E 積分の有限要素解析と
その応用に関する研究

橋　本　堅　一

平成７年５月

博　士　論　文

E 積分の有限要素解析とその応用に関する研究

金沢大学大学院自然科学研究科

橋　本　堅　一

本論文において使用される主要な記号

A ; 2次元問題におけるき裂先端を含む領域
a ; き裂面の面積
D ; 塑性領域
E ; E 積分の値
E ; ヤング係数
$\boldsymbol{e}$; き裂進展方向の単位ベクトル
G ; せん断弾性係数
$\mathcal{G}$; エネルギ解放率
$\boldsymbol{H}$; 変位勾配 $(\Delta \boldsymbol{u})$
$\boldsymbol{m}$; 物体境界の単位法線ベクトル
$\boldsymbol{n}$; き裂面および領域境界における単位法線ベクトル
J ; J積分の値
K ; 応力拡大係数
ℓ ; き裂長さ
l ; き裂長さ（図中で用いる）
r ; 極座標における距離
$\boldsymbol{S}$; 第1種Piola–Kirchhoff応力
S ; 3次元物体表面を表し，その表面積をも意味する．
$\boldsymbol{s}$; 表面力ベクトル
u_i ; 変位 $(i = 1, 2)$
$\boldsymbol{u}$; 変位ベクトル
V ; 3次元物体を表し，その体積をも意味する．
W ; ひずみエネルギ
w ; ひずみエネルギ密度
x_i ; 直交デカルト座標(i=1,2)
z ; 複素変数 $(z = x_1 + ix_2)$
Z_1 ; Westergaardの応力関数
α ; 時間により物体の変形支配するパラメータ (> 0)
β ; 時間により支配されるパラメータ (> 0)
ϵ_{ij} ; 指標表示によるひずみ
$\boldsymbol{\epsilon}$; ひずみベクトル

Γ；2次元問題における領域境界

θ；極座標における角度

θ_L；斜向荷重の載荷角度

θ_M；異方性材料の主軸の方向

θ_K；進展き裂の折れ曲がり角度

ν；ポアソン比

Π；ポテンシャルエネルギ

σ_{ij}；指標表示による応力 $(i, j = 1, 2, 3)$

$\boldsymbol{\sigma}$；応力ベクトル

Φ；変数変換のための関数

ϕ；Muskhelishviliによる複素応力関数

φ；Goursatの応力関数

ψ；Goursatの応力関数

Ω；Muskhelishviliによる複素応力関数

目 次

1 序論 **3**

2 破壊力学におけるき裂進展パラメータと破壊クライテリオン **6**

2.1 緒言 6

2.2 破壊力学におけるき裂進展パラメータ 7

2.2.1 応力拡大係数 7

2.2.2 エネルギ解放率 12

2.2.3 E 積分 16

2.2.4 J 積分 21

2.2.5 J 積分と E 積分の比較 23

2.3 破壊クライテリオン 27

2.3.1 最大周応力説 27

2.3.2 複合応力仮説 28

2.3.3 最小ひずみエネルギ密度量説 29

2.3.4 最大エネルギ解放率説 30

2.3.5 $\bar{K}_{II} = 0$ 説 32

2.4 破壊靭性の評価 32

2.4.1 標準試験法，指針における破壊靭性評価 32

2.4.2 E 積分による破壊靭性評価 38

2.5 結言 46

3 破壊力学パラメータの数値解析 **50**

3.1 緒言 50

3.2 応力拡大係数の数値解析 51

3.2.1 等角写像およびその展開による方法 51

3.2.2 転位の連続分布を用いる方法 52

3.2.3 Laurent 展開法 53

3.2.4 境界分割法 54

3.2.5 有限要素法 55

3.2.6 境界要素法 55

3.3 エネルギ解放率の有限要素解析 56

3.3.1 J 積分法 56

3.3.2 全エネルギ法 58
3.3.3 仮想き裂進展法 59
3.3.4 E 積分法 59
3.4 結言 60

4 E 積分の有限要素解析への適用 64
4.1 緒言 64
4.2 解析手法と精度 65
4.3 斜向荷重を受けるモデルへの適用 76
4.4 異種材料界面を有するモデルへの適用 81
4.5 介在物あるいは空隙を有するモデルへの適用 89
4.6 異方弾性体への適用 97
4.7 弾塑性体への適用 105
4.8 有限要素特性と精度の向上 112
4.9 結言 113

5 結論 117
謝辞 119

1　序論

工学者，技術者の有用な道具であるコンピュータの発達は留まることがなく，1年間が経過すれば計算速度，メモリ容量などが急激に進歩する状況にある．そういう背景を踏まえて，数値解析的に考えれば，等方，等質の弾性体で微小変形理論でしかとらえることのできなかった材料も，有限変形理論を導入した複雑な構成関係によるモデル化から変形挙動を正確に表現できる環境にあり，実験による材料定数の評価を受け持つ計測者と数値解析者の相互理解によっては実用的な飛躍が期待される．しかしながら，最近の地盤，先端材料，流体，さらには大変形構造物など多種多様な非線形材料，幾何学的非線形構造物に対する数値解析の進歩はめざましい．これらの発展はテンソル解析をうまく駆使した連続体力学がその基盤にある．この連続体力学に関連した弾塑性力学や非線形有限要素法に対するテンソル解析に関する専門書[1)2)]はわが国でも出版され，その力学を用いた機械工学の応用的有限要素数値解析の手法，解析例もまとめられ[3)]，さらに未知の材料および複雑な構造物の有限要素解析などに目が向けられている．また土木工学の分野でも有限要素法を用いた複雑な非線形解析は年々増え続け，トラス構造物やシェル構造物のほか最近では地盤におけるせん断帯，液状化現象の変形挙動もうまく表現できるようになっている[4)]．したがって，有限要素法を中心としたモデル化に柔軟性をもった数値解析はますます重要となる．

一方，使用する材料の環境を考慮して降伏強度，破壊靭性，耐熱性など様々な要素を目的に応じて高める新しい材料，すなわち異種材料接合材，複合材料，機能傾斜材などが新素材と呼ばれる材料を含めて開発されている．これらの材料を力学的に考えるとき，例えば組織構造的に比較的容易な異種材料接合材をとっても，それぞれの材料間の界面で応力あるいはひずみの不連続点をもつので扱いがかなり複雑になる．複合材料については，巨視的な扱いをすれば，モデルの全体的な変形挙動を表すのに，等方性あるいは多くの岩石と同様に異方性材料とみなせるが[5)]，向上した強度や破壊靭性などの理論づけには，微視的な取扱いを欠くことができない．この観点から考えれば，解析領域を限定しても面積の異なる異種材料界面（この場合マトリクス相と分散相の界面）を多く含むので異種材料接合材にも増して取扱いが困難になる．また機能傾斜材は本来，竹のように位置によって材

料特性が穏やかに変化するような材料であるが，異種材料の接合によって材料特性を段階的に変化させる材料も含まれ，最近の多くの解析対象も扱いの簡便さで異種材料接合材になっている．以上に挙げたような新しい材料は使用される環境の境界条件により力学的な解析はより複雑になり今後ますます精度の高い応力解析などが要求される．さらに，多くの土木技術者の興味をひく巨大材料の岩盤は大きいスケールでは断層から微小スケールでは岩石内の潜在き裂に至るまで大小様々な不連続面をもち，モデル化自体が議論の対象となり，様々な扱いがみられる．しかしながら界面の力学についてはその取扱いがまとめられ[6]，その他のき裂性岩盤などの複雑な変形挙動を示す多種多様な材料への対処は年々進歩している．

材料の破壊を考える場合，準静的に荷重を受ける一般的な状態に限れば，破壊の局所化，材料の崩壊箇所は応力が集中する部分に起こるといって過言ではなかろう．この箇所は構造物として考えれば部材の結合部や偶角部分などにあたるが，材料としては考えれば，欠陥であったり，界面であったりする．特に，欠陥に対しては材料，構造物にとっては致命的なものになる場合が多いし，降伏強度と破壊靭性が必ずしも比例関係にないこともあるため，金属材料，セラミックスでは降伏強度の評価と同様に，破壊靭性が重要視されている．したがって，材料の破壊を議論する上では，破壊力学的アプローチは重要である．岩盤にしても卓越したジョイントと呼ばれる不連続面端部に破壊の局所化が進むことが多いし，潜在き裂により支配される岩石の圧縮強度はき裂の配向面でしか説明できない方向依存性をもつ．したがって，破壊力学的考察は不可欠になる．

以上のことを総括的に考えるなら，複雑な変形挙動を示す材料，構造物内のき裂をモデル形状や荷重などの境界条件に柔軟性をもつ有限要素法などを用いて解析することが，今後ますます重要になってくると考えられる．ただしこのような解析の報告はかなり多く，微小変形理論においては界面部材などで有用な議論が展開されている．しかし，き裂先端に介在物や空隙を有するような問題，き裂の干渉問題の複雑な場合などに対する報告はほとんどみられない．また弾塑性解析においてもかなり多くの研究報告がみられるが，これについては多くの問題を残しており，特に，ひずみ増分理論での議論は非常に困難であるのが現状である．そういう現状を背景に，本研究では，き裂進展パラメータとして非線形弾性体であってもエネルギ解放率を与え，表示式の性格上，有限変形理論の導入も容易であること，

経路独立積分であるが，J積分などと異なり，対象とならないき裂先端や，界面を積分経路内に含んでいても，経路独立であること，さらにはき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を与えるなどの多くの優位性をもつE積分[7]の研究を行った．E積分については理論的な応用[8]は見られるが，解析的に，あるいは実験的に応用された報告は皆無である．そこで本論文では，先ず，破壊力学におけるE積分の位置づけと優位性を定式化や破壊靭性評価の実験などを通じて多角的にとらえ，最終的には有限要素解析に適用していくつかの問題を解析した．その結果，比較的簡単なモデルでもかなり複雑な材料の解析が高精度で行われ，き裂進展パラメータの数値解析法として優れた手法であることを確認した．したがって本研究で扱ったE積分，さらにはE積分を用いた有限要素解析法は今後，重要なパラメータ，確立された手法として，応用が可能となった．

参考文献

(1) 北川　浩：弾塑性力学－非線形解析のための基礎理論－，裳華房，1987.

(2) 久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎，丸善，1992.

(3) 冨田佳宏：数値弾塑性力学有限要素シミュレーション－基礎と応用，養賢堂，1990.

(4) 浅岡　顕，田村　武：地盤の変形と破壊現象のシミュレーション，土木学会誌，Vol. 79，No. 8，1994.

(5) 座古　勝：数値複合材料力学，養賢堂，1989.

(6) 結城良治編：界面の力学，倍風館，1993.

(7) Yatomi, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, Int. J. Solids Structure, pp.183–187, 1983.

(8) 矢富盟祥：エネルギ解放率の新公式とその応用－多軸荷重の場合の簡便評価式－，材料，Vol. 35，No. 394，pp. 767–771，1986.

2 破壊力学におけるき裂進展パラメータと破壊クライテリオン

2.1 緒言

破壊力学の発展には構造物の重大な破壊事故が大きく関わっている．金属材料を用いた構造物が出現して以来，降伏強度で判断する限り，予期できない金属構造物の壊滅的破壊が世界各地で起こった．言うまでもなく，応力集中を起こす溶接部などの欠陥に起因するものであり，このような事故を背景に破壊靭性の評価が部材設計に組み込まれるようになった．

一方，破壊力学の理論については，1921年にGriffithによって発表された破壊理論[1)]がき裂の不安定成長にエネルギ解放率の概念を適用した最初の研究であると考えられている．1957年にIrwinにより提唱された応力拡大係数の考え方[2)]がエネルギ解放率と一意的な関係があることが証明されてから線形破壊力学が急速に発展してきた．加えて，1967年頃EshelbyおよびRiceによって提案された[3)4)]経路独立な積分，いわゆるJ積分により任意の均質非線形超弾性体*の場合でもエネルギ解放率が求められることがわかり，弾塑性体などの非線形破壊力学の研究も活発に行われるようになった．その後，J積分をベースにして，ひずみ履歴依存性などに対処したJ積分の拡張的パラメータ$\hat{J}$[5)]やT^*[6)]なども提案され，動的な解析にも応用されている．

最近では金属材料の他，岩盤，岩石，コンクリート，土質や種々の複合材料などの分野でも破壊力学の重要性が認識されつつあり，その研究報告数も年々増加している．しかしそれらの材料は非線形性のみならず，非均質性が著しく，複数のき裂が干渉し，き裂の進展挙動も非常に複雑になる．その場合，原則的には，J積分型の経路独立積分では，き裂が直進して進む，すなわち主き裂と同方向に進む瞬間時のエネルギ解放率しか求まらず，非均質性，応力ないしひずみの不連続性を有する界面，複数のき裂などが存在すると，その経路独立性の有用性が失われ任意方向のき裂折れ曲がり瞬間時エネルギ解放率を精度よく求めることは困難となる．これらのことを考慮すると1983年に提案されたE積分[7)]は準静的である限り，J積分型の経路独立積分に比べ多くの優れた点を有し，今後の幅広い応用が期待される．

* 弾性体のうちひずみエネルギを持つ弾性体は超弾性体 (hyperelastic material) と呼ばれる．

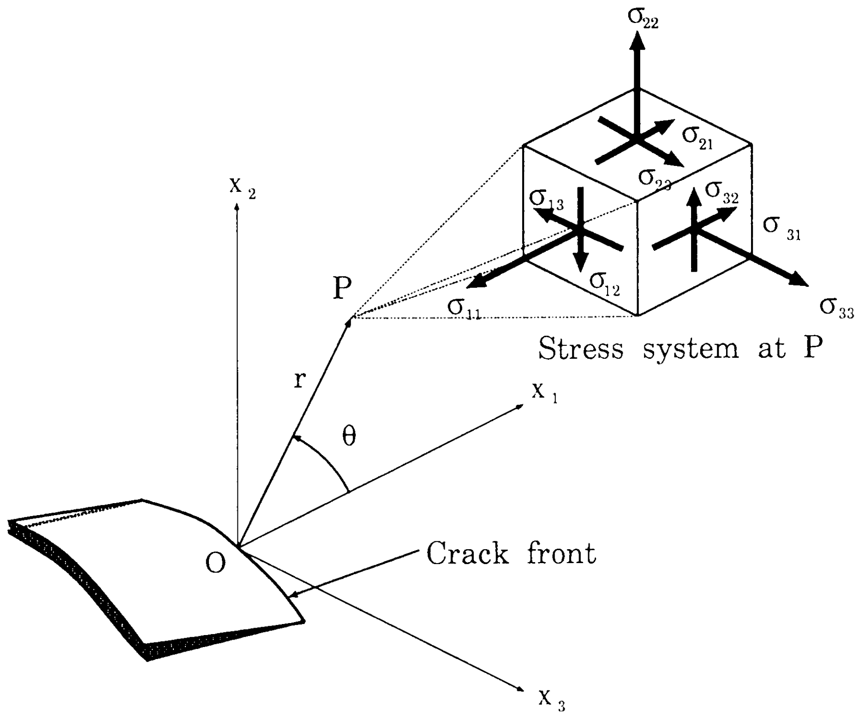


Fig.– 2.1 Crack coordinate system

この章では以上のことを踏まえて，まず，解析によく用いられいる破壊力学におけるき裂進展パラメータを，適用範囲などに重点をおいて説明する．そしてそれらのパラメータによる破壊クライテリオンに触れ，最終的には破壊靭性の評価について言及した．なお，ここでとりあげるパラメータのほかにき裂開口変位COD（crack opening displacement）*があり，塑性変形が大きいときの破壊条件を記述されるパラメータとして注目されたが，定義自体や実験的測定に曖昧さが残っており，ここでは割愛した．

2.2 破壊力学におけるき裂進展パラメータ

2.2.1 応力拡大係数

線形弾性力学を背景に確立された線形破壊力学の代表的なパラメータが応力拡大係数（stress intensity factor）である．線形弾性体のき裂先端近傍の応

* CTOD;crack tip opening displacement,CMOD;crack mouth opening displacementらで使い分けられることもある．

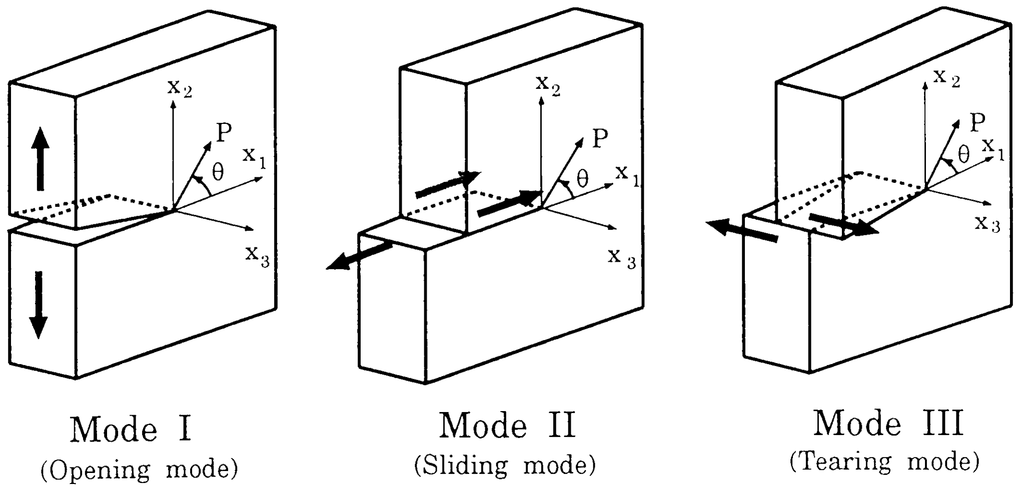


Fig.– 2.2 Modes of deformation

力場はFig.– 2.1*のき裂先端の極座標による位置に対して

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + higher\ term \tag{2.1}$$

で表される．ここで，f_{ij} は θ による陽な形で与えられる関数である．き裂の位置 (r,θ) がき裂先端に非常に近ければ，すなわち，($r \ll$ き裂長さ ℓ) であれば高次項は第一項に比べて著しく小さいので，無視される．上式から，明らかにき裂先端の弾性応力の値は無限大になることがわかる．しかし，すべての材料に対して，き裂先端では塑性域が形成されるので，一般にはき裂状の鋭い欠陥を含む部材が外力を受けているとき，き裂先端近傍に塑性域を伴っている．

塑性域が $r^{-\frac{1}{2}}$ の項が応力場を支配する領域に比べて小さいなら，き裂先端近傍のき裂挙動は式 (2.1) 右辺中の係数 K によって支配されると仮定できる．この仮定が線形破壊力学の基礎になっている．K は応力拡大係数として広く知られており，[応力]×[長さ]$^{\frac{1}{2}}$の次元を持っている．2次元等方弾性体の場合は，載荷荷重，き裂の寸法や形状，物体の幾何学的な境界条件により決定され，後で議論するエネルギ解放率とは異なり，ヤング係数すなわち材料特性に依存しない．

* 本論文では，き裂を表現しやすくするためき裂が開口角を有しているように図示する場合があるが，実際に扱うき裂は理論的には開口角を持たない $r^{-\frac{1}{2}}$ の特異性をもつき裂である．

Fig.–2.2に示すように，き裂の変形挙動は3つのモードに分離することができ，応力拡大係数は各々のモードに対して独立に定義される．モードIとよばれる変形モードは3つの変形モードのなかで最も頻繁に現れる変形モードで，き裂を開くモードである．試験法で規定されている破壊靭性試験はすべてこのモードであり，破壊靭性評価は金属材料などでは欠くことができず，広く利用されている．モードIIとモードIIIの変形モードはき裂面のすべり，ズレを示す変形モードで前者が面内（図中x_1-x_2平面）での変形を表すのに対して，後者は面外（図中x_1-x_3平面）に生じるズレを表す．それぞれのモードに対する応力拡大係数はK_I, K_{II}, K_{III}で記されることが多く，本論文でもそれに従う．き裂先端近傍の応力場は，3つのモードの和として与えられ，

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\{K_I f_{ij}^{I}(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)\} + higher\ term \tag{2.2}$$

の形になる．応力拡大係数は形式的には応力成分により，**Fig.– 2.1** 中の$\theta = 0$に沿ってrを0に漸近させることにより次のように定義される．すなわち，

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r\to 0}\{\sqrt{2\pi r}\,\sigma_{22}(r,0)\}; \\ K_{II} &= \lim_{r\to 0}\{\sqrt{2\pi r}\,\sigma_{21}(r,0)\}; \\ K_{III} &= \lim_{r\to 0}\{\sqrt{2\pi r}\,\sigma_{23}(r,0)\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

この式は応力拡大係数を数学的に定義したものであり，実際に応力拡大係数を求めようとすると，求めようとするモデルの境界条件に対してき裂近傍の応力や変位の評価が必要になり煩雑である．このことから経路積分により定義しようとする試みもある[8]．

応力拡大係数を求める手法は多く，提案されている．代表的なものとして複素応力関数による方法，転位の連続分布を用いる方法，Laurent展開法，選点法（境界分割法），体積力法あるいは境界積分方程式による方法，有限要素法などが挙げられるが，厳密解が得られるのは無限境界の限られたモデルだけで，他はすべて近似解として得られることになる．最近では複合材料などき裂近傍の変形挙動が複雑なモデルへの応用が多いため，境界要素法（境界積分方程式による方法）や有限要素法がよく用いられるようになっている．

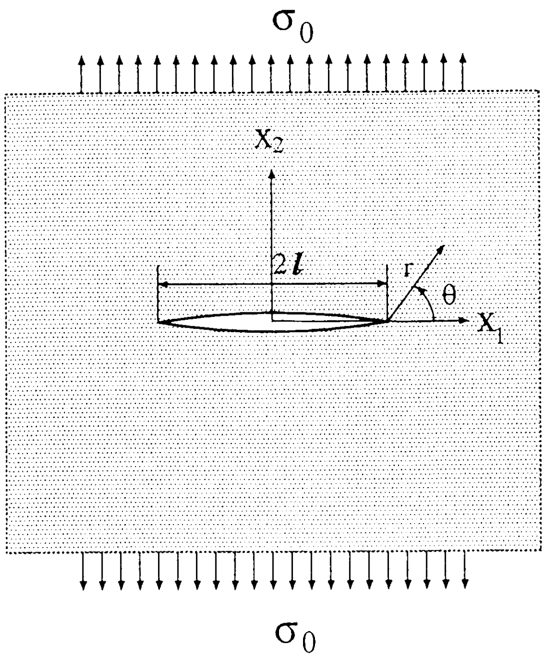


Fig.– 2.3 A single crack model subjected to tention.

本研究では厳密解として得られている無限板中の単一き裂の一様引張モデル (**Fig.– 2.3**：ここではき裂面と載荷方向が垂直な場合に限る．したがってモードI変形状態）について簡単に触れる[9)]．平面弾性解析を行う場合，Goursat 関数の複素応力関数による表示を用いることもあるが，Muskhelishvili の関数による応力表示を用いることも多い．用いることが多い．Muskhellishvili による応力表示は ϕ,Ω を解析関数とすると，一般的には

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{22}+\sigma_{11} &= 2\{\phi(z)+\bar{\phi}(\bar{z})\} \\ \sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12} &= 2\{(\bar{z}-z)\phi'(z)-\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\} \\ \sigma_{22}+i\sigma_{12} &= (\bar{z}-z)\phi'(z)+\bar{\phi}(\bar{z})+\bar{\Omega}(z) \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

で表される．変位成分については

$$2G(u_1-iu_2)=\kappa\int\bar{\phi}(\bar{z})d\bar{z}-\int\bar{\Omega}(z)dz+(z-\bar{z})\phi(z) \tag{2.5}$$

で表示される．ここで，上付"-"は複素共役を表し，G はせん断弾性係数，κ はポアソン比 ν により平面応力状態では $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$，平面ひずみ状態

では $\kappa = (3-4\nu)$ で与えられる．個々の応力成分については

$$\left.\begin{array}{lcl}\sigma_{11} &=& Re\{3\phi(z)-\bar{\Omega}(z)\}-2x_2Im\{\phi'(z)\}\\ \sigma_{22} &=& Re\{\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\}+2x_2Im\{\phi'(z)\}\\ \sigma_{12} &=& Im\{-\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\}-2x_2Re\{\phi'(z)\}\end{array}\right\} \tag{2.6}$$

として表される．これらの式での関数 ϕ, Ω と Goursat の関数 φ, ψ との関係は次のようになる．

$$\phi(z)=\varphi'(z), \quad \Omega(z)=\bar{\varphi}'(z)+z\bar{\varphi}''(z)+\bar{\psi}''(z)$$

対象となる問題は x_1 軸に対して対称であるから，$x_2=0$ のとき $\sigma_{12}=0$ となる．したがって，実軸上で

$$Im\{-\phi(z)+\bar{\Omega}(z)\}=0.$$

すなわち

$$\bar{\Omega}(z)=\phi(z)+f_1(z).$$

ただし，$f_1(z)$ は実軸上で実数となる関数である．これを式 (2.6) に代入し，$2\phi(z)$ を $Z_1(z)$ とおくと，応力と変位の成分について次の表示を得る．

$$\left.\begin{array}{lcl}\sigma_{11} &=& Re\{Z_1(z)\}-x_2Im\{Z_1'(z)\}-Re\{f_1(z)\}\\ \sigma_{22} &=& Re\{Z_1(z)\}+x_2Im\{Z_1'(z)\}+Re\{f_1(z)\}\\ \sigma_{12} &=& -x_2Re\{Z_1'(z)\}+Im\{f_1(z)\}\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

$$4G(u_1-iu_2)=\kappa\int\bar{Z}_1(\bar{z})d\bar{z}-\int Z_1(z)dz+(z-\bar{z})Z_1(z)-2\int f_1(z)dz \tag{2.8}$$

関数 $Z_1(z)$ は Westergaard によって単一き裂や線上き裂群の問題に用いられたもので，1 個のき裂をもつ無限板の一様引張の場合は，$f_1(z)=0$ となり，

$$Z_1(z)=\frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2-\ell^2}}$$

として得られている．**Fig.– 2.3**のき裂右先端近傍を極座標で考えると次のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
Z_1(z) &= \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2-\ell^2}} = \frac{\sigma_0(\ell+re^{i\theta})}{\sqrt{(2\ell+re^{i\theta})re^{i\theta}}} \cong \frac{\sigma_0\ell}{\sqrt{2\ell r}}e^{-i\theta/2},\\
Z_1'(z) &= -\frac{\ell^2\sigma_0 z}{(\sqrt{z^2-\ell^2})^3} \cong -\frac{\ell^2\sigma_0}{(2\ell r)^{3/2}}e^{-3i\theta/2},\\
\int Z_1(z)dz &= \sigma_0\sqrt{z^2-\ell^2} = \sigma_0\sqrt{(2\ell+re^{i\theta})re^{i\theta}} \cong \sigma_0\sqrt{2\ell r}e^{i\theta/2}.
\end{aligned}
$$

ただし，$r \ll \ell$ を考えて r についての展開は最低次の項だけをとった．これらを式 (2.7) に代入すれば，き裂先端近傍の応力の成分として次式が得られる．

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \sigma_0\sqrt{\ell/2r}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}),\\
\sigma_{22} &= \sigma_0\sqrt{\ell/2r}\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}),\\
\sigma_{12} &= \sigma_0\sqrt{\ell/2r}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},\\
u_1 &= \frac{\sigma_0}{G}\sqrt{r\ell/2}\cos\frac{\theta}{2}(\frac{\kappa-1}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}),\\
u_2 &= \frac{\sigma_0}{G}\sqrt{r\ell/2}\sin\frac{\theta}{2}(\frac{\kappa+1}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}).
\end{aligned}
\right\} \tag{2.9}
$$

この式を式 (2.2) と比較することにより，

$$
K_I = \sigma_0\sqrt{\pi\ell}. \tag{2.10}
$$

この式は他のモデルに対して応力拡大係数と求めるとき，つねに基準量として用いられる式で，この式に乗じられる値，あるいは関数式を (2.10) 式により正規化された関数をもって応力拡大係数として表すのが一般的になっている．

2.2.2 エネルギ解放率

弾性体が外力を受けてき裂が準静的に単位面積進展していく場合，き裂の進展過程に必要なエネルギ解放率 $\mathcal{G}$（すなわち，新生き裂面を形成するのに必要な単位面積当たりのエネルギ）が供給される．**Fig.– 2.4**において，

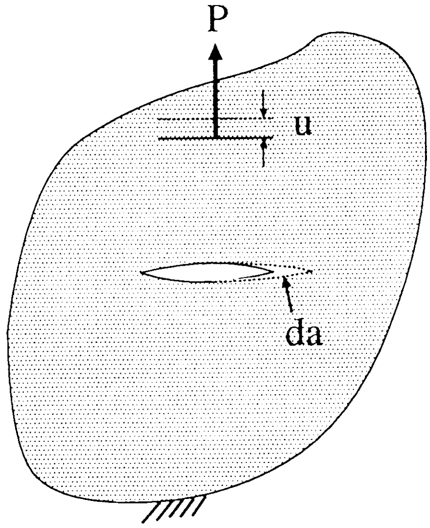


Fig.– 2.4 A single crack body subjected to a concentrated force.

