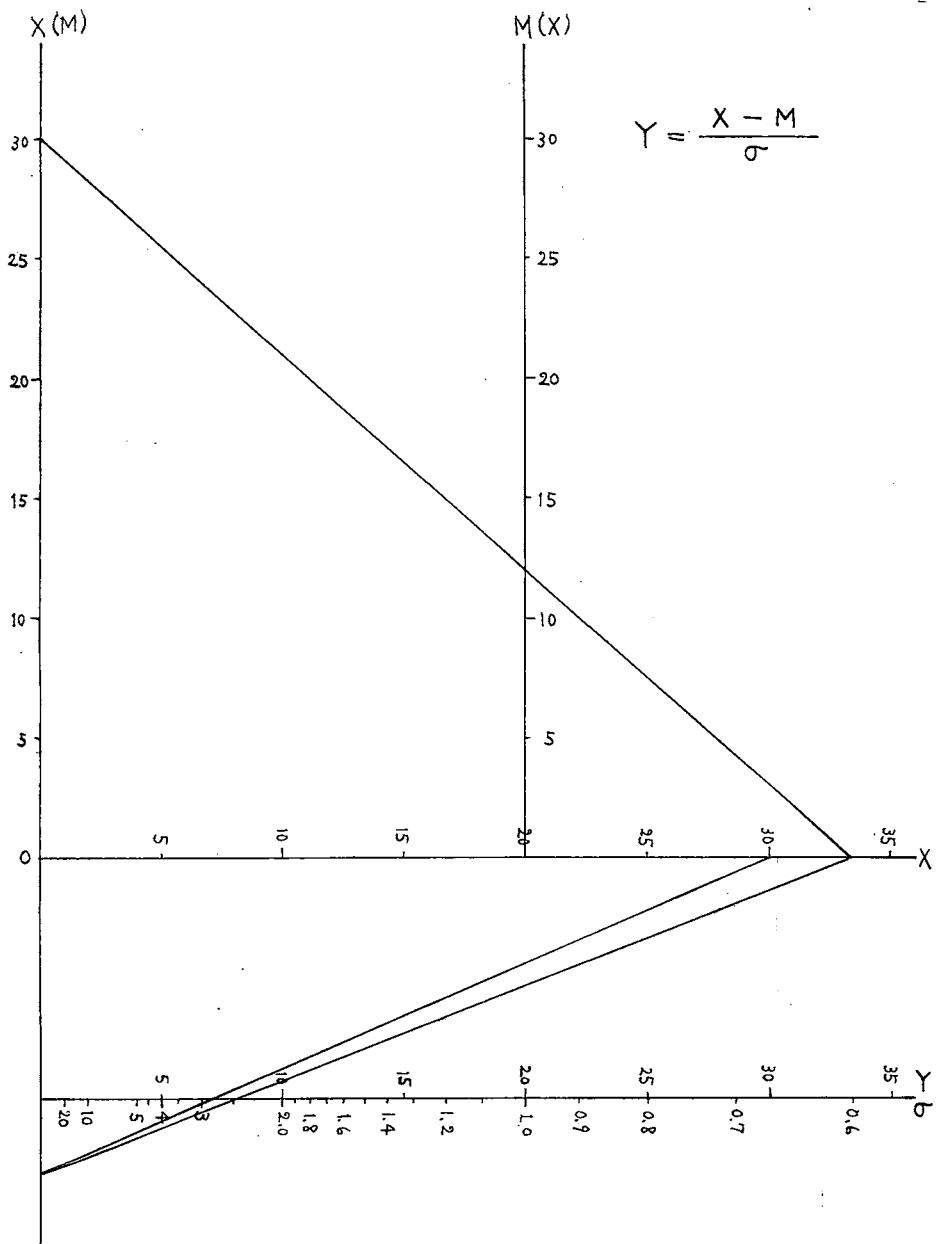
(付図1 2)



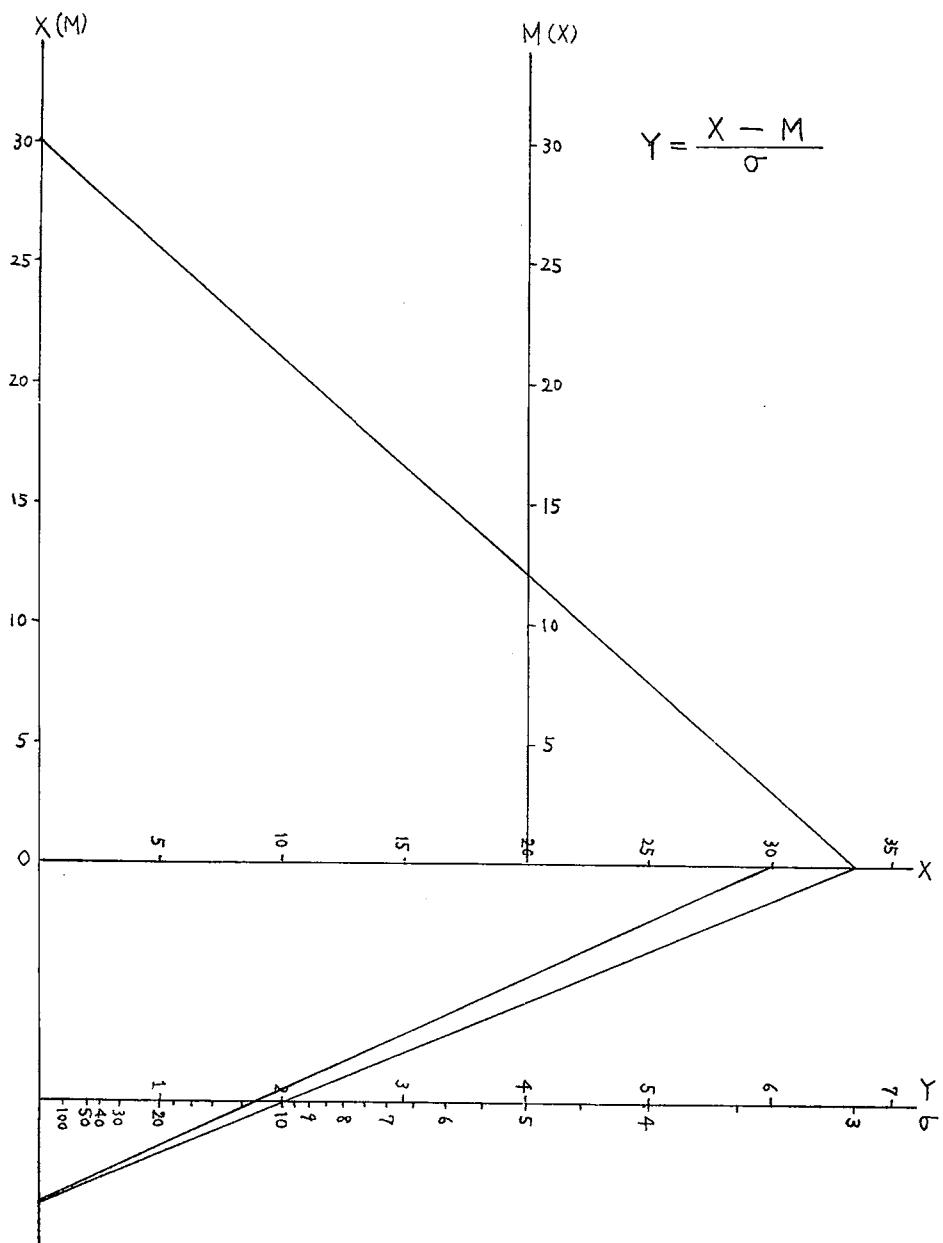
(付図1 3)