き裂を微小面積daだけ進展させるのに必要なエネルギは，この間に外力のなした仕事Pdu，および物体中に蓄えられている弾性ひずみエネルギWの変化$-dW$の双方から供給される．すなわち

$$\mathcal{G} = P\frac{du}{da} - \frac{dW}{da} \tag{2.11}$$

Fig.–2.5のような一般的な3次元超弾性体では，線形であれ非線形であれ，応力とひずみが一価関数

$$\left.\begin{array}{lcl} \sigma_{11} & = & \sigma_{11}(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}, \epsilon_{12}) \\ \sigma_{22} & = & \sigma_{22}(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \cdots, \epsilon_{12}) \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{12} & = & \sigma_{12}(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \cdots, \epsilon_{12}) \end{array}\right\} \tag{2.12}$$

で与えられ，単位体積当たりのひずみエネルギ，すなわちひずみエネルギ密度wは負荷経路によらぬ状態量であって

$$w = \int_0^{\epsilon} \sigma \cdot \epsilon \tag{2.13}$$

で与えられる（以後，本論文では記号"·"は，ベクトルおよびテンソルの内積を表す.）．したがって表面で囲まれる弾性体VのもつひずみエネルギWは

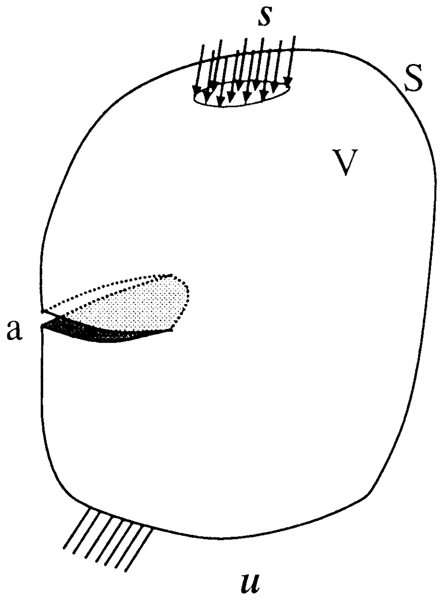


Fig.– 2.5 The arbitrary 3-dimensional body with a crack.

微小体積要素$dV = dx_1dx_2dx_3$のもつひずみエネルギwdVを全体積Vにわたって総計した

$$W = \int_V wdV \tag{2.14}$$

で与えられる．表面の微小要素dSに外から作用する分布力のベクトルを$\boldsymbol{s}dS$とし，その点の変位ベクトルを$\boldsymbol{u}$とすると，$\boldsymbol{u}$の微小変化$d\boldsymbol{u}$による外力の作用系のポテンシャルエネルギΠ^*の変化は両者のスカラー積$-\boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{u}dS$であるからこれを積分して

$$d\Pi^* = -\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{u}dS \tag{2.15}$$

である．あるいは$\boldsymbol{s}$の成分を$s_i(i = 1, 2, 3)$，$\boldsymbol{u}$の成分を$u_i(i = 1, 2, 3)$とすれば，上記スカラー積は

$$\boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} s_i du_i \tag{2.16}$$

である．この弾性体に作用して仕事をなす外力が，表面Sに作用する$\boldsymbol{s}$の

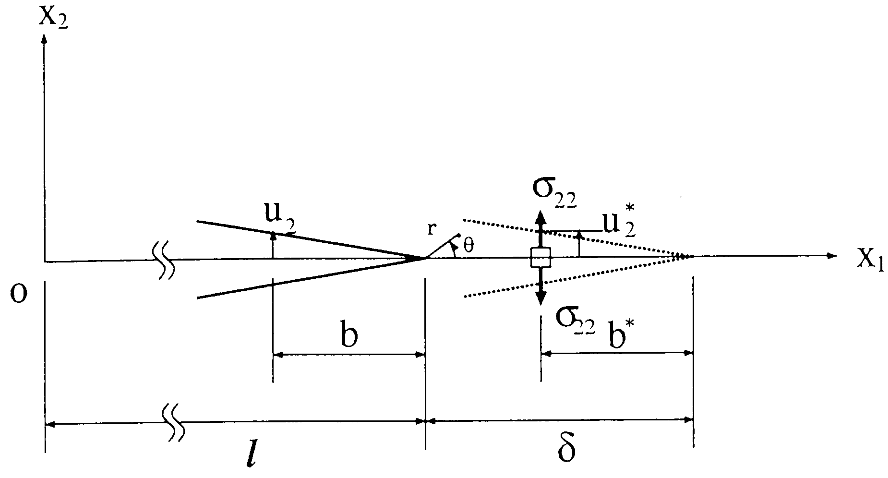


Fig.– 2.6 Segment of crack opening.

みである場合，外力の作用系のもつポテンシャルエネルギΠ^*は式(2.15)を全表面にわたって積分したものである．以上のことから，弾性体Vおよびこの表面に力を作用させる系とがもつポテンシャルエネルギ，あるいは全エネルギは

$$\Pi = \int_V w dV - \int_S \left(\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{u} \right) dS \tag{2.17}$$

で与えられる．

ここで，この弾性体中のクラック面積が微小量daだけ増加したとすると，外力や変位，応力，ひずみなどが新しいつり合い状態を保つために微小量変化する．この変化の割合は，式(2.17)を微分することにより

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \int_V w dV - \int_S \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a} dS \tag{2.18}$$

で与えられる（ただし，ここで$\boldsymbol{s}$はaに無関係と仮定している．）．この値は常に負であり，この符号を変えたものがエネルギ解放率である．すなわち

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial a} = \int_S \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial a} dS - \frac{\partial}{\partial a} \int_V w dV. \tag{2.19}$$

いま，前節で扱った無限板の単一き裂の引張問題を考える．ここでは線形超弾性体を仮定する．この問題はx_1軸に対して対称であり，**Fig.– 2.6**のよ

うに垂直応力σ_{22}がx_1軸上の微小要素に現れる．そして，き裂がδだけ進展したとする．概念的には弾性体が$x_1 = \ell$から$x_1 = \ell + \delta$の部分のx_1軸にそった切断を想定するが，このとき切断による応力の解放ないものとし，また切断時においてFig.–2.6の破線で表される長さδの部分が自由表面となるまで微小量ずつ徐々に応力の減少させるものとする．このときδが$\delta \to 0$で示されるような微小な量と仮定すると，変位$u_2(b,\pi)$を通じて作用した応力$\sigma_{22}(\delta - b^*, 0)$によるこの仮定でなされた仕事が解放されたひずみエネルギである．そのときの状態は

$$u_2 \to u_2^*, \qquad b \to b^*$$

を満足することに対応する．したがって，き裂の両端でなされた仕事量は

$$\mathcal{G} = 2 \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{1}{2} \sigma_{22}(\delta - b^*, 0) u_2(b, \pi) db \tag{2.20}$$

となる*．式 (2.9) と式 (2.10) によりモードIのエネルギ解放率は次式で与えられる．

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa + 1}{8G} K_I^2$$

あるいは

$$\mathcal{G} = \frac{K_I^2}{\mathsf{E}'}, \quad \text{ただし}\,\mathsf{E}' = \begin{cases} \mathsf{E} \\ \mathsf{E}/(1-\nu^2) \end{cases} \tag{2.21}$$

ここでEはヤング係数を表す.

変形様式が混在している場合も同様な手順で得られる．本研究で扱う多くの解析は載荷系ではこれらに類する問題が多いので以上の結果は後の有限要素解析の正規化に用いる．

2.2.3 E 積分

Fig.–2.7に示されるような有限変形する2次元非均質，非線形超弾性体B内を準静的に進展するき裂を考える．ただし，Fig.–2.7のように，非均質性が界面や静止き裂による場合は，その基準系での界面およびき裂は時間的に移動しないものとする．

* 上式が動的な場合も含めて有効であることは文献[15]に証明されている．

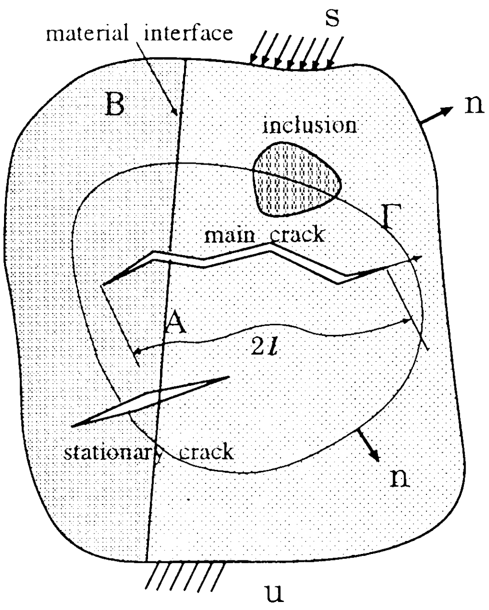


Fig.– **2.7** Quasi-stationary extending crack.

いま，き裂の一端を含む基準系に固定された正則な閉領域を A，その境界をΓとする．B 内のき裂長さを 2ℓ とし，き裂は$\beta(0 \leq \beta \leq \alpha)$ をパラメータとした物体 B の境界上で与えられた表面応力ベクトル s あるいは変位ベクトル $\boldsymbol{u}$ により進展しているとする．たとえば単軸集中荷重 P が荷重制御で単調増加するように与えられた場合 $\beta = P$ とおける．

そのとき物体内では，第 1 種の Piola-Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{S}$（$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{n}; \boldsymbol{n}$ は単位法線ベクトル），変位 $\boldsymbol{u}$，変位勾配 $\boldsymbol{H} = \nabla \boldsymbol{u}$，ひずみエネルギ密度 w などの場の量　Φ（x, ℓ, β）がき裂を除いた位置 x，各 ℓ, α に対して定義される．物体が非均質な超弾性体とすると

$$S = \frac{\partial w(\boldsymbol{H}, x)}{\partial \boldsymbol{H}} \tag{2.22}$$

である．物体力のない準静的な場合を考えると，平衡式

$$Div\boldsymbol{S} = \mathrm{o} \tag{2.23}$$

がき裂を除いた箇所で成立している．

ここでは，エネルギ解放率をき裂進展中におけるき裂の一端を囲む基準系に固定された正則な閉領域 A 内のエネルギ変化率の不釣合い量:

$$\mathcal{G}(\ell,\alpha)=\int_\Gamma \boldsymbol{s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \ell}d\Gamma-\frac{\partial}{\partial \ell}\int_A wdA \tag{2.24}$$

として定義する[7]．ここで，き裂が折れ曲がる瞬間時のエネルギ解放率の場合は，ℓ による偏微分は右微分係数（$\ell\to 0^+$）で定義される．$\mathcal{G}$ の値は領域 A がき裂先端を含む限り（進展き裂端を含まなければ，静止き裂端や界面を含んでいても，発散定理が使えて式 (2.24) の $\mathcal{G}$ の値はゼロであるから）その形，大きさによらないのは明かである．

式 (2.24) を直接数値積分で評価すると，き裂先端周辺領域の w に関する面積分を必要とするため，精度の点でも，扱い易さの点でも不利である．したがってこの式を経路積分に変形することを考える．式 (2.24) を経路積分に変形するとき，発散定理がうまく使えるような $\Phi(x,\ell,\beta)$ 空間での積分でひずみエネルギ密度 w を定義する必要がある．すなわち

$$w(\ell,\alpha)=\int_0^\alpha \boldsymbol{S}(\ell,\beta)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}(\ell,\beta)}{\partial\beta}d\beta \tag{2.25}$$

ととればよいことがわかる．ここで記号が複雑になるのをさけるため物理量 $\Phi(x,\ell,\beta)$ を単に $\Phi(\ell,\beta)$ と記した．そのとき平衡式 (2.23) および発散定理を使えば

$$\int_a wdA=\int_A\int_0^\alpha \boldsymbol{S}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial\beta}d\beta dA=\int_\Gamma\int_0^\alpha \boldsymbol{s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\beta}d\beta d\Gamma \tag{2.26}$$

が成立し，これを式 (2.24) に代入すると

$$\mathcal{G}(\ell,\alpha)=\int_\Gamma\int_0^\alpha(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\ell}-\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial\ell}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial\beta})d\beta d\Gamma\equiv E(\ell,\alpha) \tag{2.27}$$

が得られる．上式が非均質，非線形物質にも適用可能な経路独立なエネルギ解放率を求める積分公式で E 積分といわれる．

以下，微小変形理論に限定し，ひずみ ϵ が応力 σ の $1/m$ 次同次型，すなわち任意の $k>0$ に対して，

$$\hat{\epsilon}(k\boldsymbol{\sigma})=k^{1/m}\hat{\epsilon}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{2.28}$$

が成立する場合を考える[10]．このとき，k を上記のき裂長さ ℓ と独立なパラ

メータβと考え，表面応力ベクトルが

$$s = \beta \hat{s}_0(x, \ell) \tag{2.29}$$

と表せる場合を考える．このとき，

$$\sigma = \beta \hat{\sigma}_0(x, \ell) \tag{2.30}$$

と表現でき，式 (2.28) より

$$\epsilon = \beta^{1/m} \hat{\epsilon}_0(x, \ell) \tag{2.31}$$

となり，上式を積分して（$\beta = 0$ の時 $u = 0$ とすると）

$$u = \beta^{1/m} \hat{u}_0(x, \ell) \tag{2.32}$$

を得る．式 (2.29) と式 (2.32) を式 (2.27) に代入して，β に関して積分すると

$$E(\ell, \alpha) = \int_\Gamma (\frac{m}{m+1} s \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot u) d\Gamma \tag{2.33}$$

となり，β に関する積分が不用な表現を得る．特に，線形弾性体の場合は式 (2.33) で $m = 1$ を代入することにより

$$E(\ell, \alpha) = \int_\Gamma (\frac{1}{2} s \cdot \frac{\partial u}{\partial \ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial \ell} \cdot u) d\Gamma \tag{2.34}$$

となり，Sanders の共役型の積分公式[11]と同一になる．

ここで$\alpha_0 \geq \alpha \geq 0$ の間，き裂長さは一定値 ℓ_0のままでなめらかな関数関係 $\alpha = \hat{\alpha}(\ell)$ で進展した場合を考える[12]．この状況下では式 (2.27) は

$$E(\ell, \alpha) = \frac{d}{d\ell} \int_\Gamma (\int_\gamma s \cdot du) d\Gamma \tag{2.35}$$

と変形される[7]．ここで $du = (\partial u(\lambda, \beta)/\partial \lambda) d\lambda + (\partial u(\lambda, \beta)/\partial \beta) d\beta$で γ は **Fig.–2.8**に示すような区分的になめらかな閉じた経路である．「式 (2.35) は $(\ell_0, 0)$ から出発し (ℓ, α) になるまでに解放されたエネルギは ℓ を一定に保ち，α を0にする除荷過程を含めた1サイクル上での応力ベクトルがなした仕事 (**Fig.–2.9**) に等しい」という準静的な場合の，明解なエネルギ解放率の物理的解釈を与えている．

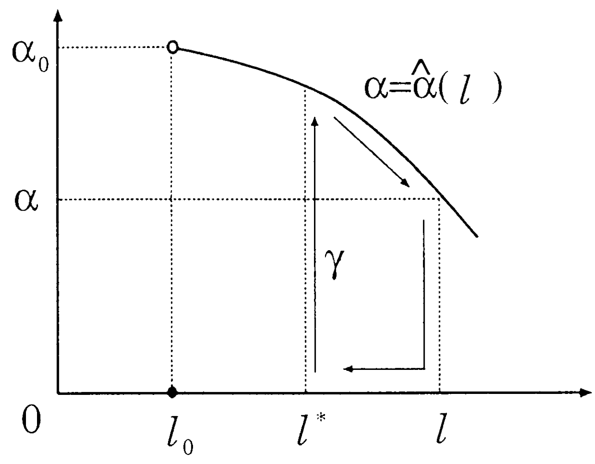


Fig.– **2.8** A piecewise smooth closed path in (ℓ, α) space.

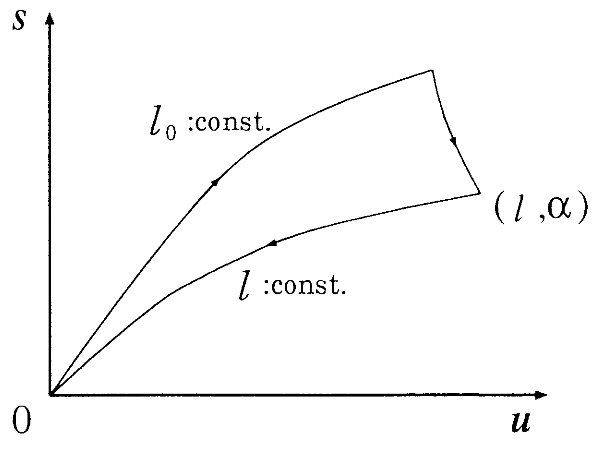


Fig.– **2.9** The work done by the traction vector in a cyclic process.

いま，Aを有限な物体B全体にとり，$\boldsymbol{m}$を単位ベクトルとしたとき，境界で

$$\left.\begin{array}{rcl} s & = & \hat{P}(\boldsymbol{x},\beta,\ell)\boldsymbol{m} \\ \hat{\delta}(\boldsymbol{x},\beta,\ell) & = & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{m} \end{array}\right\} \tag{2.36}$$

のように与えられた場合を考えると，式 (2.27) は

$$E(\ell,\alpha)=\int_\Gamma\int_0^\alpha\left(\frac{\partial\hat{P}}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\hat{\delta}}{\partial\ell}-\frac{\partial\hat{P}}{\partial\ell}\cdot\frac{\partial\hat{\delta}}{\partial\beta}\right)d\beta d\Gamma \tag{2.37}$$

となる．ここで$\hat{P}$はℓに無関係に与えられた（荷重制御）とし，$\bar{P}=\hat{P}(\boldsymbol{x},\beta)$, $P=\hat{P}(\boldsymbol{x},\alpha)$とおく．そのとき，もし各$\boldsymbol{x}\in\Gamma$に対し，逆関数$\hat{\beta}=\hat{P}^{-1}$が存在したとすると$\hat{\delta}$の変数$\beta$は$\bar{P}$に置き換えることができ，$\tilde{\delta}(\bar{P},\ell):=\hat{\delta}(\boldsymbol{x},\hat{\beta}(\bar{P},\boldsymbol{x}),\ell)$と略記すると式 (2.37) は

$$E(\ell,P)=\int_\Gamma\int_0^P\frac{\partial\tilde{\delta}(\bar{P},\ell)}{\partial\ell}d\bar{P}d\Gamma \tag{2.38}$$

となる．上式は，Γ上の積分を除けばRice[13]の荷重–荷重点変位曲線でのポテンシャルエネルギ変化率を表した式である．式 (2.36) で「uとs」「δとP」をそれぞれ入れ換えて式 (2.37) 以後と同様な議論により

$$E(\ell,\delta)=-\int_\Gamma\int_0^\delta\frac{\partial\tilde{P}(\bar{\delta},\ell)}{\partial\ell}d\bar{\delta}d\Gamma \tag{2.39}$$

が得られる．式 (2.38) あるいは式 (2.39) による方法，すなわち，E積分によりエネルギ解放率を求める方法は，境界の荷重–荷重点変位関係さえわかれば値が求まるので構成式が未知の場合，特に実験においてその値を求めようとする場合に有利である．しかし，これらの評価式を用いる場合は，き裂長さを変化させるか，異なるき裂長さをもつ数個の供試体を必要とする[14]．そこで，種々の制限はあるが，き裂長さを変えることなく，一つの荷重–荷重点変位曲線からエネルギ解放率が評価できる簡便評価式が[13]提案されている．これらの実験的評価については花崗岩の実験で後に触れる．

2.2.4 J積分

Fig.–2.9に示されるような有限変形する均質な2次元非線形超弾性体B内に長さℓの直線き裂がある場合を考える．

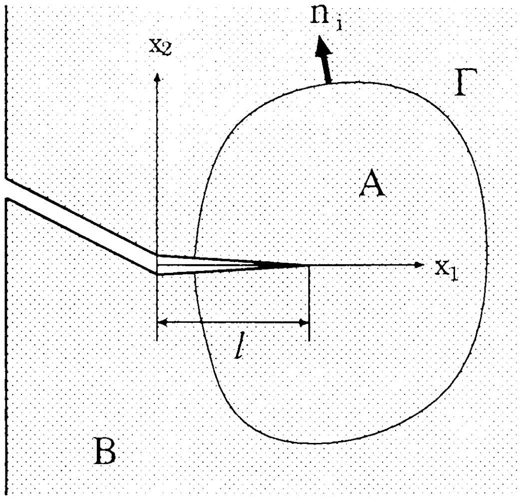


Fig.– 2.10 Crack and integral path for J–integral.

き裂の一端を含む基準系に固定された正則な閉領域を A，その境界をΓとする．ただし，含まれるき裂はA内では曲がっていないものとする．場の量 $\Phi(x_1, x_2, \ell)$ において変数変換 $x_1 = \xi + \ell$ を行った量を $\bar{\Phi}(\xi, x_2, \ell)$ とおく．そのとき

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ell} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \ell} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \tag{2.40}$$

となることに注意する．これよりひずみエネルギ密度 w は $1/r$ の特異性をもつことから $\partial w/\partial \ell$ は $1/r^2$ の特異性をもち可積分とならないが $\partial \bar{w}/\partial \ell$ は $1/r$ の特異性のままであり可積分である．式 (2.40) より

$$\frac{\partial}{\partial \ell}\int_A w dA = \int_A \frac{\partial \bar{w}}{\partial \ell} dA - \int_\Gamma w dx_2 \tag{2.41}$$

が成立することが証明できる[15]．このとき式 (2.24) は

$$\mathcal{G}(\ell, \alpha) = \int_\Gamma \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial \ell} d\Gamma - \int_A \frac{\partial \bar{w}}{\partial \ell} dA + \int_\Gamma (w dx_2 - \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} d\Gamma) \tag{2.42}$$

となり，第 1 項と第 2 項には発散定理が使えて[15]

$$\mathcal{G}(\ell,\alpha)=\int_\Gamma\left(w dx_2-\boldsymbol{s}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x_1}ds\right)\equiv J(\ell,\alpha) \tag{2.43}$$

を得る．上式が均質非線形物質の場合の経路独立なエネルギ解放率を求める積分公式でJ積分といわれる．したがって，J積分値は，エネルギ解放率を与え，例えば，モードI，等方線形弾性体の場合は式(2.21)と一致する．さらにJ積分の値は，領域Aが直線き裂先端を含む限り，経路Γによらないことは容易に示される．Jの値が積分経路によらないことが弾塑性破壊力学においてJ積分がよく利用されている理由の一つである．しかし，J積分は非線形弾性体または全ひずみ塑性理論を念頭に導入されたものであり，実際の塑性挙動を，よりよく表現しているとされる増分理論への拡張利用は注意を要する．例えば，式(2.43)のwを全仕事と定義したとしても，静止き裂の場合，Jの値はエネルギ解放率の物理的意味を持たないし，き裂が準静的に定常進展する場合は，wの特異性のオーダーが$1/r$以下となりJの値がゼロとなり，き裂進展パラメータとしての意味を失う．

2.2.5 J積分とE積分の比較

E積分はエネルギ解放率を解析するうえで，J積分とは異なり，非均質物質中を進展するき裂，また疲労き裂等にしばしばみられる非直線的なき裂に対しても，積分経路にき裂面を含めなくても，経路独立であることは式(2.22)の定義自体が領域Aによらないこと，また式(2.27)を導く際，き裂の直線性は仮定していないことから明らかである．これに対し，J積分の場合，ひずみエネルギ密度がx_1と無関係でない限り，例えば，x_2軸に平行に界面などが存在すれば経路独立性は成り立たない．さらに，J積分では，原理的には，主き裂と同方向にき裂が進展した瞬間時のエネルギ解放率しか求まらないが，E積分では，任意の方向に進展した瞬間時のエネルギ解放率も経路独立な積分により求めることができる．したがってそのような，き裂折れ曲がり瞬間時における，数値解析において，最も誤差が大きくなる特異点近傍から離れて積分すればよく，数値解析上有利である．詳細すると，**Fig.–2.11**のように$\boldsymbol{e}$をき裂先端の進む方向の単位ベクトル，$\boldsymbol{n}$をΓ上の外向きの単位法線ベクトルとしたとき，J積分は次式でも表せる．

$$\mathrm{J}=\int_\Gamma(w\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{s}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{e})ds \tag{2.44}$$

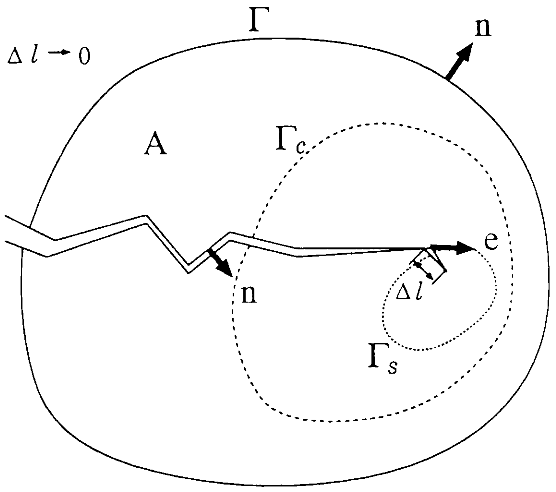


Fig.– 2.11 Zigzag extending and kinking crack.

き裂が直線的でないかぎり，き裂面上で $e \cdot n \neq 0$ であるから，先に述べた閉領域 A の境界 Γ のみからなる経路では経路独立とはならない．経路独立積分とするためには Γ にき裂両面を含める必要がある（その場合，コーシーの主値としての積分値の有限性の証明は文献[16]を参照．文献[17]では，き裂面先端を含めた経路での可積分性の証明が行われている．）．しかしながら，き裂面を積分経路に含めることにより経路独立積分としてジグザグなき裂に適用できても，き裂の折れ曲がり瞬間時におけるエネルギ解放率を求めることは非常に困難である．もし J 積分を用いてき裂の折れ曲がり瞬間時におけるエネルギ解放率を求めようとすると，最終的に折れ曲がった微小き裂（**Fig.–2.11**中の長さ$\Delta\ell$の部分）の先端を含む積分経路（たとえば，**Fig.–2.11**中の，き裂面を含まないが，主き裂と交差することがないΓ_s，または微小き裂先端までの全き裂面を含めたΓ_c）をとって解析する必要があるが，その折れ曲がった微小き裂長さを複数とった後，極限操作でその長さが零になるところを外挿して求める必要があり，き裂先端近傍では数値誤差が大きいことなども考慮すると数値解析上極めて不利となる．このことは緒言で述べた経路積分$\hat{J}$やT^*についても同様である．

弾塑性体についても E 積分と J 積分は解釈が異なる．進展している直線き裂に対して，式 (2.22) のような超弾性体であれば式 (2.27) の E と式 (2.43) の J は完全に同じ値となる．しかし弾塑性体であれば全ひずみ理論，増分理論であれ，き裂端後方で除荷が生じ，もはや応力等の場が $\Phi(x,\ell,\alpha)$ のよ

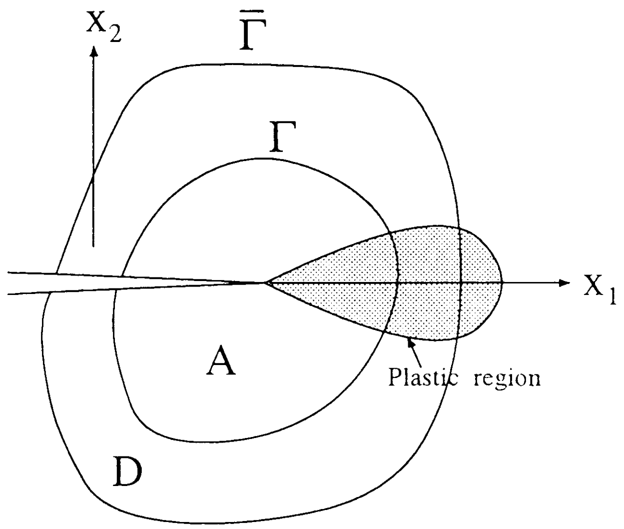


Fig.– 2.12 Elastic–Plastic fields surrounding the crack tip.

うに(ℓ,α)の関数として表せなくなる．したがって，弾塑性体に対しては，実際に進展しているき裂を考えるのではなく，各き裂長ℓに対してパラメータαを単調に増加させたときの静止き裂長さの解が$\Phi(x,\ell,\alpha)$の形における場合として考える．そのとき，wは式(2.22)でなく，一般的に式(2.25)で定義されているとし，式(2.24)または式(2.27)でEを式(2.43)でJを定義する．すると，弾塑性体の場合式(2.25)より

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \boldsymbol{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \alpha} \tag{2.45}$$

であるが，一般に

$$\frac{\partial w}{\partial \ell} \neq \boldsymbol{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \ell} \tag{2.46}$$

であるから，式(2.24)のEの値は，「き裂先端固有の量」とはならない．実際**Fig.–2.12**に示すように，塑性域を含む$\bar{\Gamma}$，Γおよびそれらに囲まれた領域をDとすると式(2.27)に発散定理を使って，

$$E_{\bar{\Gamma}} - E_{\Gamma} = \int_D \int_0^{\alpha} \left(\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \ell} - \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \beta} \right) d\beta dA \tag{2.47}$$

であるから

$$dw = \boldsymbol{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \beta} d\beta + \boldsymbol{S} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \ell} d\ell \tag{2.48}$$

が全微分となる超弾性領域の場所では式(2.47)の被積分項は0となるが，塑性域に達する場所では式(2.47)の値は一般には0とならないからE_Γはき裂先端固有ではなく，「塑性域固有の量」すなわち塑性域を通過せぬ限り経路独立である量となる．一方，**Fig.–2.12**のように座標をとっても式(2.43)のJは

$$J = \int_\Gamma \left(w dx_2 - \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} d\Gamma \right) \tag{2.49}$$

であるが

$$\int_\Gamma w dx_2 = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\int_0^\alpha \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \beta} d\beta \right) d\Gamma \tag{2.50}$$

であることに注意すれば

$$J = \int_\Gamma \int_0^\alpha \left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \beta} - \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right) d\beta d\Gamma \tag{2.51}$$

となる．式(2.51)を式(2.47)のようにD上で評価することにより，Eと同様，Jも一般には「塑性域固有の量」となる．なお，同一のΓ上で，式(2.27)および式(2.51)より

$$\begin{aligned} J_\Gamma - E_\Gamma &= \int_\Gamma \int_0^\alpha \left\{ \left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \ell} \right) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \beta} - \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \beta} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \ell} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1} \right) \right\} d\beta d\Gamma & (2.52) \\ &= \int_A \int_0^\alpha \left(\frac{\partial \bar{\boldsymbol{S}}}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \beta} - \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \bar{\boldsymbol{H}}}{\partial \ell} \right) d\beta dA & (2.53) \end{aligned}$$

である．ここで

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \ell} := \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \ell} \tag{2.54}$$

であり，式(2.53)のAの被積分項は，静止き裂に対しても一般に可積分であることが，今までに知られている解からいえるから式(2.52)でき裂を含む領域Aに対しても発散定理を使った．式(2.53)からも超弾性体であればJとEの値は一致するが，弾塑性体であれば，式(2.53)の塑性領域での積分に相当する値分だけJとEは異なることがわかる．ただしAをき裂端を含めたままで面積を0にすると両者の極限値は一致する．

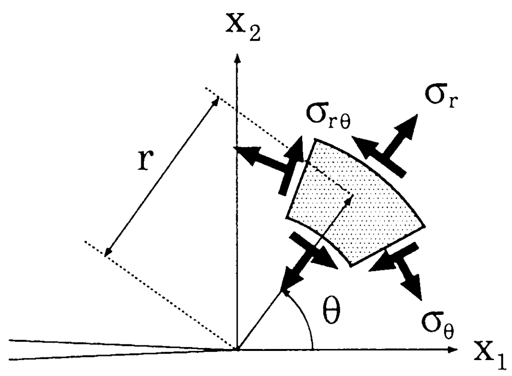


Fig.– 2.13 Crack tip polar coordinate system and stress condition.

弾塑性破壊靭性試験などでよく用いられる簡便式は，しばしばJの簡便式と呼ばれるが，上で考察したことにより，厳密には，JではなくEの，Γを物体の境界上にとったときの，簡便式である．また弾塑性体場合，式(2.43)，(2.44)および(2.51)のJの物理的意味は明確でないが，Eに対しては，式(2.35)により「ある状態(ℓ, α)に達するのに必要とされる外力（応力ベクトル）がなすべき仕事のき裂長さの違いによる差」と解釈することができる．

2.3 破壊クライテリオン

2.3.1 最大周応力説

破壊力学における混合モードクライテリオンはErdogan and Sihによって最初に議論された[18]．この理論で，き裂進展発生を支配するパラメータは，き裂近傍の周応力σ_θ（**Fig.–2.13**）である．

混合モード載荷状態でのき裂近傍の応力状態は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &\cong \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\{K_I(3-\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}+K_{II}(3\cos\theta-1)\sin\frac{\theta}{2}\},\\
\sigma_\theta &\cong \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\{K_I(1+\cos\theta)\cos\frac{\theta}{2}-K_{II}3\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\},\\
\sigma_{r\theta} &\cong \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}}\{K_I\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}+K_{II}(3\cos\theta-1)\cos\frac{\theta}{2}\}
\end{aligned}\right\} \tag{2.55}$$

破壊力学による破壊クライテリオンはき裂が不安定進展する開始と方向を議論するものである．最大周応力説はき裂の進展が方向については最大引

張方向に垂直な方向に発生するとする仮説で，$\sigma_{r\theta}=0$ で与えられる θ_0 で破壊き裂が進展する．すなわち，対象とするモデルのK_IおよびK_{II}が解析的に得られれば次式を満足する θ_0 が得られる．

$$K_I \sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1) = 0. \tag{2.56}$$

θ_0が求まれば次式のようにあらかじめ評価した応力拡大係数の次元をもつ破壊靭性値，例えばモードIにおける破壊靭性値（K_{IC}）と比較して破壊き裂が進むか否かを判断する．

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta_0}{2}\{K_I(1+\cos\theta_0)+3K_I\sin\theta_0\} \geq K_{IC} \quad (crack\ initiation) \tag{2.57}$$

もし，モードIのみの載荷であれば，$K_{II}=0$ であるから

$$K_I \sin\theta_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 0°. \tag{2.58}$$

純せん断であれば，$K_I=0$ であるから

$$K_{II}(3\cos\theta_0 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = \arccos(1/3) \quad \Rightarrow \quad \theta_0 \approx 70.5°. \tag{2.59}$$

になる．

2.3.2 複合応力仮説

最大周応力説の考え方に対してもう一つの主応力（σ_r）の効果を考えたのが複合応力仮説[19]である．この理論は岩質材料への適用を考え，σ_rの関与は材料構成要素の理想強度のことであり，推定するしかないが，巨視的な破壊条件として周知のMohrの条件のような放物線型の複合応力関係を考えている．すなわち

$$b\left(\frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{\sqrt{2}\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\theta + \sigma_r}{\sqrt{2}\sigma_{cr}}\right) - c = 0. \tag{2.60}$$

ここで，b，cは正の無次元定数，σ_{cr}は次式で与えられる．

$$\frac{K_{IC}}{\sqrt{2\pi r}} \cong \sigma_{cr} \tag{2.61}$$

いま，$\eta = \tan(\theta/2)$ とおくと，式 (2.56) より

$$K_{II} = \frac{\eta}{1 - 2\eta^2 K_I} \tag{2.62}$$

であるからこの関係を式 (2.60) に代入すると，

$$b\frac{2\eta^2}{1+\eta^2}(\frac{K_{II}}{K_{IC}})^2 + \frac{\sqrt{2}(1-\eta^2)}{\eta\sqrt{1+x^2}}\frac{K_{II}}{K_{IC}} - c = 0 \tag{2.63}$$

が得られ，混合モードの破壊条件となる．この理論ではフライアッシュセメントペーストを用いた混合モード実験に対しては $b = 0.60$ 程度がその挙動をうまく説明できるとしている．またこの理論のき裂進展方向は最大周応力説と一致する．

2.3.3 最小ひずみエネルギ密度量説

き裂近傍材料要素のもつひずみエネルギの観点からき裂の発生条件を提案したのがSihによる最小ひずみエネルギ密度量 (minimum strain-energy-density factor) 説である[20)]．き裂近傍の極座標による変位は

$$\left.\begin{aligned} u_r &\cong \frac{1}{4}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi G}}[K_I\{(2\kappa-1)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}\} - K_{II}\{(2\kappa-1)\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2}\}] \\ u_\theta &\cong \frac{1}{4}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi G}}[K_I\{-(2\kappa+1)\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\} - K_{II}\{(2\kappa+1)\cos\frac{\theta}{2} - 3\cos\frac{3\theta}{2}\}] \end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

で与えられる．き裂近傍要素 $dA = rd\theta dr$ の 2 次元応力系でのひずみエネルギは次式で表される．

$$dW = \frac{1}{2}\left\{\sigma_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta\left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + \sigma_{r\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right)\right\} dA \tag{2.65}$$

式 (2.55)，(2.64) を式 (2.65) に代入してまとめると，

$$\frac{dW}{dA} \cong \frac{1}{r}(a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2). \tag{2.66}$$

ここで係数 $a_{ij}(i,j = 1,2)$ は次式で表される．

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi G}\{(1+\cos\theta)(\kappa-\cos\theta)\}$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\pi G}\sin\theta\{2\cos\theta-(\kappa-1)\}$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\pi G}\{(\kappa+1)(1-\cos\theta)+(1+\cos\theta)(3\cos\theta-1)\}$$

これらは弾性定数 κ や G に依存する．このとき，き裂近傍のエネルギ場を S によって表し，ひずみエネルギ量とする．すなわち

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2. \tag{2.67}$$

この量は θ に依存し，き裂近傍の局所的なエネルギ密度を記述する．最小ひずみエネルギ密度量説は S が最小となる方向 (θ_0) にそって，き裂が進展するとし，θ_0によるS がある限界値 (S_{cr}) に達したとき，き裂は進展する．すなわち

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \tag{2.68}$$

で得られる θ_0 を用いて

$$a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \geq S_{cr}(crack\ initiation) \tag{2.69}$$

を，き裂の進展の発生条件とする．S_{cr}はエネルギ解放率の次元をもつ破壊靭性値であるが，応力拡大係数との関係を用いて

$$S_{cr} = \frac{(\kappa-1)K_{IC}}{8G}$$

などの値が用いられる．

2.3.4 最大エネルギ解放率説

この破壊クライテリオンは超弾性体の場合，本研究で扱うE積分に対する破壊基準にもなる．線形弾性体の場合，エネルギ解放率は応力拡大係数と関係付けられることはすでに述べた．すなわち，混合I, IIモードの場合，

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa+1}{8G}(K_I^2 + K_{II}^2) \tag{2.70}$$

で示される．しかし，このエネルギ解放率はき裂が直進する，すなわち主き裂と同方向に進展する場合の表示である．混合モードにおいてはき裂は折れ曲がるので，き裂折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を考えなければならない[21)~23)]．この場合，エネルギ解放率はき裂折れ曲がり角 θ の関数となり

$$\mathcal{G}(\theta) = \frac{\kappa+1}{8G}(\bar{K}_I^2(\theta) + \bar{K}_{II}^2(\theta)). \tag{2.71}$$

ここで，$\bar{K}_I(\theta)$ と$\bar{K}_{II}(\theta)$ は θ 方向に折れ曲がった瞬間時のモードIおよびモードIIの応力拡大係数である．最大エネルギ解放率説はこの $\mathcal{G}(\theta)$ の最大となる方向（θ_0 方向）にき裂が進展し，その値がエネルギ解放率の次元で得られた破壊靭性値 $\mathcal{G}_{cr}$ を越えると破壊が生じると考える説である．すなわち，

$$\mathcal{G}(\theta_0) \geq \mathcal{G}_{cr}(crack\ initiation). \tag{2.72}$$

この説を使用するために，き裂折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を求める必要がある．しかし，モードIIIの特別な場合を除いて，その厳密な理論解は現在まで知られていない．この説を使用した文献としてHussainらの研究[21)]がよく引用される．これはき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率が，き裂の進展する前の状態の応力拡大係数で陽な形で得られているため，他の破壊クライテリオンと比較しやすいためと考えられる．しかし，得られたエネルギ解放率はモードIの場合でも $|\theta| > \pi/2$ では他の結果と大きく異なっているなど解の信頼性に問題を残している．また他の結果でも，最終的には数値解析以外には解くことのできない積分方程式になり，精度の高い数値解析法が必要になる．したがって折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率についてはまだ未解決な部分が多くあり，本論文では，その解決に対して一つの方向を見出している．本論文ではき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を E 積分を用いた有限要素法により求めているが，その結果は4章の解析で詳しく述べる．

混合モード下でのエネルギ解放率の理論解析には今述べたように若干問

題を残しているが，破壊クライテリオンとしては，応力拡大係数による破壊クライテリオンが異方性材料では限界があるという見方もあり[24)]，E 積分による最大エネルギ解放率説の今後の応用が期待される．

2.3.5 $\bar{K}_{II}=0$ 説

応力拡大係数を破壊基準パラメータとした微小な折れ曲がりを仮定した破壊クライテリオンに$\bar{K}_{II}=0$説がある[25)]．この破壊クライテリオンは局所対称破壊条件（criterion of local symmetry）とも呼ばれ，前に挙げた破壊クライテリオンと異なる点は摂動法（perturbation procedure）と組み合わされてよく用いられ，主き裂からのき裂の発生において折れ曲がり角は小さくその後き裂進展経路は折れ曲がり角を持たず，ある曲率をもってなだらかに曲がって進むという考え方である．この考え方はき裂先端の微小部分では新たな発生き裂はもとのき裂面に対して対称に発生すると考えているのでき裂進展条件としては

$$\bar{K}_{II}=0 \tag{2.73}$$

$$\bar{K}_I \geq K_{IC}(crack\ initiation) \tag{2.74}$$

となる．材料中の破壊進展き裂を考えるときは明らかにき裂の折れ曲がりが確認できるが，き裂進展経路を区分的にとらえると近似的に曲線で表せるため，この破壊クライテリオンを有用と考える報告も多い[26)27)]．

2.4 破壊靭性の評価

2.4.1 標準試験法，指針における破壊靭性評価

前節で頻繁に用いた破壊靭性は金属の降伏強度やコンクリートの引張強度同様一種の材料定数であるが，用いる破壊基準パラメータによりその限界値で評価されることになる．しかしこれらは，板厚，温度，変形速度などに依存し，金属材料の場合，特に板厚の影響を受ける．破壊靭性値で一般的になっているのがモードIの応力拡大係数の限界値 K_{IC} で，これは板厚を十分厚くして，き裂先端近傍での応力状態が板厚方向の大部分で平面ひず

み状態が満たされるときの限界値である．この平面ひずみ破壊靭性と呼ばれる破壊靭性は構造物の大きな事故の原因となるき裂の不安定成長を特徴付けるため重要である．平面ひずみ破壊靭性試験法で国際的に用いられているのがASTM (American Society for Testind and Materials) で定められた試験法で，最初にこの標準試験法[28)] (ASTM E399–78) について述べる．

ASTM E399–78では，き裂先端の塑性域寸法がき裂長さや板厚に比べて極めて小さい状態での破壊を扱うため試験装置，供試体と切り欠きの形状および寸法，疲労き裂の挿入条件，き裂開口変位を測定するクリップゲージの形状や製作法，実験方法など詳細に規定が設けられている．試験は3点曲げ試験と小型引張 (Compact tension) 試験の双方で行うことができ，その供試体と載荷形式の概要を**Fig.–2.14**に示す．どちらの試験法においても平面ひずみ状態を関連付ける次式により板厚のBが決まれば，図に示した寸法により供試体が決定される．

$$B \geq 2.5(\frac{K_{IC}}{\sigma_Y})^2. \tag{2.75}$$

ここでK_{IC}は材料の平面ひずみ破壊靭性，σ_Yは試験時の温度と使用した荷重速度に対応する0.2%耐力である．切り欠きは各供試体とも，先端を鋭くするため疲労き裂を挿入するよう規定されている．疲労き裂も含めた切り欠き長さℓおよび疲労き裂長さℓ_eはWを供試体の幅とすると，

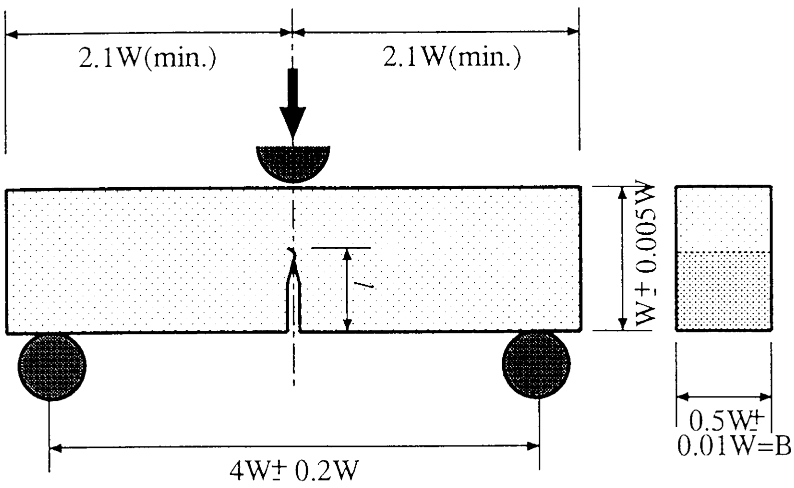
$$0.45W < \ell < 0.55W \tag{2.76}$$

$$\ell_e \geq 1.3mm \tag{2.77}$$

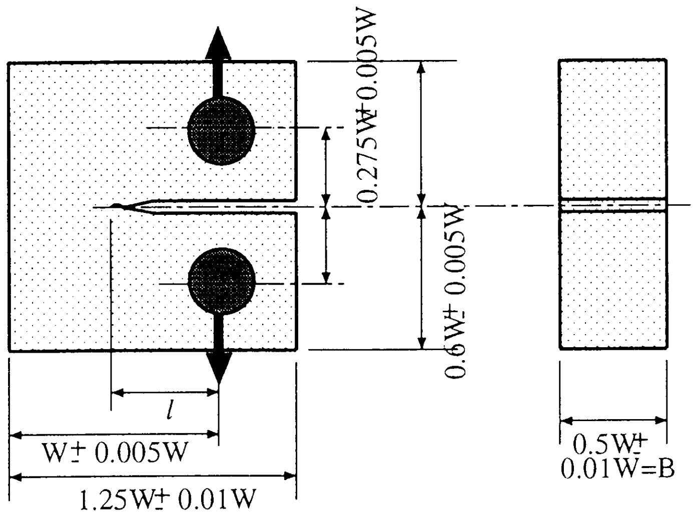
を満足しなければならない．試験は少なくとも3本以上の供試体について，$\dot{K} = 33 \sim 165 MPa \cdot m^{1/2}/min$の範囲内の載荷速度で行われ，載荷荷重とき裂開口変位を測定する必要がある．

評価点については，測定される載荷荷重Pとき裂開口変位*vの関係は**Fig.–2.15**の3つのタイプに大別されるので，各々について初期段階における線形域の勾配の95%勾配をとって次のように定める．すなわち，(A)では95%勾配と荷重–変位曲線の交点P_Sが評価時の荷重P_Qにまた(B), (C)についてはP_Sに

* ここではクリップゲージにより得られた変位を示す．



(a) 3 point bend test



(b) compact tension test

Fig.– 2.14 Scheme of the test and the specimen in ASTM E399–78.

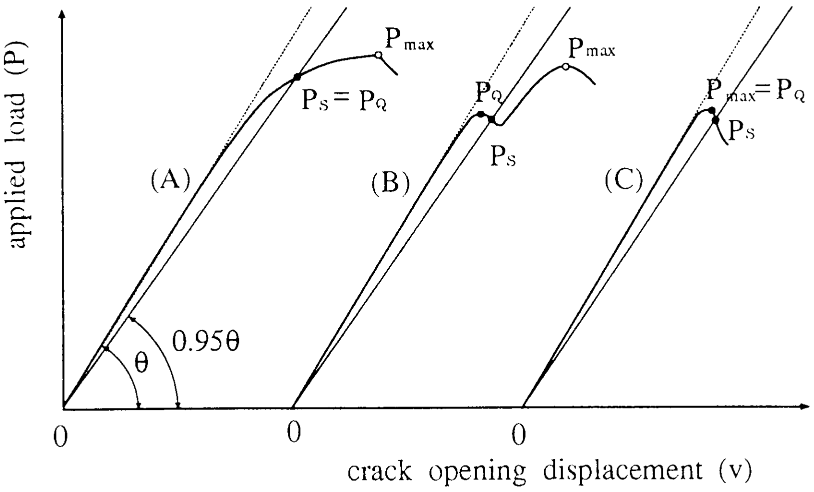


Fig.– 2.15 Principal type of load–displacement records.

至るまでの最大値がP_Qになる．ただし，最大荷重値P_{max}とP_Qの間には次式が成立しなければならない．

$$\frac{P_{max}}{P_Q} < 1.10. \tag{2.78}$$

P_Qが決定されれば次の式[29]により仮の破壊靭性K_Qが得られる．

$$K_Q = \frac{P_Q S}{BW^{3/2}} f(\frac{a}{W}) \qquad (for\ bend\ test) \tag{2.79}$$

ここでSは支点間距離，$f(a/w)$は$\xi = a/w$として

$$f(\xi) = \frac{3\xi^{1/2}[1.99 - \xi(1-\xi)(2.15 - 3.93\xi + 2.7\xi^2)]}{2(1+2\xi)(1-\xi)^{3/2}}.$$

$$K_Q = \frac{P_Q}{BW^{1/2}} f(\frac{a}{W}) \qquad (for\ compact\ tension\ test) \tag{2.80}$$

$f(a/w)$は同様に$\xi = a/w$として

$$f(\xi) = \frac{(2+\xi)(0.886 + 4.64\xi - 13.32\xi^2 + 14.72\xi^3 - 5.6\xi^4)}{(1-\xi)^{3/2}}.$$

K_{IC}については

$$B,\ \ell \geq 2.5(\frac{K_Q}{\sigma_Y})^2. \tag{2.81}$$

を満足している場合にK_QがK_{IC}として認められる．この条件が得られないときは供試体寸法を1.5倍にして再試験を行う．また有効なK_{IC}が得られない場合は破壊靭性の目安として強度比R_{sb}やR_{sc}を求めることが推奨されている．

以上のK_{IC}に対して，平面ひずみは満足しても小規模降伏条件を満足することなく生じる弾塑性破壊も扱う必要がある．これは工業用材料として広く使用される延性高靭性材料の供試体寸法の増大や原子炉圧力容器などの大型構造物の破壊に対処するもので，ASTMやJSME（日本機械学会）で基準化されている．いずれも安定破壊開始時のJ積分値で評価されるものであるが，安定破壊開始時の検出は困難である．これについては多くの議論がるがここではASTMの基準（E813–81）[30]について簡単に触れる．この規格は仮定されるき裂先端鈍化直線（blunting line）と実測されたR曲線（regression line）との交点からJ_{IC}を決定するところに特徴がある．供試体，試験方法はE399–78とほぼ同様であるが，R曲線を描くため少なくとも5本以上の供試体について実験を行う必要がある．また3点曲げ試験においては載荷点変位を正確に測定する必要性が出てくる．さらに安定き裂発生後の挙動をつかむため変位制御での載荷が必要である．供試体寸法の決定は次式により板厚が決定され，他の諸寸法もこれにより決まるが，E399–78とは若干異なる．

$$B \geq 25\frac{J_{IC}}{\sigma_Y} \tag{2.82}$$

また初期切り欠き長さℓ_0は

$$0.5W \leq \ell_0 \leq 0.75W \tag{2.83}$$

で0.6Wを推奨している．J積分の評価は次式[13)30)]によって行う．

$$J = \frac{Af(\ell_0/W)}{Bb} \tag{2.84}$$

3点曲げ試験:

$$f\left(\frac{\ell_0}{W}\right) = 2$$

小型引張試験:

$$f\left(\frac{\ell_0}{W}\right)=2\left[\frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}\right]$$

$$\alpha=\sqrt{\left(\frac{2\ell_0}{b}\right)^2+2\left(\frac{2\ell_0}{b}\right)+2}-\left(\frac{2\ell_0}{b}+1\right)$$

ここでbはリガメント長さ，Aは荷重-載荷点変位曲線下の面積である．これらの式はJ積分の簡便式と呼ばれるものであるが，前述のとおり正確にはE積分の簡便式である．

以上に挙げた2種類の破壊靱性評価法は主に金属材料に対するものである．金属材料の安定性の評価のための破壊靱性であれば重要な指針となるが，構造物の破壊の破壊力学的アプローチで，特に破壊シミュレーションを正確に行おうとする場合には解析法も含めて十分な議論が必要となる．またこれらの手法によって得られた破壊靱性を材料固有の物性値と考えるには問題が多いが，それに近い値として評価しようとするなら議論の余地があると考えられる．

金属材料であれば，き裂の進展挙動は転位理論によりある程度は説明できるが，組織構造が複雑なコンクリートや岩石などの岩質材料やセラミックではき裂の進展挙動は未知であるとしても過言ではない．それに伴い，破壊靱性の評価も非常に困難である．そこで，岩石についてまとめられた指針[31)]についてその経緯，問題点を含めて考察する．

岩石の破壊靱性評価は岩盤応力の測定法の一つとしての水圧破砕の利用や高温岩体の地熱開発などに対して岩盤内の引張き裂の進展挙動の解明が必要になったため注目されるようになった．しかし岩石の破壊靱性は供試体寸法，温度，載荷速度だけでなく，湿度，含水比などにも影響を受けるうえ，一般に異方性を有する．また岩石は載荷初期から非線形性を有し，載荷荷重が最大を示すあたりでは著しい非線形性を呈す．したがって，ASTM E399に見られる手法で平面ひずみ破壊靱性K_{IC}を得ることは注意を要する．しかし初期にはまったく資料がないためASTMの規格に準じた試験法が行われた．そのため当初は寸法効果が重要なテーマでその効果を取り除くことができなかった[32)～34)]．寸法効果をある程度解消したのは試験時に発生するAE（acoustic emission）のもつエネルギにより破壊き裂の発生*を予測することが幾分可能になってからである[35)]．ただし，それでも評価点での荷重に

---

*発表論文中では初生という言葉を用いている．

より求めた応力拡大係数では寸法効果は依然として存在し，評価点までの荷重-載荷点変位により得られるJ積分の簡便式（正確には幾度も本論文で述べているようにE積分の簡便式）により得られたJ積分値でのみ寸法効果をもたない破壊靭性を得ている[36]．しかしながら，有効な手法にもかかわらず，ISRM（International Society for Rock Mechanics）で岩石の破壊靭性試験の指針をまとめるにあたっては，AEに対する計器が高価で一般的でないこともあって，採択されていない．

ISRMではワーキンググループにより岩石の標準試験法を指針として制定しており，現在も検討を加えている．ISRMが採用した供試体はコア供試体で異方性の効果も検討できるように2種類の試験法を提案している．その一つがシェブロンベンド（Chevron Bend；以下CBと略す．）試験でもう一つがショートロッド（Short Rod；以下SRと略す．）試験でその概要を**Fig.–2.16**に示す．双方ともシェブロン型の切り欠きを採用しており，試験法の容易さによりレベルIとレベルIIの2種類の試験法を設定している．レベルIは与えられた載荷速度で載荷して最大荷重のみを得れば，評価式により破壊靭性が得られるが，寸法効果のない破壊靭性を得ることは不可能である．レベルIIは非線形補正を行うため，SR試験ではき裂開口変位を，またCB試験では複雑な治具により載荷点変位を測定し，**Fig.– 2.17**に示すように数回の載荷と除荷を繰り返す必要がある．

長い間検討されている指針ではあるが，いくつかの問題も有している．そのひとつはレベルIIの場合，手法が煩雑すぎてうまく受け入れられていないこと，すなわち誤った方法で評価を行った例がいくつか挙げられる．またコア供試体を用いているため特にCB試験の場合，供試体のセッティングが容易でなく，その不完全さにより誤差を招くことがある．さらに湿度や含水比をどのように扱うかという問題も抱えており，今後の検討が期待されている．

2.4.2　E積分による破壊靭性評価

E積分によって直接破壊靭性を評価するため，金属材料に比べて破壊靭性評価が比較的困難である岩石を用いて実験を行った．用いた岩石は，多くの室内実験の研究報告を有する愛媛県大島産の花崗岩で平均結晶粒径は約2mmである．この岩石は領家花崗岩類に属し，岩石学で分類すれば角閃

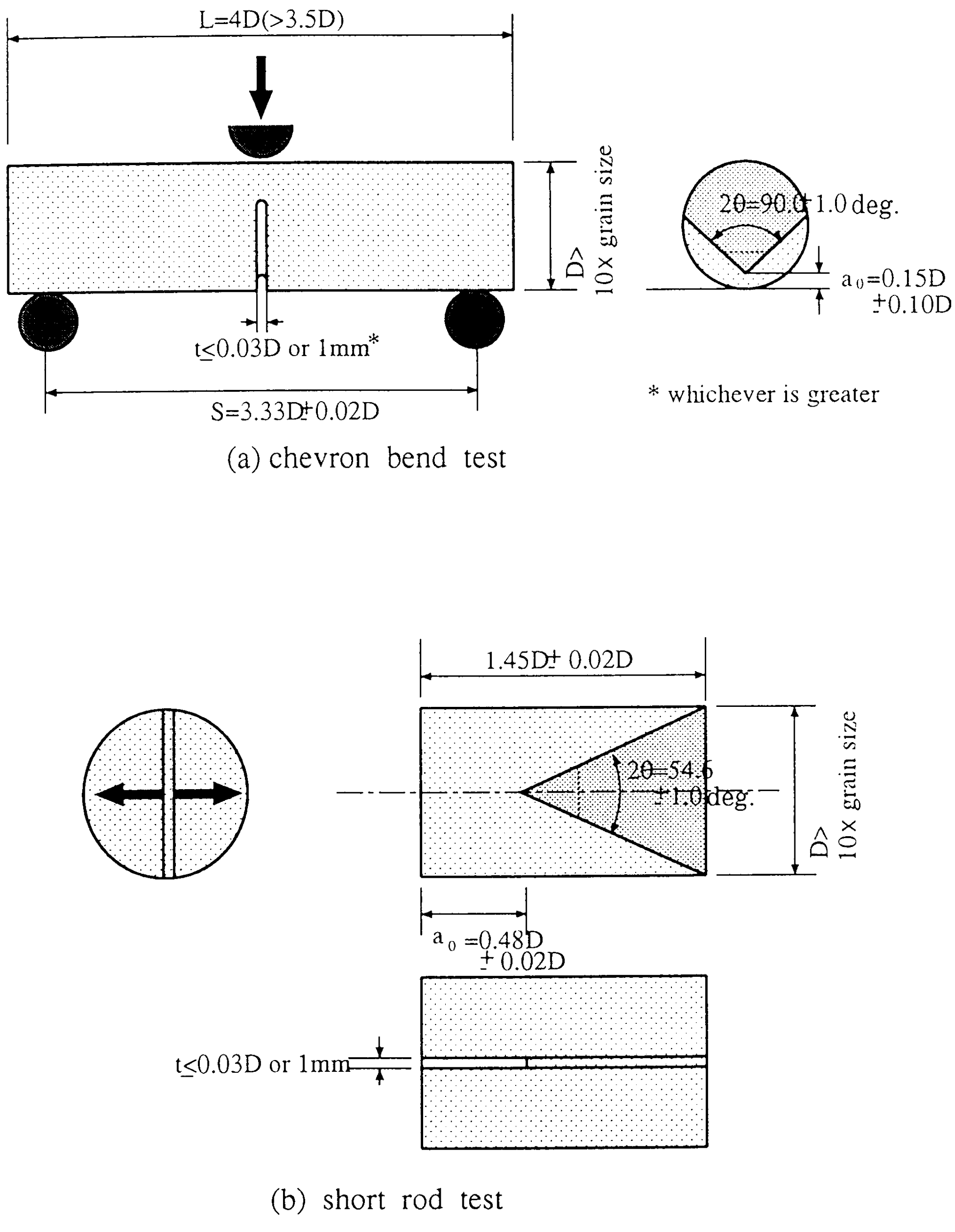


Fig.– 2.16 Scheme of the test and the specimen in ISRM suggested method.