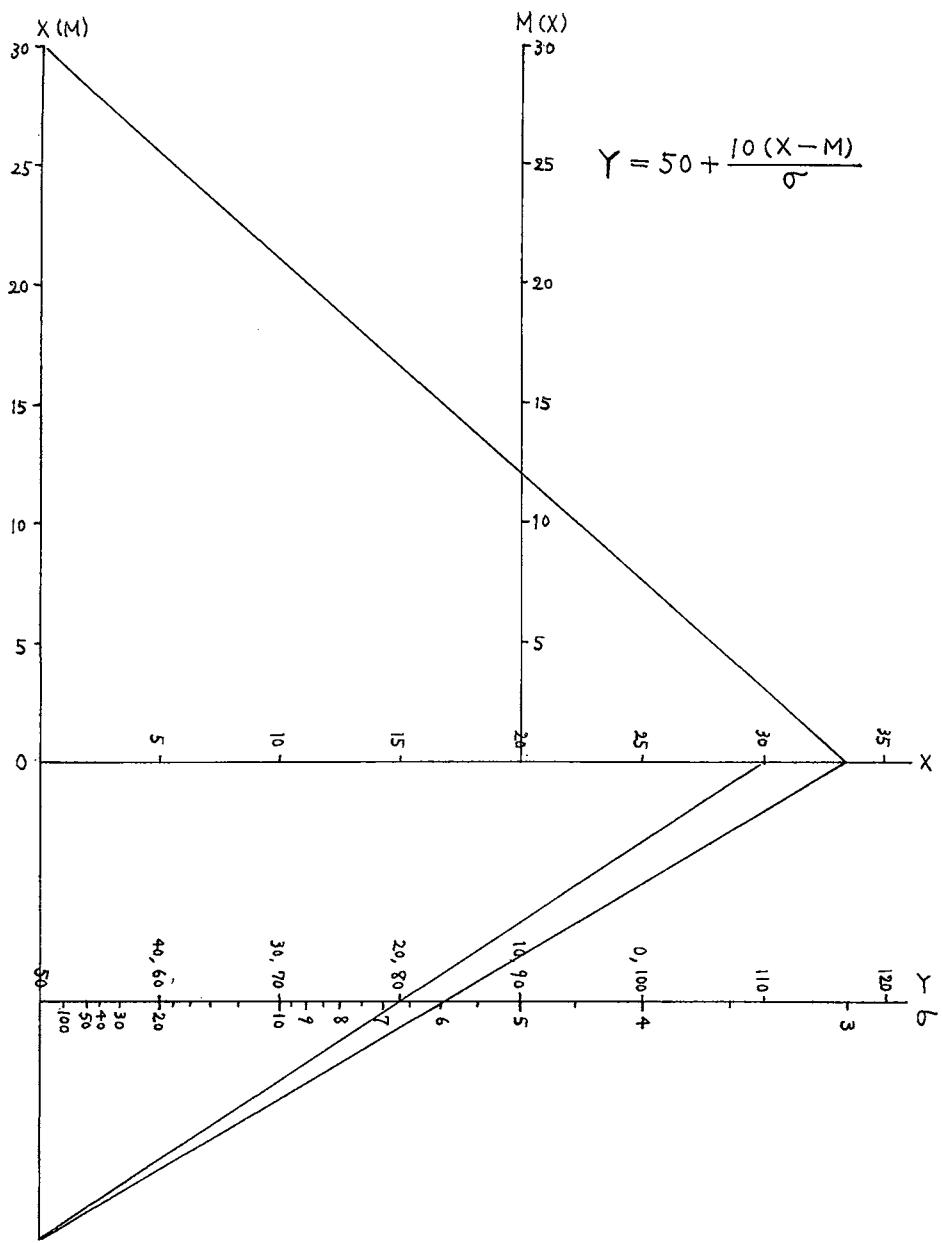
(付図1 4)



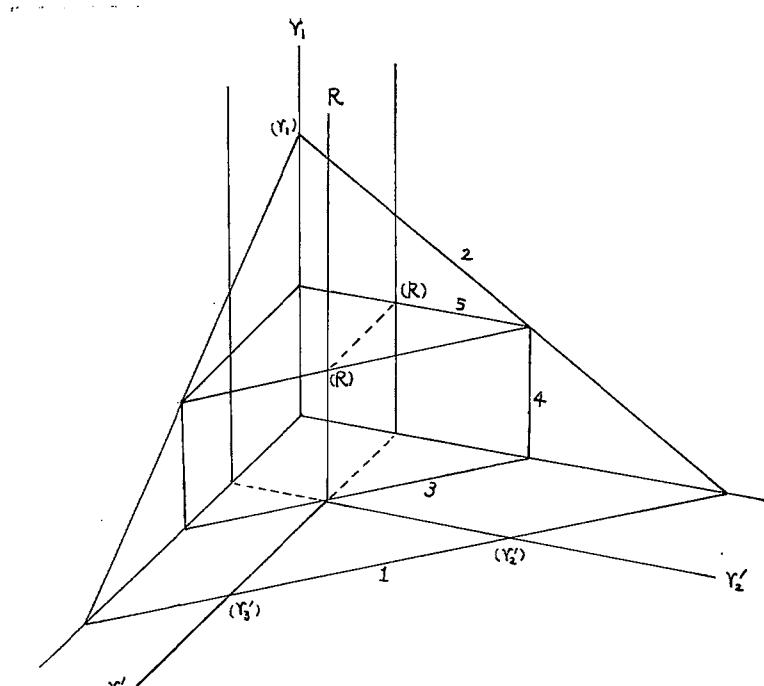
(付図15)