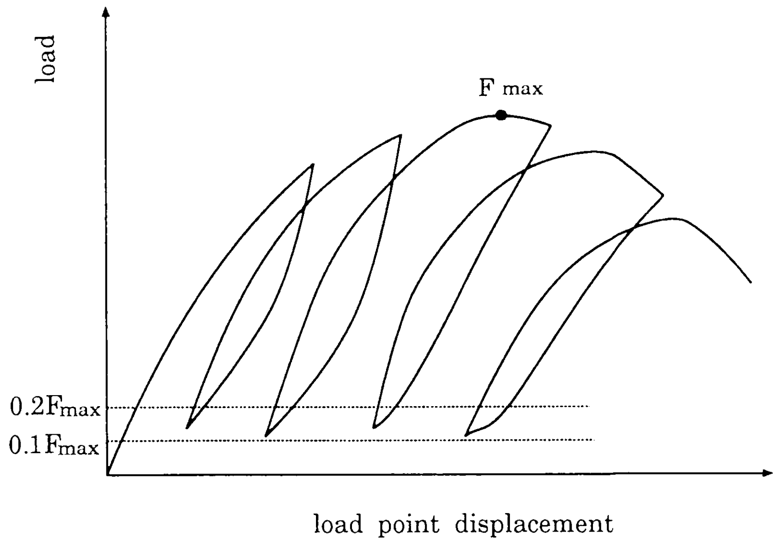


Fig.– 2.17 Principal type of load-displacement records in ISRM suggested method level II.

石黒雲母花崗閃緑岩の範疇に属するが一般的には大島花崗岩と称されている．花崗岩の力学的試験を行う場合，異方性が認められるが，方向を決め，さらに欠陥のない場合の圧縮試験結果は実験誤差として1%程度に収まる[36]ほど均質である．しかし破壊靭性試験では破壊の（き裂の）発生が限られた線領域に限定されるので圧縮試験ほどの精度は望めないと考えられる．

E 積分による破壊靭性評価は基本的にはBegley とLandesが提案した実験的手法[37]と同じである．すなわち切り欠き長さの異なる同寸法の供試体を用い，荷重–載荷点変位を得ることは同じであるが，評価点までの変位を一定にしないで，ある状態（例えば最大荷重点やき裂発生時）に至ったときの各々供試体に対する点を結び，その面積から破壊靭性を導く[37]．その評価方法を簡便式も付して**Fig.–2.18**に示す．

これらのE 値は弾性体であれば，エネルギ解放率に対応するものである．また弾塑性体であればJ積分の物理的意味が明確でないのに対して，「ある状態（例えば，荷重状態）に達するのに必要とされる外力がなすべき仕事のき裂長さの違いによる差」と解釈することができる．

供試体は3点曲げ矩形供試体とし，その寸法は40×40×180mm，支点間距離は160mmとした．供試体に設けた切り欠きは直線人工切り欠き（幅約0.5mm）とし，その長さは4mm,8mm,12mm,16mm,20mmの5種類を2本ずつ用意した．花崗岩では潜在微小き裂により異方性を示す[38]ため，その影響が実験結果に

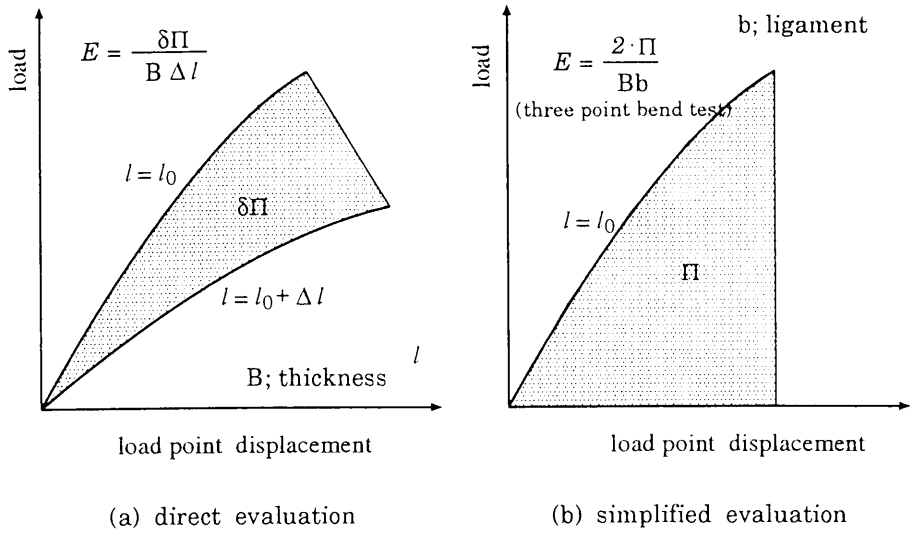


Fig.– 2.18 E–integral evaluation by the direct method and the simplified method.

表れないように，一貫して，3つの直交する微小き裂の配向面のうちでき裂密度が相対的に低い面（hardway面）を破壊面にして，き裂密度が一番高い面（rift面）が側面になるようgrain面に載荷した．したがって，hardway面にそってき裂が進展する場合の破壊靭性を扱っている．互いにほぼ直交する3つの異方性軸方向の弾性波速度はR軸方向（rift面に垂直な方向）が4100m/sec，G軸方向（grain面に垂直な方向），4400m/sec，H軸方向（hardway面に垂直な方向），4700m/secであった．用いた載荷試験機はサーボ制御機能を有する載荷装置（島津サーボパルサEHF–EUB30–20L型）で変位速度5×10^{-4}mm/secの変位制御で載荷した．計測量としては荷重，載荷点変位，AEのカウント数，き裂開口変位を扱い，パーソナルコンピュータでGP–IBインターフェイスを介して5秒間隔でオンライン処理を行った．ここで載荷点変位の測定については**Fig.–2.19**に示すようなLVDT取付具を作成して用いたが，原理的には載荷点直下の供試体部と支点の近傍の供試体部（この部分は移動しない）に表れる差を計測するシステムになっている．実験に際しては若干の荷重を与えて，供試体前後に取り付けた2つのLVDTに表れる変位の差が生じないよう荷重の偏心を調べ，それを取り除いた後，開始している．

この種の評価法は供試体数が多く必要であること，実験にかなりの誤差が生じると考えられることなどの理由でほとんど試みられていない．したがって実用には多くの問題を有している．しかし，物理的な解釈が明確な

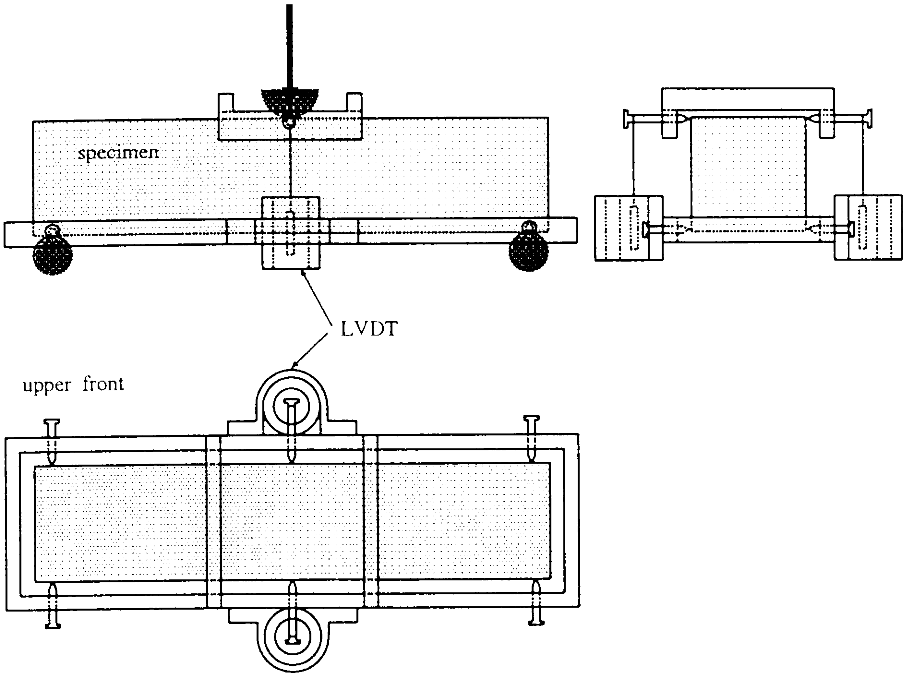


Fig.– 2.19 Apparatus for the measuement of load point displacement by LVDT.

ため，その評価値を得ることは大いに意義がある．したがってここでは特にき裂長さの等しい供試体で得られる荷重-載荷点変位曲線の差を極力減らすよう注意した．評価点はAEのカウント数を扱っているためき裂の発生点を見つけることはある程度可能であるが，定量的にき裂の発生点の評価が困難であるためこの実験では便宜上最大荷重時を評価点にした．

Fig.–2.20に切り欠き長さ8mmの2本の供試体によって得られた荷重–荷重点変位図を示す．この結果は両者の荷重-載荷点変位曲線に比較的誤差を含んだ例である．ここでの評価法では荷重–荷重点曲線そのものが必要になるため2種類のデータに対して6次の最小自乗近似を施し，評価のための曲線を得た．この操作により得られた5本の荷重-載荷点変位図より破壊靭性を得ることになるが，各切り欠き長さで破壊挙動は若干異なる．Fig.–2.21は切り欠き長さ4mmと20mmの2本の供試体の一方の実験により得られた荷重-荷重点変位図と5秒間に生じるAEカウントと荷重点変位の関係を示したものである．この図より切り欠きの短い供試体は荷重- 載荷点変位図の線形性が高いことがわかる．またAEは矢印で示すように載荷段階のほぼ中間当たりから増加し始め，切り欠き長さ20mmの供試体ではある荷重段階まで

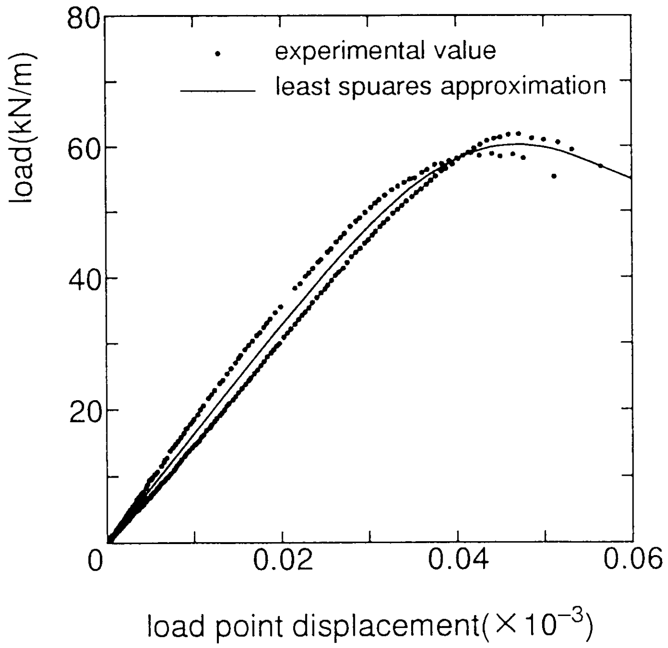


Fig.– 2.20 load–load point displacement curve for the granite specimen of 8mm notch length and the least squeres approximation.

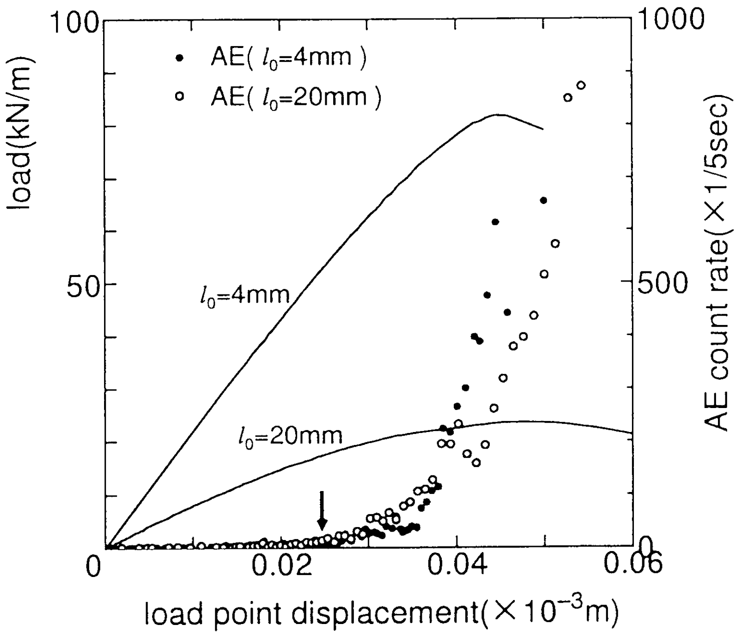


Fig.– 2.21 load–load point displacement curve for the granite specimen of 4mm and 20mm notch length and the relationship between AE count rate and load– load point displasement.

緩やかに増加するのに対して切り欠き長さ4mmの供試体では荷重点変位が$0.035 \times 10^{-3}m$ 程度で急激に増え始める．このことは切り欠きが長い供試体では破壊の進行が徐々に進むのに対して切り欠き長さの短い供試体では破壊が急激に進むという破壊挙動の違いを示唆している．ここで巨視的なき裂の発生をAEにより予測すると双方ともなだらかな曲線から離脱するところ，すなわち $\ell_0 = 4mm$ 供試体では前に示した荷重点変位が$0.035 \times 10^{-3}m$ のあたり，また $\ell_0 = 20mm$ 供試体では$0.038 \times 10^{-3}m$ あたりになる．寸法効果などを考えれば，本来はこの点で評価すべきであるが，ここでは評価法の実用性の検証を主たる目的としており，前述のように荷重最大時としている．

荷重最大時を評価点とした場合のE 積分による破壊靭性の切り欠き長さに対する関係を**Fig.–2.22** に示す．図中，切り欠き長さ $\ell_0 = 4mm$ すなわち $\ell_0/W = 0.1$ では切り欠き長さの差が4種類（$\Delta\ell_0 = 4, 8, 12, 16mm$）選択できるためそれぞれに対して破壊靭性評価が可能である．これに対して$\ell_0/W = 0.4$ ではき裂長さが20mmの供試体とのみ評価が可能であり，評価値は1種類である．この図より，若干，誤差はでているが切り欠き長さによる誤差は顕著に認めることはできず，むしろ評価するき裂長さの差により明かな誤差傾向が表れている．この傾向をつかむため，評価のための切り欠き長さの差，すなわち$\Delta\ell_0$に対する評価値を示したものが**Fig.–2.23** である．ここで評価値が複数の場合は平均しているが，$\Delta\ell_0$が大きい方が大きなE値を与え，$\Delta\ell_0$が小さくなるにつれてある漸近する傾向が明確に表れている．E 積分による評価値は理論的にはき裂長さの差が無限小のところ（$\Delta\ell_0 \to 0$）を得るべきであるから$\Delta\ell_0/W = 0$のところを外挿して求める必要がある．これについては図中の値を2次の最小2乗近似を行い，求めた．その結果$89.2J/m^2$ を得ている．

以上のように寸法効果などの影響で破壊靭性評価が比較的困難であるとされる花崗岩の破壊靭性をE 積分の考え方を用いて直接評価した．E 積分による破壊靭性評価においては荷重–載荷点変位を正確に測定することが必要である．そのため実験に際しては特殊な測定治具を試作して正確な載荷点変位を得ることができるように工夫したが，切り欠き長さや供試体寸法を同じとした供試体での荷重–荷重点変位図にかなりの差が表れた．このことはE 積分による破壊靭性評価のための供試体作成にあたっては載荷面や支持面などの供試体面の整形や切り欠き挿入などを含めた厳密な許容基準を設ける必要があることを示すものである．また今回の実験では評価の

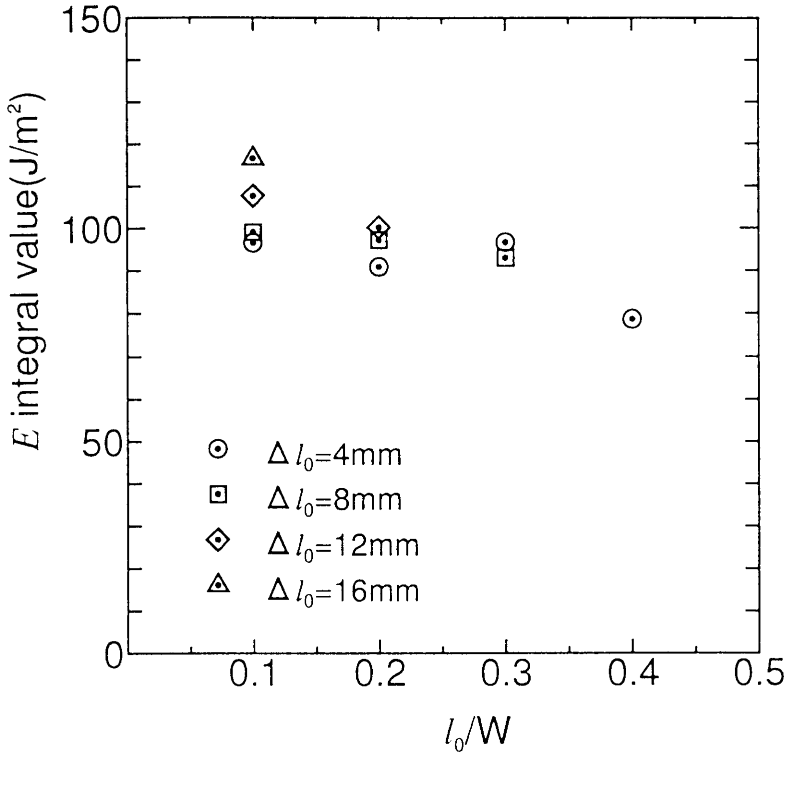


Fig.– 2.22 The relationship between the fracture toughness of the ohshima granite evaluated by the E–integral and the notch length of the specimens.

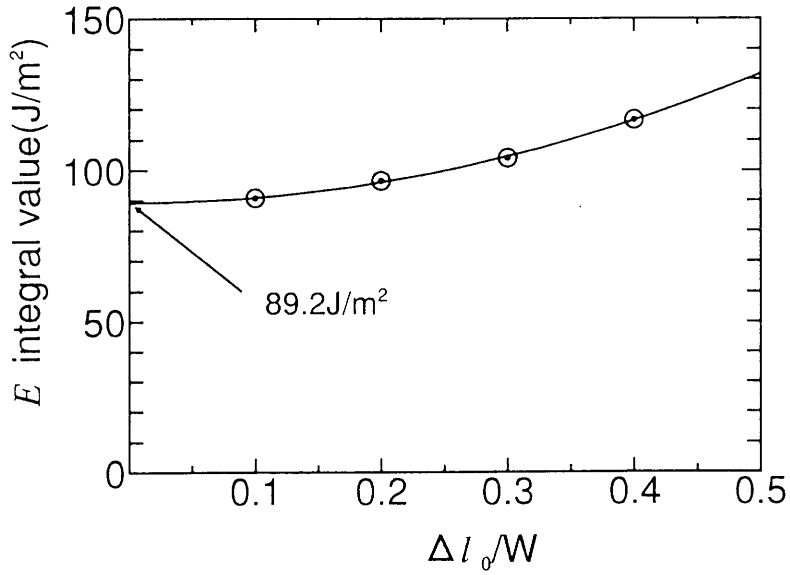


Fig.– 2.23 The relationship between the fracture toughness of the ohshima granite evaluated by the E–integral and the difference of the notch length for the evaluation of the E–integral value.

ための切り欠き長さの差に破壊靭性が大きく依存していることが明らかになったため，その差の影響が表れないくらいの小さな切り欠き長さの差の供試体でより正確な実験を行うか，今回のように多くの切り欠き長さの差を設定して外挿するかという切り欠き長さの差の影響がない評価に対する検討も必要である．しかしながら，実験結果から判断してこの種の破壊靭性評価は手間がかかるが十分実用に値すると結論できよう．今後は有限要素解析などの数値解析の破壊基準としての破壊靭性としてどのように評価していくべきかについての検討が重要である．

2.5 結言

本章では破壊力学により材料の破壊を予測する立場から，これまで主に扱われたき裂進展パラメータ，そのき裂進展パラメータを用いた破壊クライテリオンについて紹介し，最後は破壊靭性の評価について言及した．これまでの破壊力学における話題は解析的には応力拡大係数を様々なモデルに対して求めたり，応力の特異性を解析するという線形弾性学に基づいた研究が多く，非線形解析や動的な解析は数少なかった．しかし対象となるモデルは時代と共にますます複雑化しており，非線形，非定常な問題も増加している．これに対し，破壊力学のき裂進展パラメータはいくつかあり，それぞれ長所，短所を持ち，解析の対象により選択することが望ましいが本研究で扱っているE積分はき裂近傍に応力あるいはひずみの特異点ないし不連続部をもつような場合に特に有利である．また弾塑性解析においても物理的な意味が明確であり，非線形材料への幅広い適用が可能である．したがってこれから注目されるパラメータと考えることができる．

破壊クライテリオンについてもあらゆる材料に適用可能な理論はなく，それぞれ一長一短を有し，扱う材料により選択を余儀なくされるのが現状である．しかしこれまで多くの研究で扱われてきた応力拡大係数を用いたクライテリオンは線形弾性体に限られることから自ずと適用の限界がある．今後はエネルギ解放率による破壊クライテリオンも見直されるようになるであろう．また新しい破壊基準パラメータを望むことは容易でないが，種々の先端材料の開発とともに新しい理論，仮説も提案されることが望まれる．

破壊靭性評価についてはこれまでの標準試験法や指針はかなりの労力を

使っているにもかかわらず，残念ながらき裂進展に関する強度の一つの目安に過ぎない．材料の安定性の評価を行ううえでは特に問題がないが，現状の方法ではき裂部材の破壊試験を行い，き裂発生荷重の代わりに最大荷重と初期き裂長さで限界応力拡大係数を得ても扱ううえで大きな違いは表れないと考えられる．材料固有の材料定数として，環境因子や供試体寸法，切り欠き長さなどにまったく影響を受けない破壊靭性を評価することは非常に困難である．今後はそういった評価より破壊基準に対する材料定数としていかに評価すべきであるかを十分議論して行く必要があるものと考えられる．

最後に示したE積分による破壊靭性評価は供試体の数も多く必要であり，供試体の整形や試験法も熟練した技術を要すると考えられ，試験方法としては容易でないが，非線形弾性体ではエネルギ解放率の限界値を与え，弾塑性体の場合でも物理的な意味も明確であるため興味ある評価法と考えられる．このような方法で行った評価との比較も重要である．試験法の見直しは常にすべきことであり，標準試験法や指針が存在するからそれに準ずるのみでなく，問題点を大いに指摘して行くべきであると考える．

参　考　文　献

(1) Griffith, A. A. : The phenomena of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. A–221, pp. 163–198, 1921.

(2) Irwin, G. R. : Analysis of stresses and strains near the end of a crack, J. Appl. Mech., Vol. 24, pp. 361–364, 1957.

(3) Eshelby J. D. : The continuum theory of lattice defect, vol.Ⅲ, pp.79–144, Academic Press, New York, 1956.

(4) Rice, J. R. : A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., Vol. 35, pp.376–386, 1968.

(5) 岸本喜久雄，青木　繁，坂田　勝：き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータについて，日本機械学会論文集，Vol. 46, No. 410, A, pp. 1049–1061, 1980.

(6) Atluri, S. N., Nishioka, T. and Nakagaki, M. : Incremental path–independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechanics, Eng. Fract. Mech., Vol. 20, No. 2, pp. 209–244,1984.

(7) Yatomi, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, Int. J. Solid Structure, Vol. 19, pp. 183–187, 1983.

(8) Miyoshi, T. : Stress Intensity Factors Represented by Contour Integrals of Displacements, Lecture Note in Num. Appl. Anal., Vol. 13, pp. 23–37, 1994.

(9) 石田　誠：き裂の弾性解析と応力拡大係数，倍風館，1976.

(10) 橋本堅一，矢富盟祥，石田　啓：E 積分による異方弾性体内のき裂折れ曲がり時におけるエネルギ解放率の数値解析，土木学会論文集，No. 513, I-31, pp. 17–25, 1995.

(11) Sanders, J. L. : On the Griffith–Irwin fracture theory , J. Appl. Mech., Vol. 27, pp.352–353, 1960.

(12) 矢富盟祥:エネルギ解放率の新公式とその応用一多軸荷重の場合の簡便式一，材料，Vol. 35, No. 394, pp. 767–771, 1986.

(13) Rice, J. R. Paris, P. C. and Merkle, J. G. : Some further results of J–integral analysis and estimate, ASTM STP 536, pp. 231–245, 1973.

(14) Begley, J. A. and Landes, R. J. : The J integral as a fracture criterion, ASTM STP 514, pp. 1–20, 1972.

(15) Gurtin, M. E. and Yatomi, C. : On the energy release rate in elastodynamic crack propagation, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 74, pp. 231–247, 1980.

(16) 西岡俊久：動的破壊力学における経路独立J'積分の近傍場形状独立性について，日本機械学会論文集，Vol. 54, No. 500, A, pp. 769–796, 1988.

(17) Yatomi, C. and Ishida, H. : Energy release rate by the path-independent E–integral and J–integral for a non–straight crack, submited to Int. J. Fract.

(18) Erdogan, F. and Sih, G. C. : On the crack extention in plates under plane loadind and transverse shear, ASTM, J. of Basic Ergr., Vol. 85, pp. 519–527, 1963.

(19) 矢富盟祥，藤井清司，菊池　正，中川浩二：複合応力仮説による岩質材料の混合モード破壊条件とその実験的検証，土木学会論文集, No. 382/Ⅲ-7, pp. 193–199, 1987.

(20) Sih, G. C. : Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems, Int. J. Fract., Vol. 10, No. 3, pp. 305–321, 1974.

(21) Hussain, M. A., Pu, S. L. and Underwood, J. : Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode Ⅱ, ASTM STP 560, pp. 2–28, 1974.

(22) Wu, C. H. : Maximum-energy-release-rate criterion applied to a tension-compression specimen with crack, J. Elasticity, Vol. 8, No. 3, pp. 235–257, 1978.

(23) 影山和郎，岡村弘之：引張りと面内せん断を受ける無限小屈折き裂の弾性解析と最大エネルギ解放率破壊条件，日本機械学会論文集，Vol. 48, No. 430, A, pp. 783–790, 1982.

(24) Gao, H. and Chiu, C. : Slightly curved or kinked cracks anisotropic elastic solids, Int. J. Solid Structure, Vol. 29, pp. 947–972, 1992.

(25) Gol'dstein, R. V. and Salganik, R. L. : Brittle fracture of solids with arbitrary cracks, Int. J. Fract., Vol. 10, No. 4, pp. 507–523, 1974.

(26) Cotterell, B. and Rice, J. R. : Slightly curved or kinked cracks, Int. J. Fract., Vol. 16, No. 2, pp. 155–169, 1980.

(27) Karihaloo, B. L., Keer, L. M., Nemat-Nasser, S. and Oranratnachai, A. : Approximate description of crack kinking and curving, J. Appl. Mech., Vol. 48, pp.515–519, 1981.

(28) ASTM E399-78, Standard Test Methods for PLANE-STRAIN FRACTURE TOUGHNESS OF METALLIC MATERIALS, 1983.

(29) Srawley, J. E. : Wide range stress intensity factor expressions for ASTM E399 standard fracture toughness, Int. J. Fract. Mech., Vol. 12, pp. 475-476, 1976.

(30) ASTM E813-81 : Standard Test for J_{IC}, A MESURE OF FRACTURE TOUGHNESS, 1981.

(31) Clarke, G. A. and Landes, J. D. : Evaluation of J for the compact specimen, J. Testing and Evaluation, Vol. 7, No. 5, pp. 264-269, 1979.

(32) ISRM commission on testing methods, Co-ordinator Ouchterlony, F. : Suggested methods for determining the fracture toughness of rock, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. , Vol. 25, No. 2, pp. 71-96, 1988.

(33) Schmidt, R. A. : Fracture-toughness testing of limestone, Exp. Mech., Vol. 16, No. 5, pp. 161-167, 1976.

(34) Schmidt, R. A. and Lutz, T. J. : K_{IC} and J_{IC} of Westerly granite-Effects of thickness and in-plane dimension, ASTM STP 678, pp.166-182, 1979.

(35) Weisinger, R., Costin, L. S. and Lutz, T. J. : K_{IC} and J-resistance-curve measurements on Nevada tuff, Exp. Mech., Vol. 20, pp. 68-72, 1980

(36) 高橋秀明，橋田俊之，玉川欣治，湯田周二，鈴木正彦：ＡＥ法による花崗岩の三点曲げ破壊靭性試験法の提案，日本鉱業会誌, Vol. 100, pp. 17-21, 1984.

(37) 橋田俊之，高橋秀明：非線形破壊力学による岩石の破壊靭性評価，岩の力学国内シンポジウム論文集，Vol. 6, pp. 13-18, 1984.

(38) 佐野修，工藤洋三，古川浩平，中川浩二，水田義明：岩石の圧縮強度試験結果の再現性について，材料，Vol. 38, No. 426, pp. 228-234, 1989.

(39) Begley, J. A. and Landes, J. D. : The J integral as a fracture criterion, ASTM STP 514, pp. 1-20, 1972.

(40) 橋本堅一，工藤洋三，矢富盟祥，中川浩二：花崗岩の破壊靭性評価に関する検討，岩盤力学に関するシンポジウム論文集，Vol. 20, pp. 81-85, 1988.

(41) 工藤洋三，橋本堅一，佐野　修，中川浩二：花崗岩の力学的異方性と岩石組織欠陥の分布，土木学会論文集, No. 370/Ⅲ-5, pp. 189-198, 1986.

3　破壊力学パラメータの数値解析

3.1　緒言

破壊力学におけるき裂進展パラメータは特別なモデルを除いて，数値解析に頼らざるを得ない．これまでの多くの解析は線形弾性体に限られ，線形弾性体においてはエネルギ解放率と応力拡大係数は一意的な関係があるため，応力拡大係数については種々の方法で多くの解析が行われ，まとめられている[1) 2)]．逆にエネルギ解放率から応力拡大係数を求めることもめずらしくない．特にモデル形状の選択や載荷形態に柔軟性を有す有限要素法を用いる場合，他の半解析的手法に比べて，き裂近傍の解析精度が十分で無い場合が起こり得るため，き裂近傍の応力や変位の影響が少ないJ積分法や仮想き裂進展法等でエネルギ解放率を求めて，応力拡大係数に換算することが多い．この場合混合モードの場合，モードの分離なども考えられている．

この章ではまず，これまで解析された多くのモデルの応力拡大係数の解析方法をまとめた．これらについては詳しい解説専門書もいくらか出版されているが，その中から特に，Sihらによる著書[3)]および石田による著書[4)]を参考にした．そして最後に特に本研究と関わりのある有限要素法によるエネルギ解放率の解析についてまとめた．

ここで応力拡大係数とエネルギ解放率クライテリオンの関係について簡単に述べると，前述の様に線形弾性体では両者は弾性係数やポアソン比を介して一意的な関係にあるため，応力拡大係数を扱うことが多い．しかしエネルギ解放率は，ひずみエネルギが存在する物質である限り，非線形挙動を有する材料にも適用可能である．したがって，扱いそのものは応力拡大係数の方がより簡単であるが，破壊クライテリオンとして，エネルギ解放率の方がより幅広い適用性を有しており，これからの応用が期待される．

有限要素法とその他の数値解析法について比較すると，有限要素法の利点はまず，モデル形状，載荷系に対する柔軟性が挙げられる．メッシュの組み方によってほとんどの対象モデルに適用可能である．また部分的に要素の性質が変えられるため界面部材にも容易に変換できる他，弾塑性解析にも適用できる．これに対し，3.2で述べた他の数値解析法では弾塑性解析にはほとんど適用ができないし，ひとつのモデルに多くの労力を要し，他の

形状への対処などについてはかなり困難ではあるが，より高い解析精度を得ることができる．しかしながら，有限要素法による方法は解の精度を常に把握検証する必要があるが，複雑化する材料，境界形状について考えれば今後ますます，需要が増えるものと考えられる．

3.2 応力拡大係数の数値解析

3.2.1 等角写像およびその展開による方法

モードI，IIの場合を簡単に概説する[5]．写像関数 $z=\omega(\zeta)$ が与えられたとき，直応力の和は，式 (2.4) より

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=4Re[\phi'(\zeta)/\omega'(\zeta)] \tag{3.1}$$

となる．このとき，複素応力関数Kを次式により定義すると，

$$K=K_I-iK_{II} \tag{3.2}$$

き裂先端の座標 z_1 により，変数 $\rho=z-z_1$ を用いることにより，き裂先端近傍において直応力の和は次式により得られる．

$$\sigma_{11}+\sigma_{22}=Re\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\rho}}K\right). \tag{3.3}$$

これにより応力拡大係数は

$$K=K_I-iK_{II}=2\sqrt{2\pi}\lim_{z\to z_1}(z-z_1)^{1/2}\phi'(z). \tag{3.4}$$

写像関数を用いると

$$K=2\sqrt{2\pi}\lim_{\zeta\to\zeta_1}\{\omega(\zeta)-\omega(\zeta_1)\}^{1/2}\frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}. \tag{3.5}$$

長さ 2ℓ のき裂の単位円の写像に対しては

$$K=2\sqrt{\pi/\ell}\phi'(1) \tag{3.6}$$

が得られる．ゆえに，適当な $\phi(\zeta)$ の応力関数が見つかれば，K_I, K_{II} は実部，虚部の分離によって応力拡大係数は直接求められる．

例えば，この方法によって放射状き裂境界の円境界への写像[6)7)]や両側き裂のある長方形境界の単位円への写像[8)]などがき裂問題に応用されている．

一般的には，写像関数は簡単な形で表せない．しかし，この方法によると関数 $\omega(\zeta)$ を級数展開して多項式近似ないし，有理式近似を行えば，近似境界形状に対する精度の良い解が得られる特徴を持つ．

3.2.2 転位の連続分布を用いる方法

x_2軸に平行なBurgersベクトル*bをもつ転位が原点にある場合の応力分布は次式で与えられる[9)].

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{Nx_1(-x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}, \\ \sigma_{22} &= -\frac{Nx_1(x_1^2+3x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}, \\ \sigma_{12} &= \frac{Nx_2(-x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

ここで，bをBurgersベクトルの大きさとして，

$$N = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)}. \tag{3.8}$$

これらの転位を，き裂内部に適当な密度を定める方法によって種々の問題を解くことができる．すなわち，ここで挙げた刃状転位の連続分布によってモードI, IIの問題を扱うことができる．たとえば前章で扱った無限板中の単一き裂の一様引張問題については考える．

一般に，x_1軸上にならぶき裂の場合，き裂内部に分布させる刃状転位の密度を$bf(\xi)$とすると，点$(\xi,0)$における微小線要素$d\xi$にそって分布する転位が点$(x,0)$に及ぼす応力は式(3.7)により，

$$d\sigma_{12}=0, \quad d\sigma_{22} = N\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - x_1} \tag{3.9}$$

であるから，つぎの積分方程式が成り立つ．

$$N\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \sigma_0 = 0. \tag{3.10}$$

ここに，Lはすべてのき裂に対応するx_1軸上の区間の集合を表す. 特にこの場合$(-\ell,0)$，$(\ell,0)$に両端をもつ1個のき裂に相当するから，式(3.10)は

$$N\int_{-\ell}^{\ell} \frac{f(\xi)}{\xi - x_1}d\xi + \sigma_0 = 0 \tag{3.11}$$

となり，この積分方程式の解は次のようになる．

* 転位による位置の食い違いを閉じるために終点から始点まで引いたベクトル．転位論発展の初期に活躍したオランダのJ. Burgersにちなんで名付けられた．

$$f(\xi) = \frac{\sigma_0}{\pi^2 N\sqrt{\ell^2-\xi^2}}\int_{-\ell}^{\ell}\frac{\sqrt{\ell^2-x_1^2}}{x_1-\xi}dx_1 = -\frac{\sigma_0}{\pi N}\frac{\xi}{\sqrt{\ell^2-\xi^2}}. \tag{3.12}$$

これから $|x|>\ell, x_2=0$ における応力を求めると

$$\sigma_{22} = \frac{\sigma_0|x_1|}{\sqrt{x_1^2-\ell^2}}. \tag{3.13}$$

これと応力拡大係数の定義式より次の結果を得る．

$$K_I = \lim_{x_1\to\ell+}[\sqrt{2\pi(x_1-\ell)}\sigma_{22}] = \sigma_0\sqrt{\pi\ell}. \tag{3.14}$$

この手法は一直線上の2つのき裂をもつ無限板の引張[10)]や微小折れ曲がりき裂[11)12)]などに応用されている．

3.2.3 Laurent 展開法

特別な場合としてき裂を表現可能な楕円孔の応力集中問題の一般的な手法として開発された方法で，複素関数表示ができる平面問題，面外せん断問題，古典理論における板の曲げに適用することができる．境界条件を満たすような複素応力関数を定めれば一般的には問題を解くことが可能であるが，このとき多くの解法が問題ごとに，それぞれ特別な工夫を必要としたのに対し，この方法は複素応力関数を問題に関係なく同じ形のLaurent級数として表し，境界条件から展開係数を定めるという一貫した方法となっている．

解析の一般的な手順は次の通りである．

I. 変位や応力の一価性を利用して，複素応力関数を一般的なLaurent展開の形に仮定する．

II. 孔縁が自由になることから，上のLaurent展開の係数間に成り立つ関係式を解析に便利な形，すなわち，その負べき項の係数を正べき項の係数の一次式として表す形で与える．

III. 考える楕円孔の縁以外の境界条件からLaurent展開の係数間の他の関係を上と相反的な形で与える．すなわち，正べき項の係数を負べき項の係数で表す．

IV. 上記の操作で得られた関係式を連立方程式にして解いて未知係数を定める．この際，摂動法の利用により計算を簡単にすることもできる．

V. 以上のようにしてまとめた複素応力関数のLaurent展開表示を，閉じた形に変換する．とくに，き裂の場合はその先端特異性をもつ関数が得られ，応力拡大係数が求められる．

この方法では，特にき裂問題では任意き裂群をもつ板の解析に応用されている[13)]．

3.2.4 境界分割法

き裂以外の種々の境界，すなわち，外部境界をもつ一般の弾性体はすべての境界条件を完全に満足する解を得ることは不可能である．そこで最も容易な近似解法として，いわゆる境界分割法*（boundary collocation method, point matching method）が種々の形で用いられている．この方法は外部境界上に有限個の点（分点）を選び，これらの点で境界条件が満たされるように，応力関数に含まれる未知のパラメータを決定する方法である．境界分割法においては可能な限り，き裂縁の条件を完全に満たす関数を用い，き裂から遠い境界についてだけこの方法を適用することが望ましい．

境界条件は応力で与えられる場合と変位で与えられる場合がある．このうち後者は各分点における変位が与えられた変位に等しくなる条件を直接用いて，十分正確な結果が得られる．応力境界条件の場合は境界上の分点の応力が指定された境界応力と一致する条件を用いるのが最も直接的でこの方法も考えられる．しかしこの方法では，考えた分点以外の点での境界条件についてはなんら保証がなく，結果として境界に作用する応力の合力が，与えられた外力と，かなり異なってくる場合がある．したがって，この手法では解析後，分点以外の点における応力を吟味するなど，十分な注意が必要である．

このように応力条件に基づく方法は，弾性体全体としての力やモーメントのつり合い条件を満たしていない難点がある．この欠点を除くため，分点によって分割されてできている小区間ごとに，応力関数による応力の合力とモーメント与えられた外力によるそれらと等しくなるように応力関数のパラメータを定める方法が用いられる．

---

* 選点法ともよばれている．

この境界分割法の応用は多く基本的な問題[14)15)]から周期き裂群の解析[16)]など幅広い利用がある．

3.2.5 有限要素法

有限要素法は与えられたモデルを要素分割した後，用いた要素の形状関数を定め，変分原理などにより得られる要素剛性マトリクスからモデル全体の剛性マトリクス組み立てて，剛性方程式を解き，変位や応力を求める方法である．要素ごとの特性を変えられるため理論的には不均質材の解析に強い解法であり，汎用プログラムでもそのまま材料の性質の変化が表現できる．しかし，得られる変位や応力の精度に関しては他の解析法に比べて注意が必要である．例えば，き裂解析ではき裂先端の応力特異性を有する特異要素など工夫がされている．

応力拡大係数は通常，変位や応力により応力拡大係数を求めてき裂先端の位置に外挿する直接法が用いられるが，き裂近傍の応力や変位を用いるため他の方法より精度の面で劣ると考えられている．そのため，次節で議論するようなエネルギ解放率を求めて，応力拡大係数に換算する方法が一般的になっている．有限要素法による方法は精度の面で特に注意を要するが，モデルや境界条件の表現が容易であるため今後ますます，需要が増すものと思われる．

3.2.6 境界要素法

境界要素法による応力拡大係数の解析は結城らの一連の界面部材への成果[17)〜20)]により注目されるようになった．境界要素法弾性解析の基礎となる定式化された境界積分方程式は任意の境界上の点iについて

$$c_i \boldsymbol{u}_i + \int_\Gamma \boldsymbol{s}^* \cdot \boldsymbol{u} d\Gamma = \int_\Gamma \boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{s} d\Gamma + \int_A \boldsymbol{u}^* \cdot \boldsymbol{b} dA \tag{3.15}$$

で与えられる[21)]．ここで，$\boldsymbol{u}$，sは境界上の変位ベクトルおよび表面力ベクトル，c_iは形状の性状により決まる定数である．$\boldsymbol{s}^*, \boldsymbol{u}^*$は表面力，変位の基本解とよばれ，任意の点に集中荷重が作用するときの他の任意の点での表面力，変位を表す．2次元等方弾性解析で使用できる基本解としては無限板に対するKelvinの解，半無限板に対するMindlinの解，直線界面を有する異材に対するHetenyiの解が挙げられるが，通常はKelvinの解を用いることが多い．

境界要素法はモデルの境界を要素分割し，有限要素法と同様な離散化仮定を経て，次の離散化方程式を得て解析する方法である．

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{s}. \tag{3.16}$$

ここで$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{G}$は係数マトリクスである．また$\boldsymbol{u}$，sは全節点の変位ベクトル，表面力ベクトルを表す．境界要素法は有限要素法と同様，モデルを離散化する手法であるが基本解を用いるので一般的には精度がよい．

応力拡大係数を求める方法は有限要素法と同様，応力による外挿法および変位による外挿法が考えられるが，モードIの応力拡大係数K_IとモードIIの応力拡大係数K_{II}を分離して外挿する分離法と$\sqrt{K_I^2+K_{II}^2}$とK_I/K_{II}で外挿して求める複合法が用いられている．

境界要素法と同様な考え方で発展した方法に体積力法がある．体積力法は西谷らによって開発された手法であるが，考え方としては境界要素法の間接法と同様である．しかし扱い自体はかなり容易になっており，多くのモデルが解析され，解説書[22)]も出版されている．

3.3 エネルギ解放率の有限要素解析

ここでは超弾性体内を準静的に進展するき裂のエネルギ解放率を有限要素法を用いて解析する既存の手法について触れ，それらの長所，短所について説明を加える．なお，議論を簡単にするためすべて平面問題として扱う．

3.3.1 J積分法

Rice[23)]およびEshelby[24)]らによる経路独立であるJ積分は超弾性体においてエネルギ解放率$\mathcal{G}$を与える．したがって超弾性体でJ積分値を求めればエネルギ解放率を直接求めることができる．J積分は2章でも述べたが，**Fig.–3.1**に示すき裂の一端を囲む経路Γに対して次式で与えられる．

$$\mathrm{J} = \int_{\Gamma} (w\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n} - \boldsymbol{s}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\boldsymbol{e})ds \tag{3.17}$$

ここで$w, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}$はそれぞれ，ひずみエネルギ密度，応力ベクトル，変位ベクトルであり，$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}$はそれぞれ，き裂先端の直進する方向の単位ベクトル，Γ上

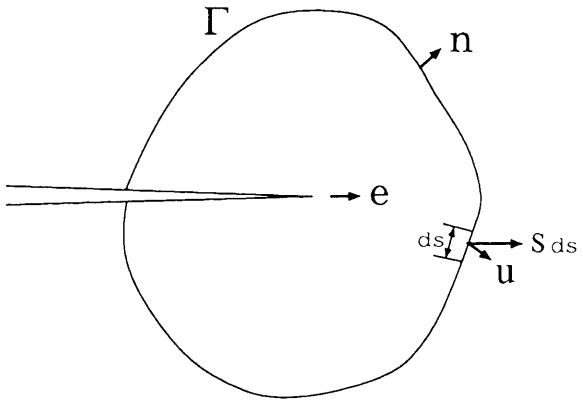


Fig.– 3.1 Integral path surrounding a crack tip.

の外向き単位法線ベクトルである．J 積分法はき裂先端周りに積分経路を設定して，式(3.17) を数値積分する方法[25)26)]である．積分経路すなわち数値積分点は有限要素の辺上に設ける場合が多いが，要素内に設定した Gauss の積分点を選ぶ場合もある．一般的には，き裂先端の応力勾配の大きいところは数値精度を考慮すれば，積分経路としては避けるべきである．この手法はエネルギ解放率を求める数値解析で最も頻繁に使用される方法である．J 積分法の有利な点としては，解析するモデルがき裂進展前のモデルのみでよいことや，積分経路独立性を利用して積分経路を複数個考えることにより解の検証ができることが挙げられる．経路独立性が示されても，それが理論解であるとはいえないが，逆に経路独立性が保たれていなければ，それが失われた部分は誤差を必ず含んでいることになる．したがって適当な閉経路を考えることにより，誤差の発生場所の検証などができる．このことが種々の経路独立積分が多く考案されている理由の一つでもある．しかし J 積分法は，原則的に，き裂が直進して進む（主き裂方向に進む）瞬間時のエネルギ解放率を与える．もし J 積分法でき裂の折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を得ようとすれば，数値誤差の大きい，折れ曲がりき裂先端の周りに積分経路を設けて，折れ曲がりき裂の長さを変えて複数のモデル解析したのち，それらの解を外挿して求める必要があるので，精度のよい解析は困難になる．

一方，J 積分を拡張して，動的な場合，かつ任意物質に対しても経路独立な T^* 積分[27)]や $\hat{J}$ 積分[28)]が考えられているが，本論文における超弾性体内を準

静的に進展する場合は両者ともJ積分と同型になるので，以下の議論はJ積分をもって代表する．

3.3.2 全エネルギ法

Irwin[29]によればエネルギ解放率はき裂が単位長さ（3次元的には単位面積）だけ増加する際に解放されるポテンシャルエネルギの変化率$\mathcal{G}$として定義されている．これは

$$\mathcal{G} = -\lim_{\delta\ell \to 0} \frac{\delta\Pi}{\delta\ell} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\ell} \tag{3.18}$$

で与えられる．ここでΠはポテンシャルエネルギでℓはき裂長さである．線形超弾性体においてはポテンシャルエネルギの変化$\delta\Pi$は変位拘束の場合，

$$\delta\Pi = \delta W. \tag{3.19}$$

また外力一定の場合は

$$\delta\Pi = -\delta W. \tag{3.20}$$

したがって，エネルギ解放率$\mathcal{G}$は，有限要素解析における1節点分のき裂長さの変化$\delta\ell$をもつ2つのモデルに対して次式で差分表示される．

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{G} &\approx -\frac{W(\ell+\delta\ell) - W(\ell)}{\delta\ell} (\text{変位一定}) \\ \mathcal{G} &\approx \frac{W(\ell+\delta\ell) - W(\ell)}{\delta\ell} (\text{外力一定}) \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

ここで$W(\ell+\delta\ell)$はエネルギ解放率を求めたいモデルに対して1節点解放して微小節点間隔$\delta\ell$進めたモデルのもつひずみエネルギで，$W(\ell)$はき裂進展前のモデルのもつひずみエネルギである．この式により評価するのが全エネルギ法である[30)31)]．なお式(3.21)は任意の非線形超弾性体についても有効であることは，E積分の定義式(2.24)または式(2.27)により容易に証明できる．

全エネルギ法はモデルを複数個解析する必要があるという不利な点を有すが，比較的粗いメッシュ分割でも高い精度が得られるという利点をもっている[32)]．また任意方向のき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を解析できる．しかし，境界条件が荷重一定または変位一定の場合に限られるうえに，応力勾配が著しく大きくなるモデルでは無視できない誤差を含むこともある．

3.3.3 仮想き裂進展法

仮想き裂進展法は剛性変化法とも呼ばれ，ひずみエネルギの変化にもとづく方法[33)~35)]であるので，全エネルギ法の一種として分類されることもある．全エネルギ法との大きな違いは，2つのモデルの違いを1節点分のき裂の進展としないで，き裂の先端を微小仮想量移動させる点である．そしてこの操作によって変化する剛性はき裂先端を節点の一部にもつ要素だけであり，剛性の変化率を用いることによりエネルギ解放率が計算できる．その概念をマトリクス的に式で表すと外力一定の場合は

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \ell} = -\frac{1}{2}\{u\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \ell}\{u\} \tag{3.22}$$

ここで$\{u\}, [K], \{f\}$はそれぞれ変位ベクトル，剛性マトリクス，荷重ベクトルである．式中の偏微分を差分型で考えるか，微分型で考えるかで計算時間が大きく変わってくるが，全エネルギ法に比較すれば解析モデルが1つになるので有利である．欠点としては，差分型の場合，結果がき裂の仮想移動量に敏感であるため，どの範囲で有効であるかを常に吟味しなければならないことや，き裂の移動を主き裂と同方向にとらないと前の状態からの新しいき裂面が得られないため，J積分法と同様，厳密にはき裂が直進する場合のエネルギ解放率しか得られない点が挙げられる．Hellen [34)]はき裂先端が含まれる要素内のき裂を仮想剛体回転させることにより，き裂が折れ曲がる場合を考察し，限られたき裂の方向に対しては信頼性のあるエネルギ解放率を与えるとしている．しかし，この方法では，負のエネルギ解放率になるき裂折れ曲がり角があるなど，その適用性には非常な注意を要する．

3.3.4 E 積分法

E 積分法とは式(2.27) あるいは式 (2.34) をJ積分と同じように経路積分する方法[36)~39)]である．式(2.27) で積分経路を物体境界にとり外力一定境界，または変位一定境界の場合は前に述べた全エネルギ法と等価である．したがってE積分法は種々の複雑な境界上で外力と変位が独立でないような（一般的な）境界条件の場合における経路独立積分の形に一般化したものであるといえる．以上のことによりE積分は複数のモデルを解析するという不利な点を有すが，経路独立積分であるため前述した意味での解の検証が可

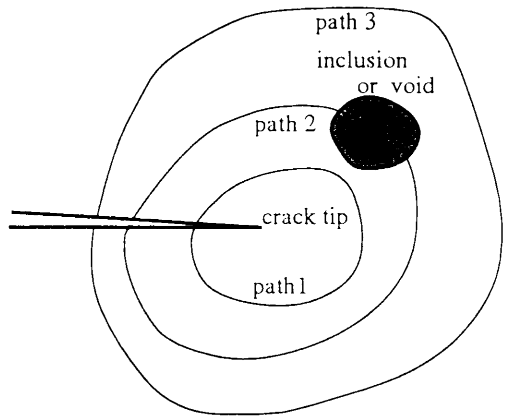


Fig.– 3.2 Integral paths containing or across an inclusion or a void.

能で，複雑な形状，載荷系をもつモデルでも経路独立性により誤差の少ない経路の模索ができ全エネルギ法に比べて解析における柔軟性を有す.

また，き裂先端近傍の介在物あるいは空隙との界面上に応力ないしひずみエネルギの不連続性をもつ場合，J 積分では積分経路にそれらの不連続面が含まれると経路独立性が失われ，エネルギ解放率を求めるためには不連続面での積分補正が必要になる[40]. 一方，E 積分はそのような不連続面を横切っても経路独立性は保たれ，何ら補正することなくエネルギ解放率を求めることができる．例えば，**Fig.–3.2**中の経路1,2,3 の場合のJ 値はすべて異なり，経路1のみがエネルギ解放率となるが，E値は理論上すべて同一でエネルギ解放率を与える．なお，4章でその数値解析例も示す.

3.4 結言

応力拡大係数とエネルギ解放率の解析について，応力拡大係数については全般的な方法，エネルギ解放率については，特に有限要素法による方法に対して取り上げた．応力拡大係数の解析は多くの方法で精度よく求めることができるがモデルや境界条件に対する柔軟性に欠け，モデルが比較的単純な場合に限られてくる．一方，有限要素法などの数値解析を用いて直接応力拡大係数を求めようとする場合，き裂先端近傍のいくつかの点（物体点）の変位，あるいは応力を求めて，き裂先端に外挿する変位法や応力法が用いられる．しかし，き裂先端付近に介在物あるいは空隙を有すると，

ベースとなる材料との間に応力の不連続性を生じ，それらを避けた位置での外挿操作が必要になるうえ，き裂と介在物あるいは空隙の干渉によっても誤差が大きくなるので解析が困難になる．したがって，き裂先端付近の応力場を用いないような方法，パラメータを選択することが望ましい．

エネルギ解放率はき裂先端の応力場を用いなくても解析できるため，このような問題には有利である．有限要素法を用いてのエネルギ解放率の解析は前述のように，J積分法，全エネルギ法，仮想き裂進展法などが挙げられる．このうちJ積分法と仮想き裂進展法は原則的にき裂が直進する場合のエネルギ解放率を求める方法である．これに対して，全エネルギ法はき裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギ解放率の解析が可能であるので，き裂の進展した後の状態を考慮して，最大エネルギ解放率破壊条件により，き裂の折れ曲がり方向の考察が可能である．

破壊の進行方向を議論するとき，き裂進展前の混合モード状態での応力拡大係数により考察されることが多い．そのためモード分離の研究も数多い[26)35)41)]．しかし，物質が非線形になると，従来の応力拡大係数による議論は困難となり，今のところ，非線形物質でも有力なパラメータの１つとして考えられているのがエネルギ解放率である．

以上のことを考慮し，本研究では全エネルギ法の経路独立積分型への一般化された方法と考えられるE積分法の有限要素解析への適用性を検討するため，線形物質ではあるが変形挙動が比較的複雑な材料，モデルについてのネネルギ解放率の数値解析をおこなった．そして最後に非線形物質への適用の検討のためE積分法の弾塑性体への応用を試みた．

参　考　文　献

(1) Rooke, D. P. and Cartwright, D. J. : Stress Intensity Factors, London Her Majesty's Stationery Office, 1974.