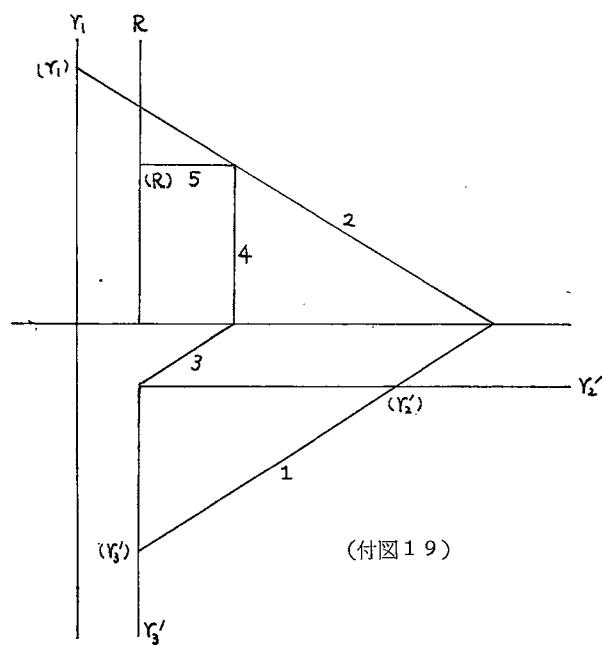
(付図1 6)



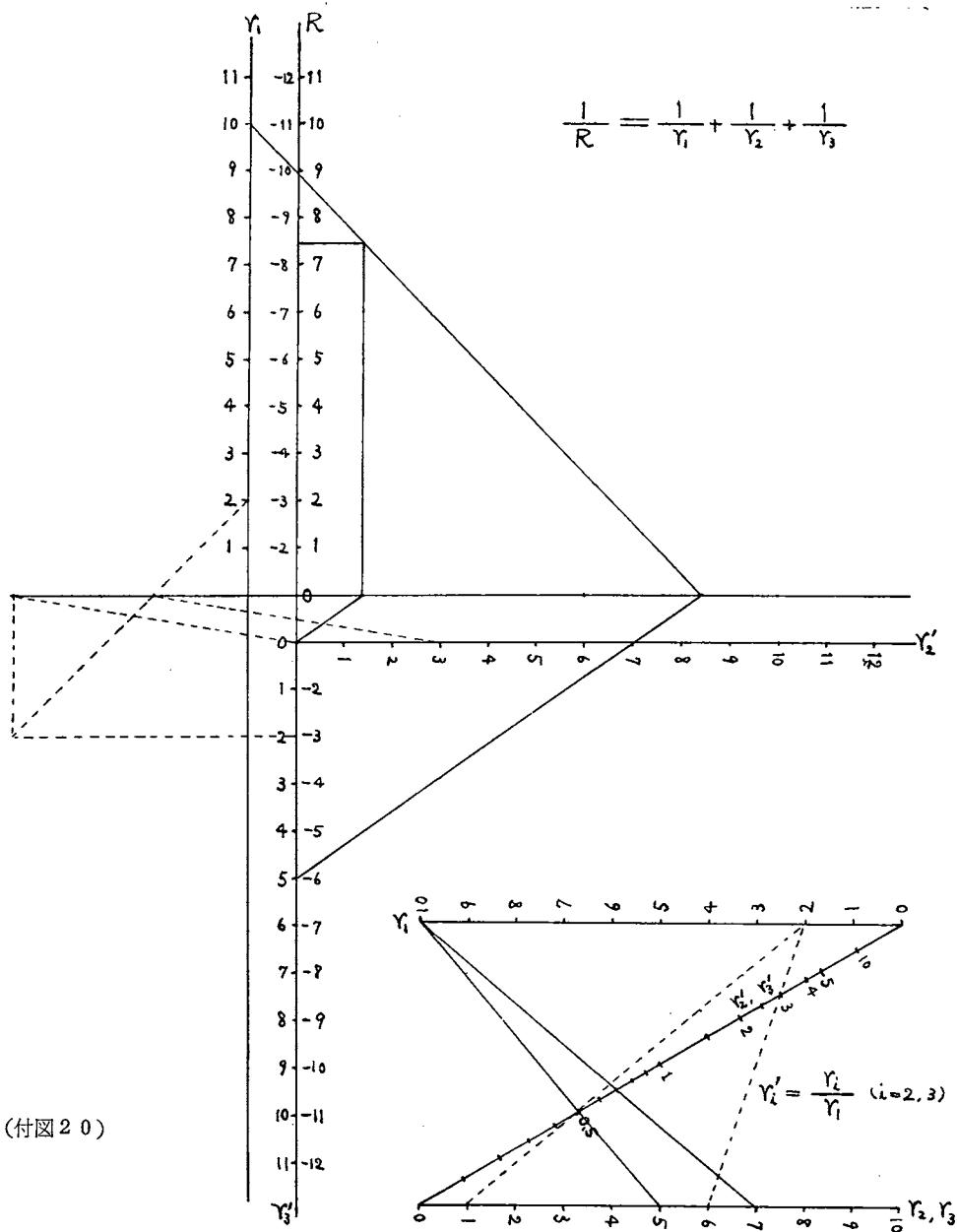
(付図17)



(付図1 8)



(付図1 9)



(付図20)