(2) editor-in-chief Murakami, Y : Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, Vol. 1&2, 1987, Vol. 3, 1992.

(3) Sih, G. C., editor : Methods and Analysis and Solutions of Crack Problems, Mech. of Fract. 1, Noordhoff Intern. Pub., Leyden, 1973.

(4) 石田　誠：き裂の弾性解析と応力拡大係数，倍風館，1976.

(5) Paris, P. C. and Sih, G. C. : Stress Analysis fo Cracks, Fracture Toughness Testing and its Applications, ASTM STP 381, pp.30–83, 1965.

(6) 北川英夫，結城良治：二次元応力状態における分岐き裂の応力拡大係数，日本機械学会論文集，Vol. 41, No. 346, pp. 1641–1649, 1975.

(7) 北川英夫，結城良治：有限板中の任意形状き裂の等角写像による解析（第1報，解析法の構成とその適用可能性），日本機械学会論文集，Vol. 43, No. 376, pp. 4354–4362, 1977.

(8) Bowie, O. L. : Rectangular Tensile Sheet with Symmetric Edge Cracks, J. Appl. Mech., Vol. 31, pp.208–212, 1964.

(9) たとえば，石田　誠：き裂の弾性解析と応力拡大係数，倍風館，1976.

(10) Yokobori, T, Ohashi, M. and Ichikawa, M. : The Interaction of Two Collinear Asymmetrical Elastic Cracks, Reports of The Research Institute for Strength and Fracture of Materials, Tohoku University, Vol. 1, No. 2, pp. 33–39,1965.

(11) Lo, K. K. : Analysis of Branched Cracks , J. Appl. Mech., Vol. 45, pp.797–802, 1978.

(12) Hayashi, K. and Nemat–Nasser, S. : Energy release rate and crack kinking, Int. J. Solid Structure, Vol. 17, pp. 107–114, 1980.

(13) 石田　誠：任意の直線き裂群を持つ板における応力拡大係数の解析，日本機械学会論文集，Vol. 35, No. 277, pp. 1815–1822, 1969.

(14) Gross, B. and Srawley, J. E. : Stress–Intensity Factors for a Single–Edge–Notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function, NASA, Technical Note, D–2396, 1964.

(15) Gross, B. and Srawley, J. E. : Stress–Intensity Factors for a Single–Edge–Notch Specimen in Bending or Combined Bending and Tension by Boundary Collocation of a Stress Function, NASA, Technical Note, D–2603, 1965.

(16) Ishida, M., Ushijima, N. and Kishine, N. : Rectangular Plates, Strips and Wide Plates Containing Interal Cracks under Varios Boundary Condition, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., Vol. 47, No. 413, pp.27–35, 1981.

(17) 結城良治，Cho, S. B，松本敏郎，木須博行：Hetenyiの基本解を用いた効率的境界要素弾性解析，日本機械学会論文集，Vol. 53, No. 492, A, pp. 1581–1589, 1987.

(18) 結城良治，Cho, S. B.：異材界面き裂の応力拡大係数の境界要素解析，日本機械学会論文集，Vol. 55, No. 510, A, pp. 340–347, 1989.

(19) 結城良治，許　金泉：パーソナルコンピュータによる異材接合継手・界面き裂の境界要素弾性解析，日本機械学会論文集，Vol. 56, No. 527, A, pp. 1517–1523, 1990.

(20) 結城良治，許　金泉：界面き裂の力学, 生産研究，Vol. 42, No. 8, pp. 508–514, 1990.

(21) C. A.ブレビア, S. ウォーカー共著，神谷紀生，田中正隆，田中喜久昭共訳：境界要素法の基礎と応用，培風館，1981.

(22) 西谷弘信，陳　玳珩：体積力法，培風館、1987.

(23) Rice, J. R. : A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. J. Appl. Mech., Vol. 35, pp. 376–386, 1968.

(24) Eshelby, J. D. : The continuum theory of lattice defect, Vol. III, pp. 79–144, Academic Press, New York, 1956.

(25) 三好俊郎：非線形破壊力学と有限要素法，日本機械学会誌，Vol. 79, No. 691, pp. 60–66, 1976.

(26) 石川晴雄：J積分による応力拡大係数の有限要素解析，日本機械学会論文集，Vol. 46, No. 401, A, pp. 67–76, 1980.

(27) Atluri, S. N., Nishioka, T. and Nakagaki, M. : Incremental path-independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechnics, Eng. Fract. Mech., Vol. 20, No. 2, pp. 209–244, 1984.

(28) 岸本喜久雄，青木繁，坂田勝：き裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータについて，日本機械学会論文集，Vol. 46, No. 410, A, pp. 1049–1061, 1980.

(29) Irwin, G. R. : Analysis of stress and strain near the end of crack traversing a plate, J. Appl. Mech., Vol. 24, pp. 361–364, 1957.

(30) Watwood Jr., V. B. : The finite element method for prediction of crack behavior, Nuclear Engng. and Design, Vol. 11, pp. 323–332, 1969.

(31) Li, R. and Chudnovsky, A. : Energy analysis of crack interaction with an elastic inclusion, Int. J. Fracture, Vol. 63, pp. 247–261, 1993.

(32) 白鳥正樹，三好俊郎，松下久雄：数値破壊力学，実教出版，pp. 66, 1980.

(33) Parks, D. M. : A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors, Int. J. of Fracture, Vol. 10, No. 4, pp. 487–501, 1974.

(34) Hellen, T. K. : On the method of virtual crack extentions, Int. J. Num. Methods of Engng., Vol. 9, pp. 187–207, 1975.

(35) 石川晴雄，中野禅，結城良治，鄭南龍：要素剛性マトリックスの微分を用いた仮想き裂進展法の効率化，日本機械学会論文集，Vol. 55, No. 512, A, pp. 937–941, 1989.

(36) 橋本堅一，矢富盟祥，石田啓：E積分によるき裂折れ曲がり時におけるエネルギ解放率の数値解析，破壊力学シンポジウム論文集，Vol. 7, pp. 280–284, 1993.

(37) Yatomi, C. , Hashimoto, K. and Ishida, H. : Finite element analysis of the energy release rate for a kinked crack using the E-integral, Lecture Note in Num. Appl. Anal., Vol. 13, pp. 61–74, Kinokuniya, 1994.

(38) 橋本堅一，矢富盟祥，石田　啓：き裂先端付近に介在物あるいは空隙がある場合の E 積分によるエネルギ解放率の解析，構造工学論文集，Vol. 41A, pp. 499–508, 1995.

(39) 橋本堅一，矢富盟祥，石田　啓：E 積分による異方弾性体内のき裂折れ曲がり時におけるエネルギ解放率の数値解析，土木学会論文集，No. 513, I-31, pp. 17–25, 1995.

(40) 西岡俊久，小林豊，J. S. Epstein：非均質弾塑性破壊試験片の変形挙動有限要素シミュレーション，日本機械学会論文集，Vol. 59, No. 561, pp. 1319–1326, 1993.

(41) Ishikawa, H. : A finite element analysis of stress intensity factor for combined tensile and shear loading by only a virtual crack extension, Int. J. Fracture, Vol. 16, pp. R243–R246, 1980.

4　E 積分の有限要素解析への適用

4.1　緒言

E 積分の有利な点や破壊クライテリオン，さらには用いる破壊靭性の評価について述べてきたが，材料の破壊を予測したりシミュレーションを行うには，設定したモデル，材料に対する解析が必要である．そこで本章では本論文の中心的な内容となる E 積分の有限要素解析への適用例について詳述する．まず，本研究でモデルに対して用いる解析方法，および解析モデルについての妥当性を検証するため，E 積分の定義式の有限要素法で数値解析を行うときの扱い，モデルのメッシュ分割，他の方法との比較等について解析精度に関する検討を行う．解析モデルとしては，応力拡大係数や他の有限要素解析を用いた手法では解析が困難なモードⅠとモードⅡの混合モードになる場合のモデルおよびき裂近傍に界面や空隙などの応力ないしひずみの不連続面を有する場合のモデルについて検証を行った．前者の混合モードとなるようなモデル，材料としてはき裂面に対して載荷が斜向する場合，介在物あるいは部材界面がき裂面に対して非対称に存在するため起こる場合，および異方性材料の場合を扱った．後者の応力ないしひずみの不連続面をき裂近傍に有するモデルについては部材界面，介在物，空隙との干渉を有する場合を扱った．各解析例において基本的に，これまでに理論解ないし半理論解がある比較的単純なモデルを最初に扱い，結果を比較，検討した後，理論解のない，より複雑なモデルへの適用を考察した．また混合モードとなる場合は複数のき裂折れ曲がり角における折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を求めて最大エネルギ解放率の起こる方向を予測している．最後に，非線形物質の場合における E 積分法の検証を行うため，3点曲げ破壊靭性供試体モデルの増分理論を用いた弾塑性解析を行った．

ほとんどの解析は一定ひずみ有限要素を用いているが，8節点アイソパラメトリック有限要素およびき裂近傍の特異要素を用いた場合の積分経路の取り方，き裂進展長さ，さらには微分項扱いなどについて最後に検討を行っている．なお，有限要素法に用いる連立一次方程式の解法には消去法，および反復法それぞれについて数多くあるが，本研究ではLU分解の特殊な場合と考えられる剛性マトリクスが対称になる点を利用した修正コレスキー法とスカイライン法を併用した解法[1]をすべての解析に用いた．

4.2 解析手法と精度

有限要素には取扱いの最も容易な三角形一定ひずみ要素を用いた．E 積分による方法は全エネルギ法を経路独立積分に拡張した方法であるので全エネルギ法による適用の例[2)]から判断すると一定ひずみ要素でも比較的粗いメッシュの組み方で高い精度をもった結果が期待される．線形弾性体の場合，E 積分の表示式は前述のように

$$E = \int_\Gamma (\frac{1}{2} \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \ell} - \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \ell} \cdot \boldsymbol{u}) d\Gamma \tag{4.1}$$

で表された．ここでは式中の微分項を2点差分する方法と3点差分する方法の検討を行った．式 (4.1) を数値解析のための2点差分式に書き直すと

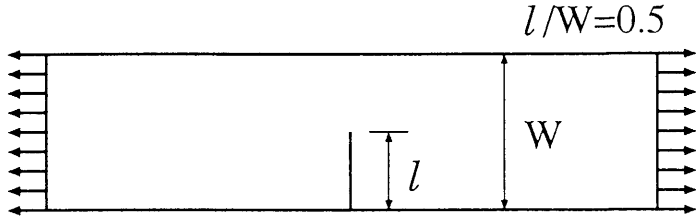
$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \boldsymbol{s}_i(\ell) \cdot \frac{\boldsymbol{u}_i(\ell + \Delta\ell) - \boldsymbol{u}_i(\ell)}{\Delta\ell} - \frac{\boldsymbol{s}_i(\ell + \Delta\ell) - \boldsymbol{s}_i(\ell)}{\Delta\ell} \cdot \boldsymbol{u}_i(\ell) \right\} \Delta\Gamma. \tag{4.2}$$

同様に3点差分表示にすると

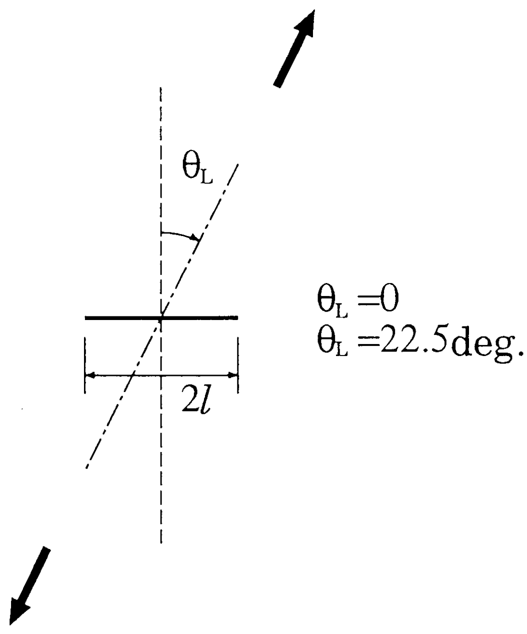
$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Bigg\{ & \boldsymbol{s}_i(\ell) \cdot \frac{-3\boldsymbol{u}(\ell) + 4\boldsymbol{u}(\ell + \Delta\ell) - \boldsymbol{u}(\ell + 2\Delta\ell)}{2\Delta\ell} \\ & - \frac{-3\boldsymbol{s}(\ell) + 4\boldsymbol{s}(\ell + \Delta\ell) - \boldsymbol{s}(\ell + 2\Delta\ell)}{2\Delta\ell} \cdot \boldsymbol{u}_i(\ell) \Bigg\} \Delta\Gamma. \end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで積分経路は要素辺に設定するため経路の積分点は要素中央となる．したがって各々式においてnは経路における要素辺の数，$\boldsymbol{s}_i$は各要素辺における表面応力ベクトル，$\Delta\Gamma$は各要素辺の長さ，$\boldsymbol{u}_i$は各要素辺上における変位ベクトルになる．そして$\Delta\ell$は基本モデル（解析しようとする対象となるモデル）とき裂進展モデルのき裂長さの差を表している．また(ℓ)および$(\ell + \Delta\ell)$は，それぞれ基本モデルとき裂進展モデルの諸量を表している．3点差分による方法ではき裂進展モデルとして基本モデルからき裂を$\Delta\ell$進めたモデルおよび$2\Delta\ell$進めたモデルの2種類扱う必要がある．したがって2点差分による方法では合計2種類のモデルを，また3点差分による方法では合計3種類のモデルを扱うことになる．

E 積分の手法における精度の検討に扱ったモデルは2種類で片側き裂の帯板一様引張モデルと単一き裂の無限板一様引張モデルである．その概略



(a) a single edge cracked plate subjected to tension model



(b) a single crack model subjected to tension

Fig.– 4.1 Model for a consideration of the analytical method in this study.

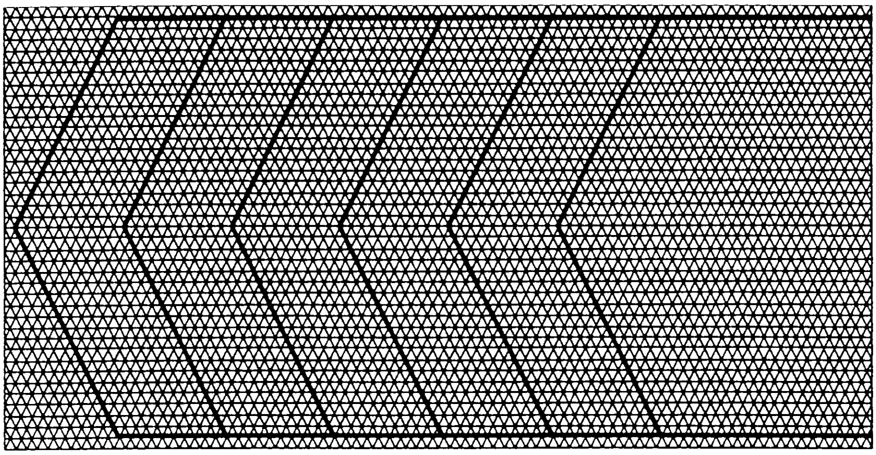


Fig.– 4.2 Basic finite element mesh for a single edge cracked plate .

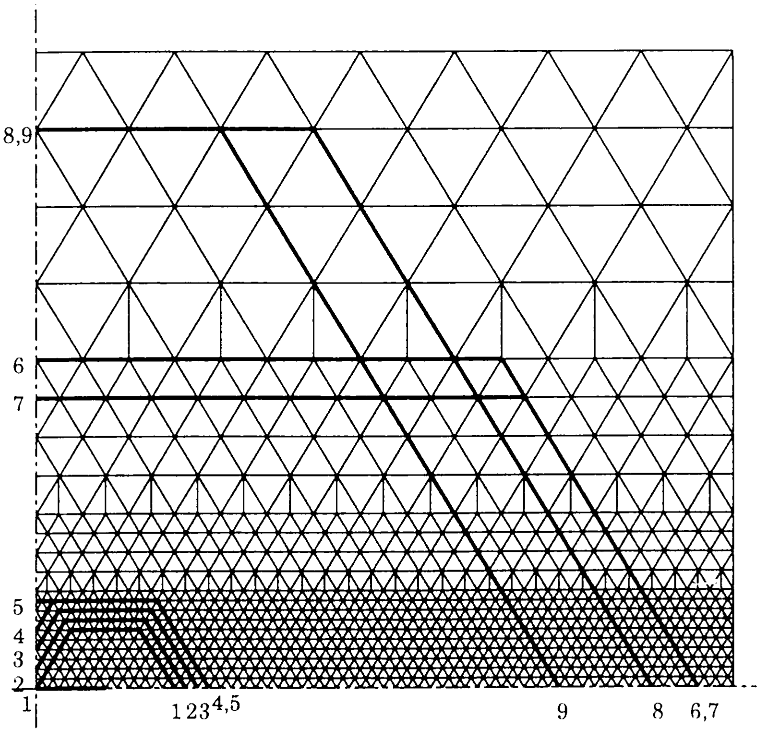
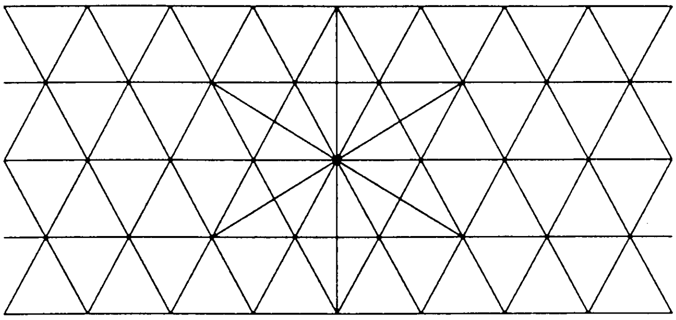
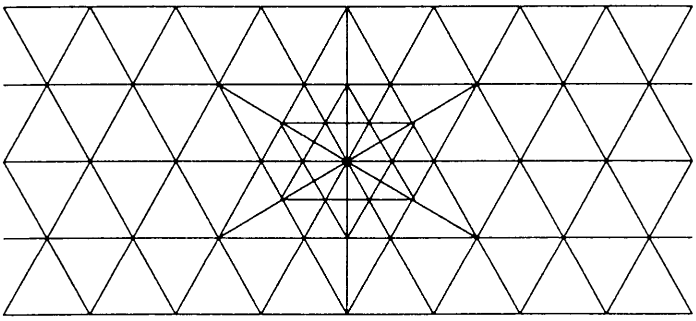


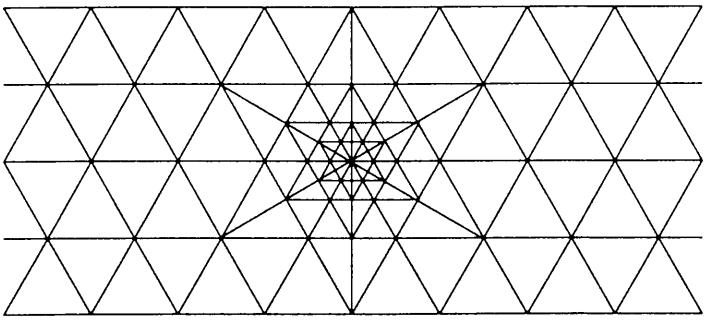
Fig.– 4.3 Finete element mesh for the model with a single crack subjected to the remote tension.



(a) nomal mesh tip model



(b) small mesh tip model



(c) fine mesh tip model

Fig.– 4.4 Finete element meshs near the crack tip for a single cracked model subjected to the tension.

をFig.–4.1に示す. Fig.–4.1(b)に示すように無限板一様引張モデルの場合は載荷がき裂面に対して垂直な場合（モードI）の他，き裂面に対して斜向した場合も解析したが，いずれもき裂が直進した場合のみを考えた．これに対する有限要素モデルは帯板一様引張モデルについては基本的なメッシュ分割モデル（basic mesh model）を**Fig.–4.2**に示す. モデルはき裂面に対して対称であるため1/2領域を解析するものとし，き裂の進展は対称面の拘束を解除する方法で行った．図には用いる積分経路が太線で示してある．また，有限要素メッシュ分割法および，き裂進展長さの検討のため，基本メッシュモデルの要素4個分を1要素とする粗メッシュモデル（coarse mesh model），基本メッシュモデルの1要素をさらに4つの相似三角形要素に分割する細メッシュモデル（fine mesh model）の3種類を用いた．各々，き裂進展長さと初期き裂の比は0.1，0.05，0.025である．一方，無限板を近似したモデルの有限要素メッシュを**Fig.–4.3**に示す. 図には1/4領域のみ示しているが解析は全領域とし，き裂の進展は節点を離すことにより実現している．無限板近似モデルではき裂進展長さおよびメッシュ分割による結果への影響を検討するためき裂先端周辺を**Fig.–4.4**に示すように3種類の分割を試みた．これらのモデルのき裂進展長さと初期き裂の比は0.083，0.042，0.021であった．

本節では，解析法を比較検証するため，E積分の他に，同じ積分経路を用いたJ積分（式(3.17)），載荷節点力と載荷点変位による全エネルギ法（式(2.38)を線形弾性体として扱い，さらに差分化する.），ひずみエネルギ（式(3.21)の第2式）による全エネルギ法も同時に解析した．**Table– 4.1**に片側き裂帯板引張モデルの解析結果を示す. 解析結果は境界分割法により得られた級数解[3)]で除して正規化している．また解析は単精度計算と倍精度計算で行い，表中，級数解に対して3%以上の精度を持つものは*で印を施している．E積分とJ積分の結果はいちばん外側の積分経路による評価値でまとめているが，各々経路でE積分もJ積分もほとんど同じ値が得られた．解析における経路の独立性についてはそれぞれの適用例で触れる．

Table– 4.1からわかるように粗メッシュモデルではすべての解析において大きな誤差を持つことがわかる．しかし基本メッシュモデルではかなりの改善がみられE積分，全エネルギ法の2点差分法では満足のいく結果が得られている．本来，3点差分法の方が精度の高い近似を与える評価であるが，一定ひずみ有限要素の比較的粗いメッシュ分割を用いる場合，数値誤差によるためと思われるが，逆に精度を下げる結果となっている．このことはき

Table– 4.1 Analytical results for a single edge cracked plate subjected to tension.

coarse mesh model	E-integral	2 point dif.	single pre.	1.03773
			double pre.	1.03826
		3 point dif.	single pre.	0.70147
			double pre.	0.70126
	strain energy	2 point dif.	single pre.	1.03335
			double pre.	1.03547
		3 point dif.	single pre.	0.69787
			double pre.	0.69892
	load and displacement	2 point dif.	single pre.	1.03441
			double pre.	1.03547
		3 point dif.	single pre.	0.69840
			double pre.	0.69892
	J-integral		single pre.	0.86541
			double pre.	0.86608
basic mesh model	E-integral	2 point dif.	single pre.	0.97805*
			double pre.	1.00059*
		3 point dif.	single pre.	0.82524
			double pre.	0.84056
	strain energy	2 point dif.	single pre.	0.95489
			double pre.	1.00088*
		3 point dif.	single pre.	0.80791
			double pre.	0.84259
	load and displacement	2 point dif.	single pre.	0.97759*
			double pre.	1.00088*
		3 point dif.	single pre.	0.82506
			double pre.	0.84259
	J-integral		single pre.	0.91082
			double pre.	0.93044
fine mesh model	E-integral	2 point dif.	single pre.	0.84132
			double pre.	0.98505*
		3 point dif.	single pre.	0.77257
			double pre.	0.89648
	strain energy	2 point dif.	single pre.	0.72295
			double pre.	0.98487*
		3 point dif.	single pre.	0.67182
			double pre.	0.89630
	load and displacement	2 point dif.	single pre.	0.84269
			double pre.	0.98487*
		3 point dif.	single pre.	0.77493
			double pre.	0.89630
	J-integral		single pre.	0.83269
			double pre.	0.96411

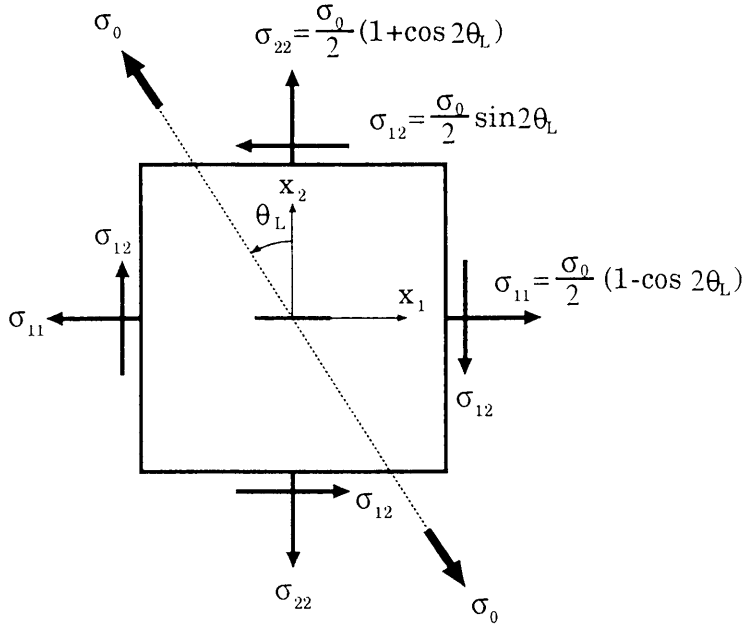


Fig.– 4.5 Combined loading in the boundary of finite element model for the inclined tension.

裂先端近傍のメッシュを細かくすると精度は向上していくことから推察できる．またJ積分では基本メッシュモデルでも7%程度の誤差を持ち，E積分や全エネルギ法に比べ精度が良くない．このことはE積分法や全エネルギ法はモデルを複数解析することにより数値解析上の誤差が小さくなるためと思われる．

細メッシュモデルでは，倍精度計算でE積分法と全エネルギ法による評価が良い精度を維持するが単精度計算では基本メッシュモデルより大きな誤差を示した．J積分については倍精度計算することにより3.5%の誤差にまで精度の向上が見られた．以上のことから判断すると，E積分により帯板の引張モデルを解析する場合，基本メッシュモデルで倍精度計算を行えば十分な精度をもつ結果が得られることになり，今後の解析にあたっては基本メッシュモデルを倍精度計算で行うことにする．

Table– 4.2に単一き裂の無限板一様引張モデルの解析結果を**Fig.– 4.4**(a)のき裂近傍の正三角形有限要素をき裂隣接要素だけ1/2に分割したモデル(nomal mesh tip model，き裂先端基本メッシュモデル）について示す．ここでき裂面に垂直な方向から22.5度傾いた斜向荷重の解析も行っているが，これについてはモデル境界に**Fig.–4.5**のような複合応力を載荷して実現している．

Table– 4.2 Analytical results of a single crack model subjected to the remote tension using normal mesh for the crack tip .

normal mesh tip model	E-integral	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.99751*
				double pre.	0.99804*
			3 point dif.	single pre.	0.95128
				double pre.	0.96257
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.99873*
				double pre.	0.99880*
			3 point dif.	single pre.	0.96002
				double pre.	0.96016
	strain energy	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.99608*
				double pre.	0.99691*
			3 point dif.	single pre.	0.94973
				double pre.	0.95098
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.99845*
				double pre.	0.99789*
			3 point dif.	single pre.	0.95995
				double pre.	0.95954
	load and disp.	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.99679*
				double pre.	0.99691*
			3 point dif.	single pre.	0.95098
				double pre.	0.95098
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.99782*
				double pre.	0.99789*
			3 point dif.	single pre.	0.95947
				double pre.	0.95954

また結果は厳密解[4)]で除して無次元化している．表より3点差分法による評価は若干精度を下げる結果となっているが全般的に良い精度で解析が行われている．Table– 4.3には同じモデルのき裂先端近傍をさらに小さく要素分割して（Fig.–4.4(b) 参照）解析した結果を示している．このモデルでは精度をやや落とす結果となっているが，値に大きな変化がない．き裂先端近傍の要素分割をFig.–4.4 (c) のように非常に小さくして解析した結果をTable– 4.4 に示す. このモデルではき裂先端の応力集中部分を非常に小さく要素分割を行ったにも関わらず, 精度を下げる結果となった．このことはモデルに用いた要素辺長の差が著しく大きくなったためと考えられる．以上のことから，単一き裂の無限板一様引張モデルでは最初に扱ったFig.–4.4(a) のき裂先端の要素分割で十分であるといえる．

2 種類のモデルの解析結果から判断すると，三角形一定ひずみ要素を用

Table– 4.3 Analytical result of a single crack model subjected to the remote tension using small mesh for the crack tip .

small mesh tip model	E-integral	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.97190*
				double pre.	0.97243*
			3 point dif.	single pre.	0.95300
				double pre.	0.95366
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.97527*
				double pre.	0.99748*
			3 point dif.	single pre.	0.96573
				double pre.	1.00980*
	strain energy	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.97023*
				double pre.	0.96887
			3 point dif.	single pre.	0.96288
				double pre.	0.95015
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.97158*
				double pre.	0.97179*
			3 point dif.	single pre.	0.96246
				double pre.	0.95954
	load and disp.	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.96881
				double pre.	0.96887
			3 point dif.	single pre.	0.95009
				double pre.	0.95015
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.97207*
				double pre.	0.97179*
			3 point dif.	single pre.	0.96288
				double pre.	0.96246

いた本解析法を用いる限りE積分や全エネルギ法の表現式に存在する微分項を３点差分近似までする意味はあまりないと結論付けることができる．また全エネルギ法の解析結果がE積分法による解析結果と非常に近い値をとることから全エネルギ法は積分経路をモデル境界にとったE積分の特別な場合であることが数値解析的に例証された．

最後に，非線形材料への応用を考えて，線形弾性体の場合のみ有効な式(2.34)を評価するのではなく，式(2.27)のE積分の定義式を直接評価する解析を行った．非線形材料に適用可能なE積分の表示式は積分経路上の表面力ベクトル，および変位ベクトルをそれぞれs，uとして

$$E(\ell,\alpha)=\int_{\Gamma}\int_{0}^{\alpha}\left(\frac{\partial s}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\ell}-\frac{\partial s}{\partial\ell}\cdot\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)d\beta d\Gamma \tag{4.4}$$

Table– 4.4 Analytical result of a single crack model subjected to the remote tension using fine mesh for the crack tip .

fine mesh tip model	E-integral	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.94938
				double pre	0.94902
			3 point dif.	single pre.	-
				double pre	-
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.95355
				double pre	0.95536
			3 point dif.	single pre.	-
				double pre	-
	strain energy	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.95022
				double pre	0.94647
			3 point dif.	single pre.	-
				double pre	-
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.94798
				double pre	0.95007
			3 point dif.	single pre.	-
				double pre	-
	load and disp.	0 deg.	2 point dif.	single pre.	0.94676
				double pre	0.94647
			3 point dif.	single pre.	-
				double pre	-
		22.5 deg.	2 point dif.	single pre.	0.95007
				double pre	0.95007
			3 point dif.	single pre.	-
				double pre	-

で表される．ここでℓはき裂長さ，βはℓと独立な時間とともに単調増加するパラメータで荷重であったり，境界変位であったりするが，今回は，与えられた荷重までを線形変化する荷重パラメータとして考え，指定した数の積分区間に分割することにより精度の検討に用いた．この式のき裂長さに関する微分については2点差分すると定ひずみ三角形有限要素解析のための表示として，基準とする時間ステージに対して，

$$E=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\{s_{i,j+1}(\ell)-s_{i,j}(\ell)\}\cdot\frac{\{u_{i,j}(\ell+\Delta\ell)-u_{i,j}(\ell)\}}{\Delta\ell}-\frac{\{s_{i,j}(\ell+\Delta\ell)-s_{i,j}(\ell)\}}{\Delta\ell}\cdot\{u_{i,j+1}(\ell)-u_{i,j}(\ell)\}\right]d\Gamma \tag{4.5}$$

Table– 4.5 Analytical results of the single cracked plate model subjected to the tension by using the E–integral formula for the nonlinear materials .

load step	trapezoidal	Simpson
1	0.97869*	-
2	0.97869*	0.97869*
100	0.97875*	0.97874*
200	0.97913*	0.97893*

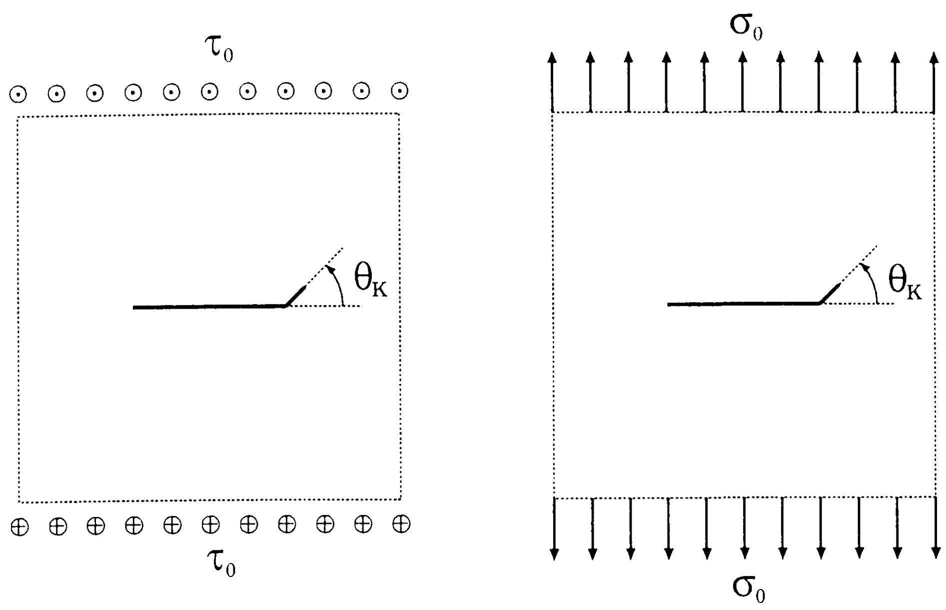
linear-0.97805*

$$E = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\{s_{i,j+1}(\ell) - s_{i,j}(\ell)\} \cdot \frac{\{\boldsymbol{u}_{i,j+1}(\ell+\Delta\ell) - \boldsymbol{u}_{i,j+1}(\ell)\}}{\Delta\ell} - \frac{\{s_{i,j+1}(\ell+\Delta\ell) - s_{i,j+1}(\ell)\}}{\Delta\ell} \cdot \{\boldsymbol{u}_{i,j+1}(\ell) - \boldsymbol{u}_{i,j}(\ell)\}\right] d\Gamma \tag{4.6}$$

の2式を考え両者の平均をE積分の値とする．ここでは，mが積分経路上の要素辺数，nが時間ステージ数，sは各要素辺における表面応力ベクトル，$d\Gamma$は各要素辺長，$\boldsymbol{u}$は各要素辺上における変位ベクトル，そして$\Delta\ell$は対象とするモデルとき裂進展モデルのき裂長さの差である．また変数$\ell+\Delta\ell$とℓはそれぞれき裂進展モデルと対象とするモデルを表している．

荷重の積分については台形法則とシンプソン法則，両方で解析するものとし，積分点は1,2,100,200の4種類とした．ただしシンプソン法則の場合は2点以上の積分点が必要である．解析モデルは前出の片側き裂の一様引張帯板モデルの基本メッシュモデルとした．

解析結果を**Table– 4.5**に示す. 結果的には積分の方法，荷重積分点の数に関わらず, 線形弾性体のための式を用いた結果とほぼ一致している．このことより荷重に対する積分をほとんど誤差なく行うことができ，適当な材料の構成関係を与えることにより非線形材料の解析も十分な精度で行えることがわかる．



(a) Anti-plane shear model　　(b) Plane stress model

Fig.– 4.6 Models for the energy release rate analysis onset of the crack kinking in the infinite plate.

4.3 斜向荷重を受けるモデルへの適用

本節ではE積分の有効性を，まず実用的でかつ基本的問題で検証するため，これまでの経路独立型の積分では，精度よく求めることが困難であった，斜向荷重下でのき裂の折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率の有限要素解析を行った[5]．斜向荷重下でのき裂折れ曲がりの問題は材料内を進展するき裂経路がジグザグであったり，分岐現象などを解明する上でも基礎的かつ重要な問題である．特に，線形弾性体に限られているが，混合モードの折れ曲がりについては1980年前後には多くの理論，数値解析による報告がある．本節ではそれらの報告と比較することによりE積分による解析方法の有効性を検証している．

本節では最初に，**Fig.–4.6**(a)に示すような理論解[6]のある無限遠に，き裂と垂直な方向に一様せん断応力をもつ場合，および載荷軸が斜向した場合の一例の面外せん断型（モードIII）き裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギ解放率を解析した．そして理論解と比較し，今回用いた方法の精度，適

用性を検討した．次に2次元平面問題として，まず**Fig.–4.6**(b) に示す無限遠にき裂と垂直な方向に一様引張応力を受ける無限板を考えた．そして最後に，き裂経路がジグザグであったり，分岐現象などを解明する上でも基礎的かつ重要な問題である，無限遠に存在する一様応力の載荷軸が斜向した場合（すなわち，モードIとモードIIの混合モードとなる）の一例について解析した．これらの無限板を近似した有限要素モデルは4.2節で検討したモデルである．前節で詳しく述べていないので，詳細すると，き裂はモデル中央に存在し，き裂長さ$2\ell = 1.2cm$に対して横寸法12cm，縦寸法11.43cmで無限板を近似している．このモデルを中央にき裂を有する板の一様引張の解析解[7]を用いて無限板の理論解($K_I = \sigma_0\sqrt{\pi\ell}$)と応力拡大係数で比較したところ0.4%の違いを有していた．要素は正三角形を基本とした要素分割がされており要素数は6758である．節点数についてはE積分を数値計算に適用する場合，前述のようにその式の性質上，対象となる主き裂（基本モデル）に対してき裂を微小変化させたモデルも解析し，基本モデルとの差分型にする必要がある．そのため解析では1節点分だけき裂を進展させたモデルも考え，その節点は3451とし，基本モデルの節点数は3450としている．進展長さは$\Delta\ell$は1mmである．また無限遠の一様応力の載荷軸を斜向させたモデルについては有限要素分割自体は変えないで，与えられた有限要素モデルの境界節点に境界応力を載荷させた．ここで平面問題では**Fig.–4.5**のようになるが面外せん断問題では上下の境界面に$\tau_0 \cos\theta_L$を載荷するだけでよい．有限要素法を用いてき裂解析を精度良く行なう場合，アイソパラメトリック要素，特異要素を用いての解析が一般的となっている．しかし経路独立積分の特徴としてき裂近傍の解析精度は，それほど厳密に要求されないことや，解析全体の扱いの簡便性などを考慮して，最も容易に解析できる三角形一定ひずみ要素を用いる．なお，アイソパラメトリック要素を用いての解析法については後に触れる．積分経路は要素辺上に設定しており，5個の積分経路を使用した．用いた積分経路を**Fig.–4.7**に示す．この積分経路は，すべてモデル中央部の細かい正三角形要素の分割域内に存在し，正六角形の経路となっている．

エネルギ解放率の計算は線形弾性体の仮定のもとでの2点差分型に変換して近似したものを用いた．なお，折れ曲がり角は，き裂先端の要素分割を正三角形を二分した要素で構成させているため(**Fig.–4.7**)，便宜上，主き裂面からの折れ曲がり角θ_Kを0°，30°，60°，90°，120°，150°として計6方向に進

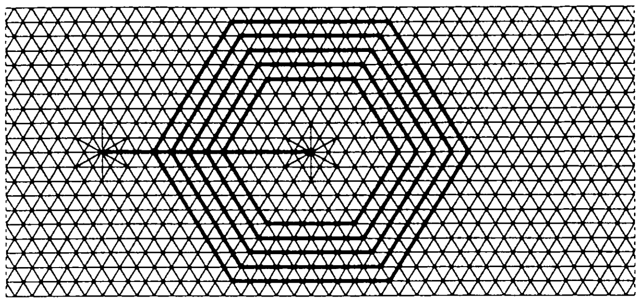


Fig.– 4.7 Integral paths for the finite element model in this paragraph.

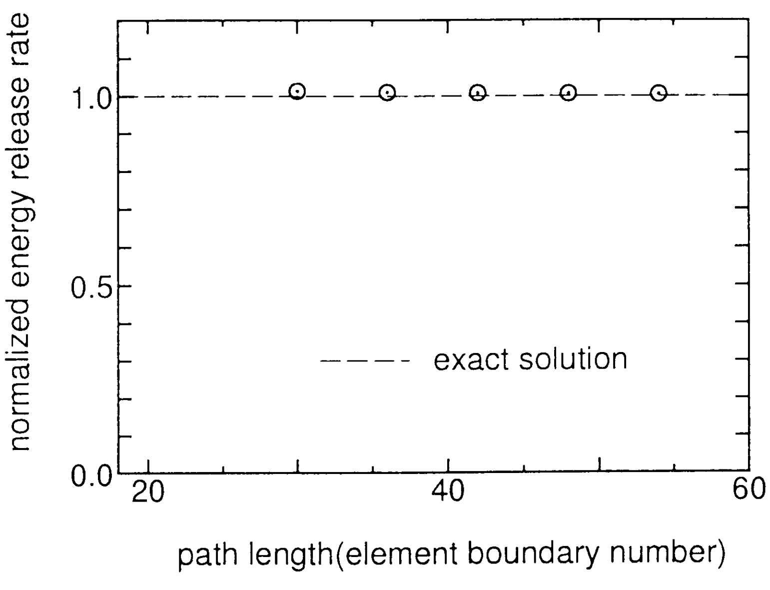


Fig.– 4.8 Path error for the finite element model.

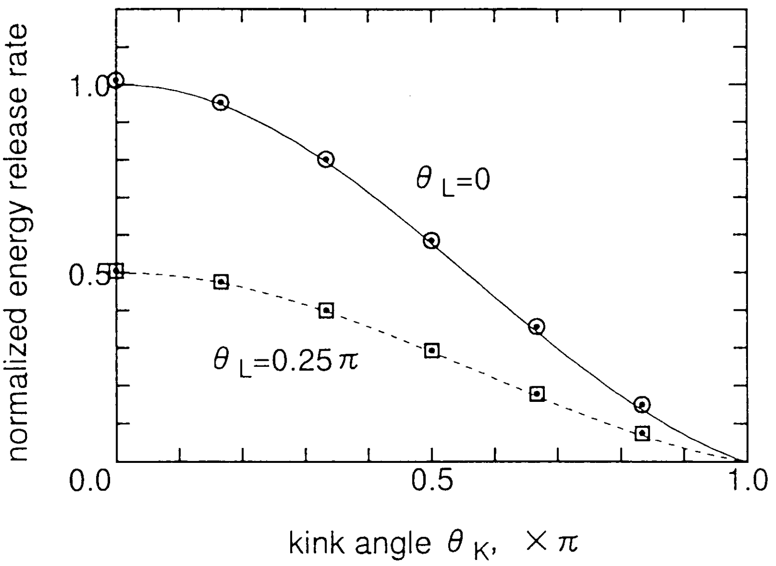


Fig.– 4.9 Results of the energy release rate analysis at the onset of the crack kinking under the anti–plane shear.

展する場合を解析した．

（近似）無限遠に一様面外せん断応力（モード III）を受ける板において，き裂が直進する ($\theta_K = 0$) 場合のエネルギ解放率の経路の違いによる誤差を Fig.–4.8に示す．ここで縦軸は数値解析結果を理論解で除して正規化している．横軸は，5 個の正六角形の積分経路に対して経路上の要素辺の長さは一定であるため，経路長さを経路上の有限要素の辺数で表している．また破線は理論解を表している．この図より積分経路を大きくとるにしたがって理論解に近づいていることがわかる．そして最も外側の積分経路での誤差は1%程度であった．き裂が直進する場合の平面問題については，さらに高い精度で解析結果が得られている．き裂が折れ曲がる場合も（モード III の場合），ほぼ同様な結果が得られており，積分経路をき裂先端から離して考えれば精度的には，このような方法，モデルで十分といえる．したがって以下，最も外側の積分経路の解析結果をもって議論をする．

モード III の結果を折れ曲がり角に対してまとめたものが Fig.–4.9 である．図中⊙でプロットしたものが無限遠での一様せん断応力の載荷軸がき裂面に垂直な方向な場合（載荷軸が斜向しない場合）で，□ が載荷軸がき裂面に対して$\pi/4$ の場合である．縦軸は，載荷軸がき裂面に対して垂直で，き

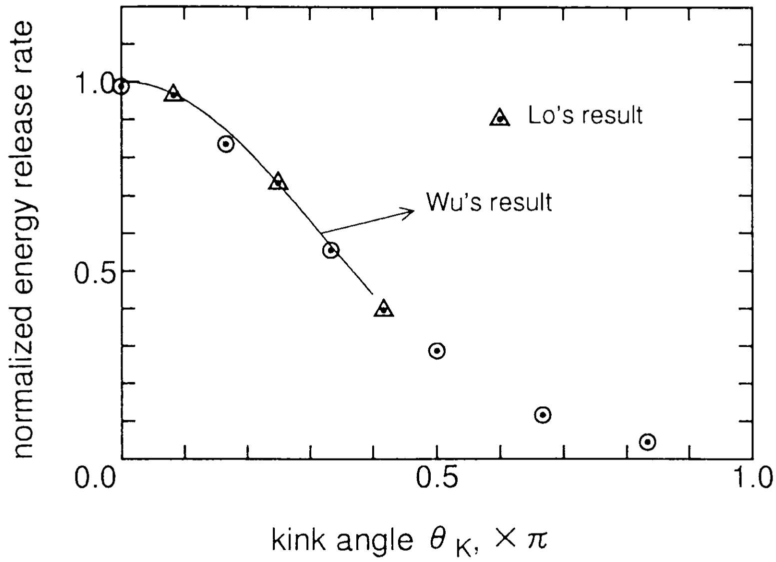


Fig.– 4.10 Results of the energy release rate analysis at the onset of the crack kinking under the plane stress conditions.

裂が直進する場合の理論解で除した正規化されたエネルギ解放率である．横軸は折れ曲がりき裂のき裂面に対してなす角度θ_Kである．また，図には理論解をそれぞれ細線の実線および破線で加えている．この図からわかるように折れ曲がり角の大小に関わらず，本解析結果は理論解と精度よく一致している．

2次元平面問題の荷重軸が斜向しない場合の解析結果を**Fig.–4.10**に示す．**Fig.–4.9**と同様⊙が本解析結果である．また図中にはLoの解析結果[8]（△）と，Wuの解析値[9]を実線で結んだものを載せている．この問題は（厳密な）理論解が存在しないが，本解析結果は，LoおよびWuの結果とよく一致している．

載荷軸がき裂面に垂直な方向に対してθ_L=0.3πの場合の混合モード下の解析を行った一例を**Fig.–4.11**に示す．縦軸は前の例と同様，載荷軸がき裂面に垂直なき裂が直進する場合の理論解で除したもので，横軸はき裂面方向と折れ曲がりき裂のなす角度θ_Kである．図中Wu[10]とHayashi and Nemat-Nasser[11]が求めた最大エネルギ解放率の大きさと，その時のき裂の折れ曲がり方向(+)および直進する場合の理論解(×)を載せている．全体の曲線を表す傾向はWuの解析結果[12]と非常によく似ており，最大エネルギ解放率およびその

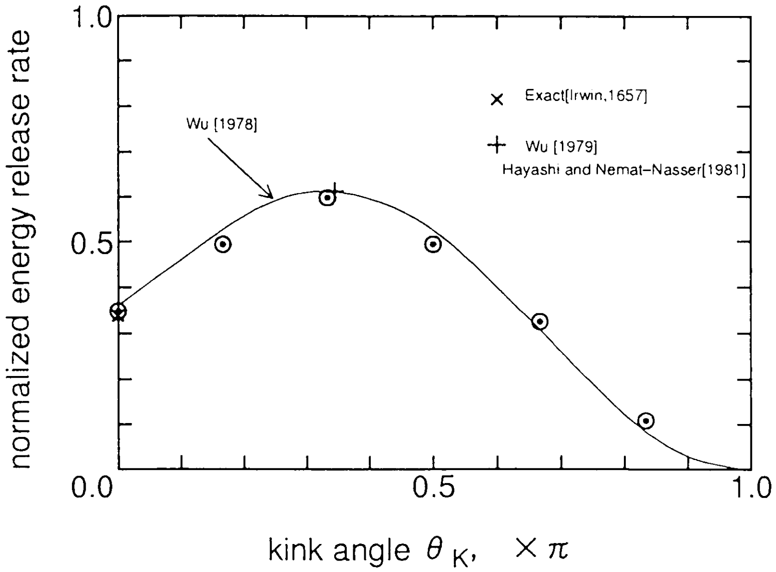


Fig.– 4.11 Results of the energy release rate analysis at the onset of the crack kinking under the combined loading conditions.

時の折れ曲がり角はWuやHayashi and Nemat-Nasserの解析結果と，またき裂が直進する場合は，理論値[4)]とかなりの精度で一致している．

4.4 異種材料界面を有するモデルへの適用

航空工学や電子工学など，多方面の分野での材料の多様化，高機能化の要求に応じた新しい材料が，材料生産技術の急速的な進歩にともない，活発に生み出されている．これらの材料の中で，対象となる部材内で，緩急の違いはあるが，性質の異なる材料，すなわち異種接合材料や機能傾斜材料は力学的な扱いが容易でないため，その解析に様々な工夫が施されている．たとえば，異種接合材料内のき裂の解析を例にとると，精度のよい境界要素法などを用いた応力拡大係数が種々の方法で解析されている[13)〜17)]．しかし，材料の非線形性を考慮する場合，境界要素法は非線形破壊力学の適用に関して，き裂先端の塑性域など考慮すべき点が多くなり，扱いが弾性解析に比べて飛躍的に困難になる．また応力拡大係数はそれ自体が線形破壊力学に基づくパラメータであるため非線形材料へ拡張利用には，非常な注意を要する．そこで本節では，界面を交差するき裂や界面近くのき裂

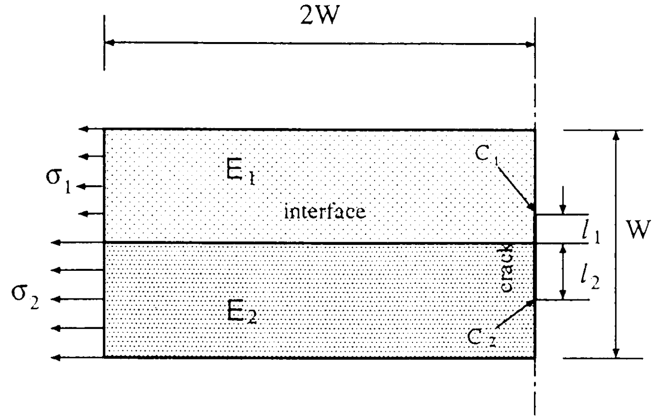


Fig.– 4.12 Dissimilar material model (A) – model with one interface –.

のエネルギ解放率の有限要素解析を行っている[18]. なお，混合モードになる解析例では，き裂の折れ曲がる瞬間のエネルギ解放率を複数の方向ついて求め，最大エネルギ解放率クライテリオンの立場からき裂の進展方向を考察した.

本節では次の3つのき裂近傍に界面を有するモードI型の引張荷重モデルを考えている. (A) 界面を貫いたき裂が板の中央付近に存在する場合の引張載荷モデル (**Fig.–4.12**). (B) き裂先端付近に界面間のヤング係数が線形的に変化する多数界面を有する片側き裂板の引張載荷モデル (**Fig.–4.13**). (C) き裂近傍に平行な界面を持つ無限板の一様引張載荷モデル (**Fig.–4.14**). (A) のモデルでは図に示したパラメータのうち，$\ell_1/W = 0.1$ と一定にして $\ell_1 = \ell_2$の等方性の場合を解析したのち，$\ell_2 = 0.25\ell_2$の場合をヤング係数E_1とE_2の比を変えて解析した. モデル(B) についてはき裂が存在する部分のヤング係数の5倍のヤング係数をもつ部分まで4段階の層をもつもの(B-1), 8段階の層をもつもの(B-2), そして16段階の層をもつもの(B-3) の3モデルを考えた. モデル(A) と(B), では載荷境界で変位が一定になるよう載荷している. (A) と(B) の有限要素モデルおよび積分経路は4.2節の帯板モデルと同じである. (A) の解析においては，これら全経路はき裂全体を囲む形となる. このような場合，J積分ではき裂両端で合計されたエネルギ解放率となってしまい，き裂の一端のみが進展した時のエネルギ解放率を求めることはできない. (C) についてはき裂長さℓに対して無限板を横寸法10ℓ，縦寸法約9.53ℓで近似して，き裂面から0.72ℓの距離に10倍のヤング係数をもつ

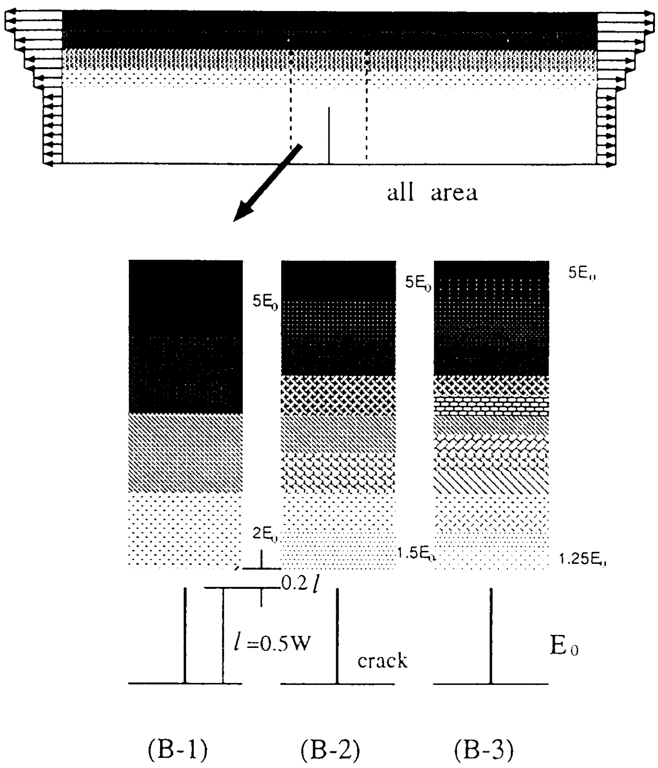


Fig.– 4.13 Dissimilar material model (B) - model with many interfaces -.

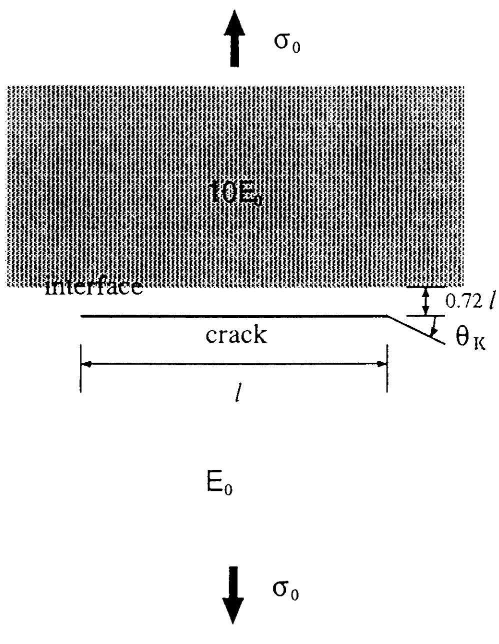


Fig.– 4.14 Dissimilar material model (C) - combined mode model by interface -.

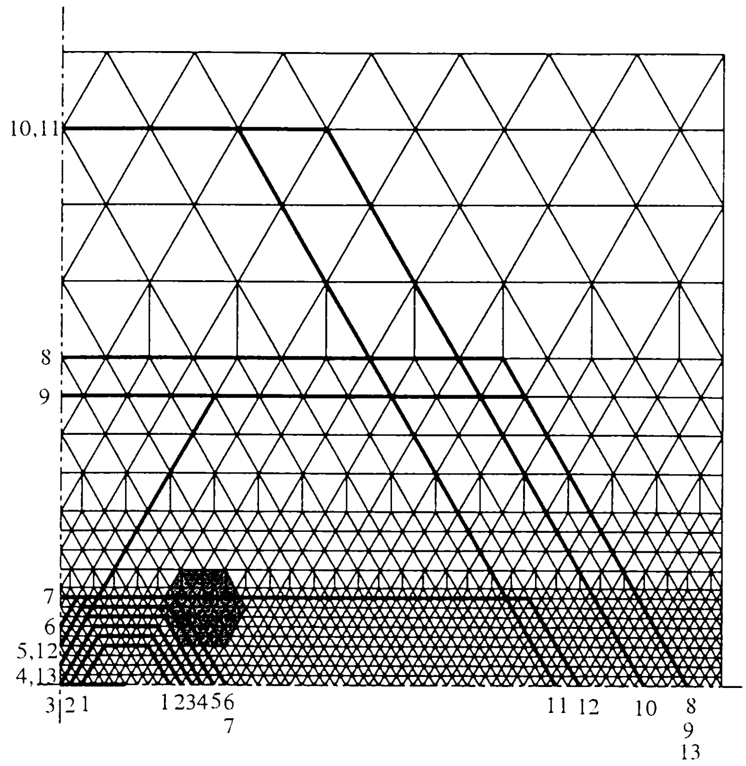


Fig.– 4.15 Finite element meshs for the infinite model with an inclusion near the crack tip.

部材が存在する場合を考えた．き裂右先端は11方向の折れ曲がりが扱えるよう要素分割を行っている．有限要素モデルは4.2節の無限板モデルと同じであるが，積分経路を4経路追加設定している．その図を**Fig.–4.15**に示す．なお，この図には介在物を有する場合の経路誤差を検討するため，介在物の位置も網掛けで示している．以上のすべての解析において，平面応力状態を仮定し，ポアソン比は0.3としている．

き裂長さ2ℓと板幅Wの比が0.2のときの，等方弾性板の中央き裂一様引張モデルの経路誤差を**Fig.–4.16**に示す．縦軸は信頼性の高い既報の応力拡大係数[19)]をエネルギ解放率に換算したもので除して正規化しており，横軸は，経路全長をき裂長さで除した無次元化経路長を示す．すべての結果は0.2%前後で既報の式を用いて得られたエネルギ解放率と一致しており，高い精度で解析されていることがわかる．外側の2経路については0.15%程度で一致しており，以後は最も外側に位置した経路の解析結果で議論を行う．

Fig.–4.12のℓ_1とℓ_2の比を$\ell_1/\ell_2 = 0.25$と固定してヤング係数E_1, E_2の比を変えて解析した結果が**Fig.–4.17**である．縦軸は得られたエネルギ解放率を応力

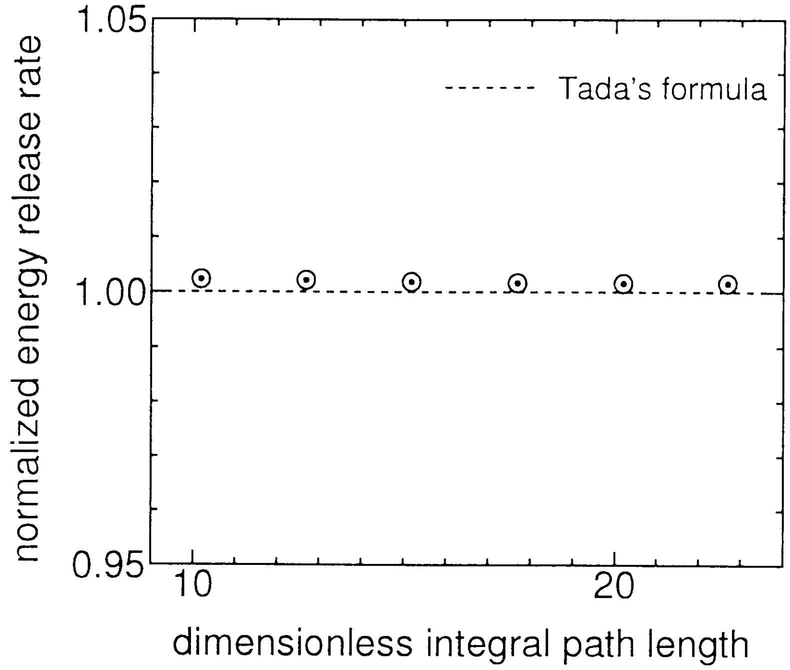


Fig.– 4.16 Path error for a center cracked plate model

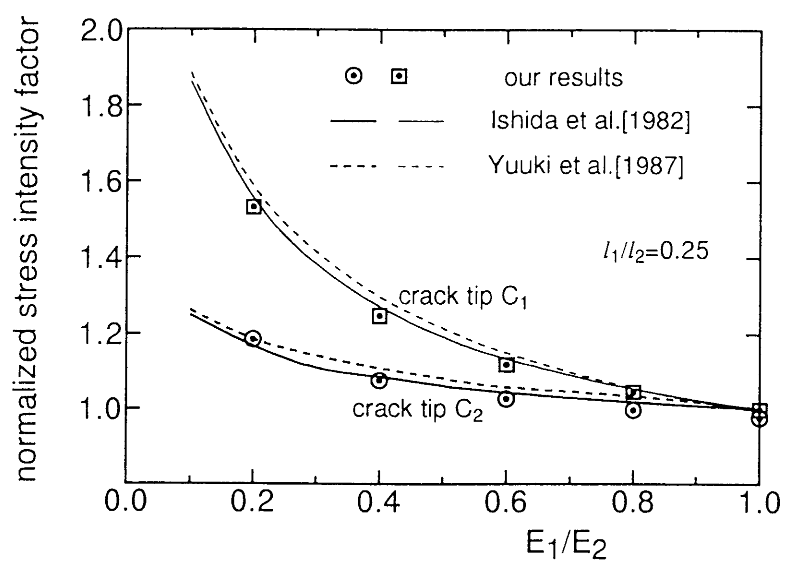


Fig.– 4.17 The results for the model with an inner crack across the dissimilar material interface.

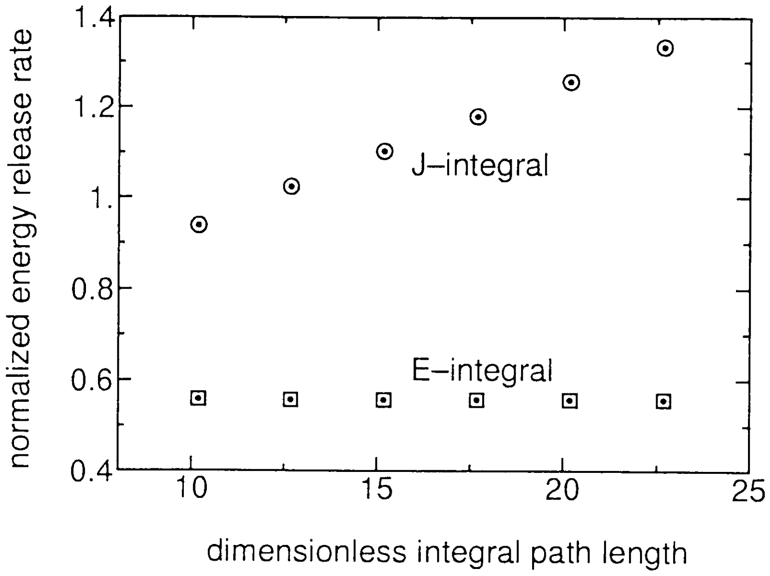


Fig.– 4.18 Path error for the dissimilar material model with many interfaces.

拡大係数に換算して，$\sigma_i\sqrt{(\ell_1+\ell_2)/2}$（$C_1$ に対しては$i=1$，C_2に対しては$i=2$）で除して正規化したものである．また横軸はヤング係数の比である．この図においても既報の2つの結果[14)15)]に2%以内で一致しており，本研究での手法は界面をき裂が貫いている場合でもかなり正確にエネルギ解放率を解析できることがわかる．

Fig.–4.13におけるモデル(B-3)のように，き裂先端に材料の性質が16段階に5倍のヤング係数をもつ層まで線形に，ヤング係数の変化する多数界面を有する場合の，E積分とJ積分[20)]の経路独立性を調べたものが**Fig.–4.16**である．縦軸はエネルギ解放率を等方弾性体の場合の応力拡大係数の級数解[3)]によるエネルギ解放率で除して正規化し，横軸は**Fig.–4.12**と同様，無次元化している．この図より，J積分による結果は経路長が長くなるほど大きくなる傾向が明らかに認められ，界面上の経路補正無しには経路独立性が失われ，エネルギ解放率を与えないことがわかる．一方，E 積分による結果は，0.2%前後で全ての経路について界面上の補正無しで一致している．

Fig.–4.13の3つのモデルについて層の数の逆数についてエネルギ解放率の変化を調べた図が**Fig.–4.19**である．縦軸は前述のように正規化している．図中⊙が解析結果であるが，これらの結果は，ほぼ直線で最小2乗近似が行える（**Fig.–4.19**中の細線）．この図で，層の数の極限（横軸の0）をとった時

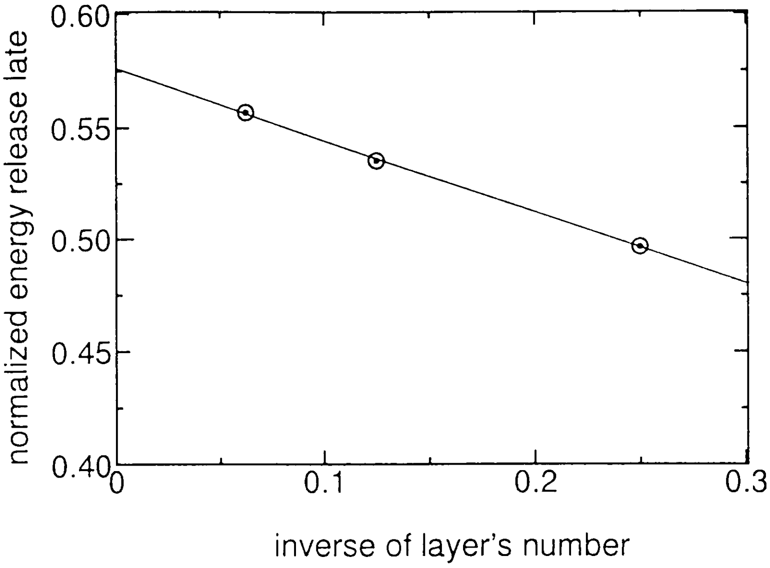


Fig.– 4.19 Relationship between energy release rate and the reciprocal of a layer number for the dissmilar materoal models (B).

のエネルギ解放率は，き裂近傍に，ヤング係数が連続的に線形に変化する材料のエネルギ解放率を与えると推定できる．

ここで，E積分の経路独立性についてさらに詳しく検討するため，前述したFig.–4.15の一様引張無限板モデルの介在物を有する場合と存在しない場合をJ積分と比較して解析した．Fig.–4.20にその結果を示す．図中，横軸は経路番号（Fig.–4.15 参照）を示し，縦軸は無限板等方弾性体の厳密解で正規化している．この図よりE積分による結果は介在物がある場合（⊡）もない場合（⊙）もほとんど同じ値を示し，経路の独立性が十分保たれているといえる．これに対し，J積分は介在物を含まない場合（◇），き裂の右先端のみを含む経路（経路1~6と12,13）においては経路独立性が示され，エネルギ解放率にほぼ等しいが，両端を含む経路（経路7~11）では，その値はほとんどゼロとなっている．介在物を有すると（△），界面が経路になる場合（経路4），経路が介在物を貫く場合（経路5,6）に誤差が生じてくる．経路7で現れる値は界面による誤差そのものである．

最後に界面が存在することにより混合モードとなるFig.–4.14のモデルの解析を行った．まず，折れ曲がり瞬間時におけるエネルギ解放率の解析精度を検討するため，界面の存在しない等方弾性体の解析を行った．その結果を

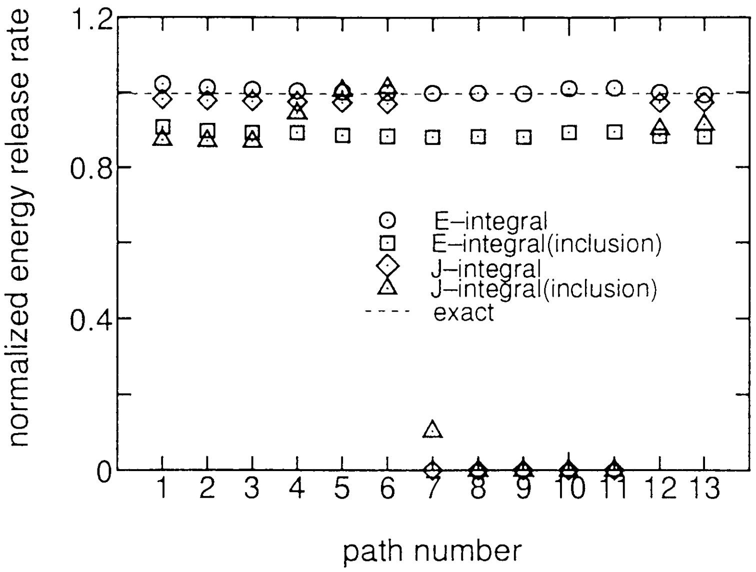


Fig.– 4.20 Path error for a crack model with an inclusion near a crack tip.

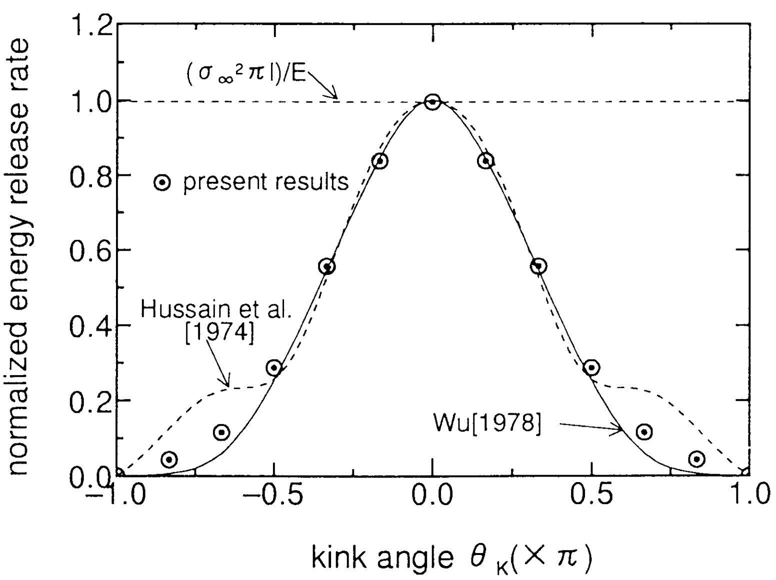


Fig.– 4.21 Energy release rate at the onset of crack kinking for the model of with a single crack subjected to the remote tension.

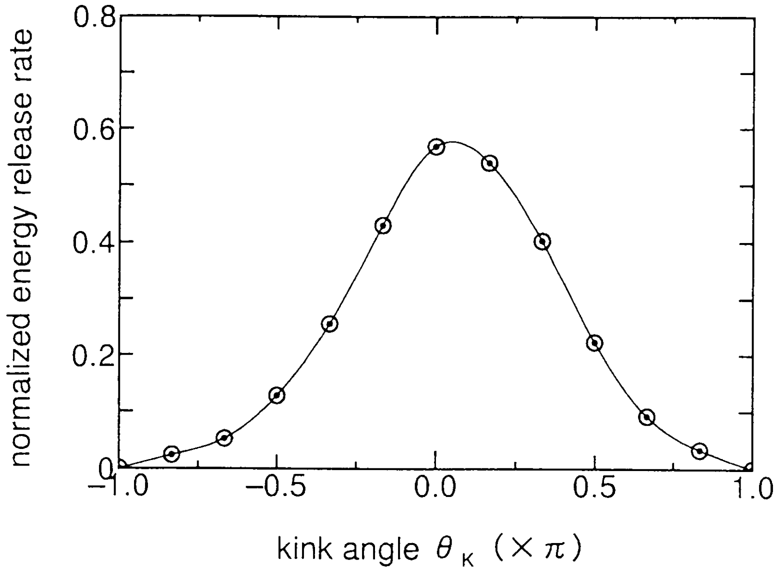


Fig.– 4.22 Energy release rate at the onset of a crack kinking in the dissimilar material model (C).

Fig.–4.21 に示す．ここで縦軸はエネルギ解放率を厳密解で正規化しており，横軸はき裂面方向から界面に対して離れる方向に折れ曲がるときの角度である（**Fig.–4.21**参照）．本解析結果は既報の2結果[21)22)]とよく一致しており，折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率もかなり精度よく求めることができる．き裂に平行な界面を持つ，混合モードになる場合の結果を**Fig.–4.22**に示す．3次のスプライン関数で曲線近似をした結果から判断すると，最大エネルギ解放率を示す折れ曲がり角は若干正の方向にずれている．したがって，最大エネルギ解放率の方向にき裂が進展すると仮定すると，界面に平行に存在するき裂からのき裂の進展方向は界面から離れる方向に折れ曲がることになる．

4.5 介在物あるいは空隙を有するモデルへの適用

土木構造物の耐久性に関与するひび割れ状態，岩石やコンクリートなどの岩質材料内の破壊き裂の進展状況，さらには近年注目を集めている複合材料内のき裂の進展特性は，複雑なジグザグ性を有し，材料特性をはじめとした多くの因子がき裂の進展に影響を及ぼす．例えば，鉄筋コンクリー

トであればコンクリート中の骨材，鉄筋，コンクリート打設時に生じた空隙，骨材とコンクリートの界面などが破壊き裂の発生，進展に関わってくる．また岩石の中で頻繁に研究対象となる花崗岩では弾性係数などの材料特性の大きな違いをもつ石英や長石などのそれぞれの鉱物粒子の他，潜在き裂，鉱物粒子間の界面がき裂の進展に大きな影響を及ぼす[23)24)]．これらの挙動を微視的な立場から議論することは重要で，空隙の干渉に限っても，き裂近傍に存在するその位置によってき裂進展を助長するような干渉をしたり，逆にき裂の進展を妨げるような効果を与えることもある．この空隙の干渉は，破壊の制御にも応用されている．

複合材料におけるき裂と介在物との干渉に関しては，多くの解析結果が報告されている[25)~27)]．これは比較的新しい材料である複合材料においては破壊靭性を評価することが非常に重要となり，破壊靭性はき裂周りの介在物によって大きく変化するためである．介在物についても，その弾性係数の大小，寸法，形状，位置によって空隙と同様，き裂の進展を助長することもあるし，妨げることもある．

本節では以上のことの基本的挙動を明らかにするため，超弾性体内を準静的に進展するき裂と，その先端付近にある介在物あるいは空隙との干渉によるエネルギ解放率の変化を求め，き裂の挙動を考察している[28)29)]．

本節では前節までに再三でている無限板中に長さ 2ℓ=1.2cm のき裂が存在する場合を考え，荷重はき裂面に垂直な一様引張分布荷重 σ_0 が無限遠に載荷されている場合（載荷的にはモードI）を想定する（**Fig.–4.23**参照）．これに対する有限要素近似モデルは前出のとおり横幅寸法（き裂面方向）12cm，縦方向11.43cm の有限長方形板としている．

本節では先ず，き裂進展後のき裂先端座標を変えることにより，前節まで扱ったき裂進展方向以外の方向にき裂が進展する場合のエネルギ解放率の解析を行った．等方線形弾性無限体の単一き裂のき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率の解析結果を**Fig.–4.24**に示す．ここで折れ曲がり角は**Fig.–4.23** に示したθ_Kで表しており，縦軸のエネルギ解放率は4.3 節で扱った積分経路3から13までの平均値を，直進する場合の理論解で正規化している．図中，点で示したものがWuの解析結果[10)]で，厳密な閉じた解は知られていないが．半理論解として最も信頼性があるとされている結果の一つである．⊕と×で示したものが今回の解析結果で×は本来の有限要素モデルのき裂先端の座標を移動させることにより，メッシュ分割により固定される折

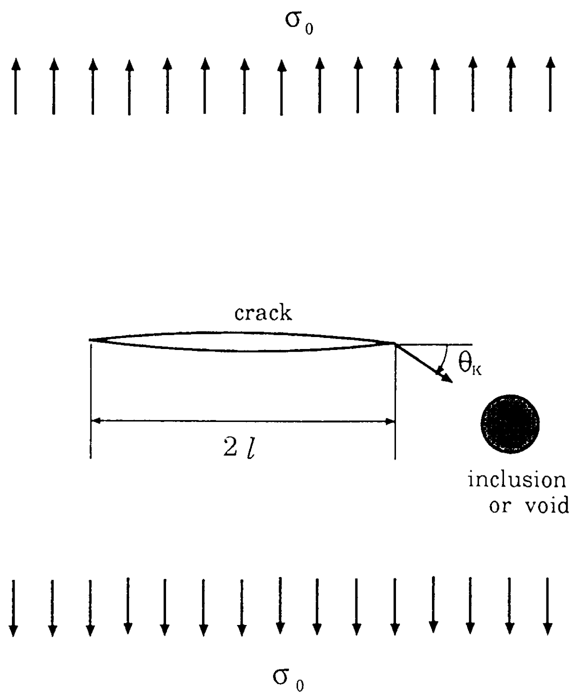


Fig.– 4.23 Scheme of loading condition and direction of crack kinking for the model with an inclusion or a void.

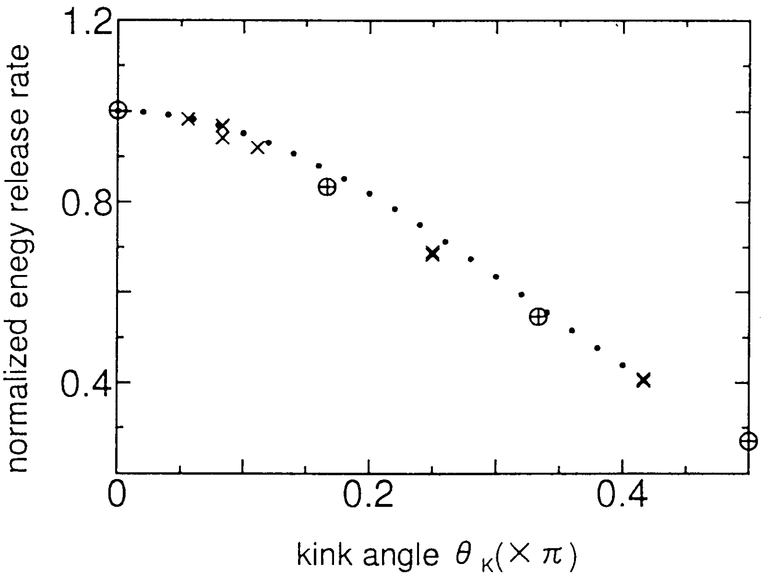


Fig.– 4.24 Normalised energy release rate for the crack kinking in a homogeneous isotropic model.

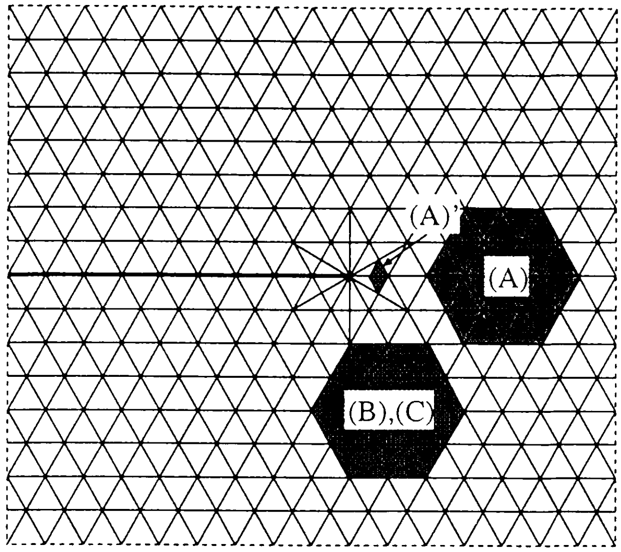


Fig.– 4.25 Finite element model for a neighborhood of the crack with an inclusion or a void.

れ曲がり方向以外の方向のエネルギ解放率を求めたものである．ここで両者の値はかなり近い値を示しており，き裂折れ曲がりに対する解析もかなり高い精度で解析できることがわかる．またき裂先端の座標を移動さすことにより，任意の方向の折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率の解析も可能である．

介在物および空隙の有限要素モデルとその位置関係を**Fig.–4.25**に示す．本論文では，介在物および空隙を簡単のため，有限要素の特性上，正六角形としている．また介在物はそのヤング係数をモデルのそれの10倍にすることにより近似している．**Fig.–4.25**(A)のようにき裂先端に介在物がき裂面に対して対称な形で位置しているモデルの解析結果を**Fig.–4.26**に示す．図中，エネルギ解放率が最も大きい値をもつものは，介在物がない場合で，次の2つは**Fig.–4.25**の(A)の大きさの介在物をもつ場合で，d=2mmと1mmのもの，最小の値をもつものは，dが最も小さく(d=0.5mm)，**Fig.–4.25**の(A)'の大きさの介在物をもつ場合である．その結果，き裂先端が介在物が近づくにしたがって，エネルギ解放率は小さくなり（き裂は進展しにくくなり），エネルギ解放率のピークあたりが平になる．そしてかなり近づけて，介在物の大きさを小さくする(**Fig.–4.25**(A)'参照）とき裂が直進する方向以外に最大値を持つ現象が現れる．このことはき裂の直進する進展方向は非常に不安定になり，介在物を避けた方向に曲折することを示唆する．

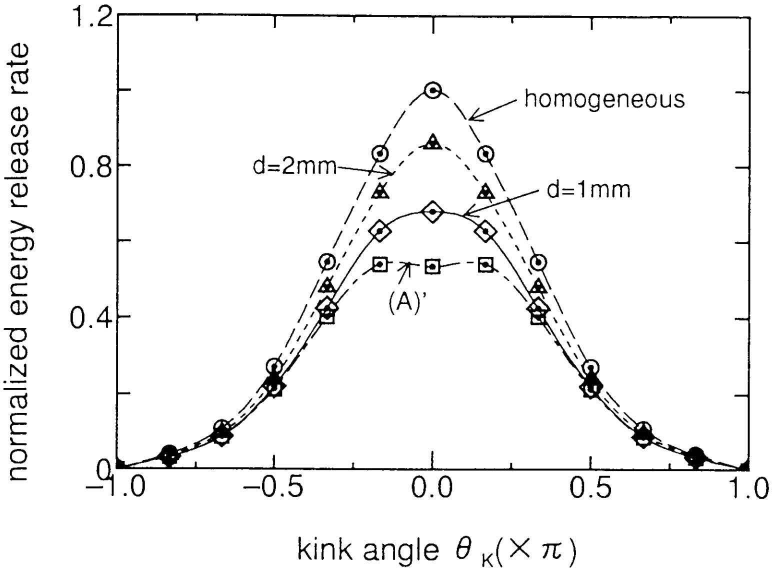


Fig.– 4.26 Normalized energy release rate for the crack tip in which neighborhood has an inclusion symmetrically.

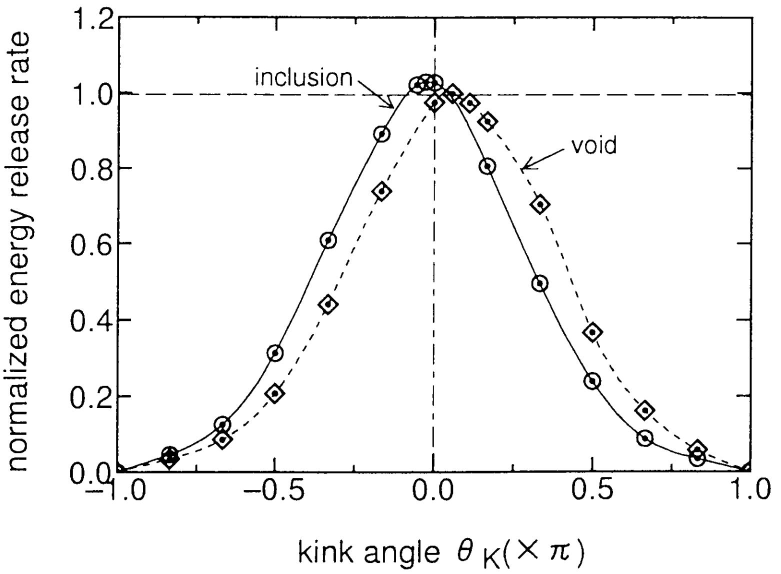


Fig.– 4.27 Normalized energy release rate for the crack tip in which neighborhood has an inclusion or a void anti-symmetrically.

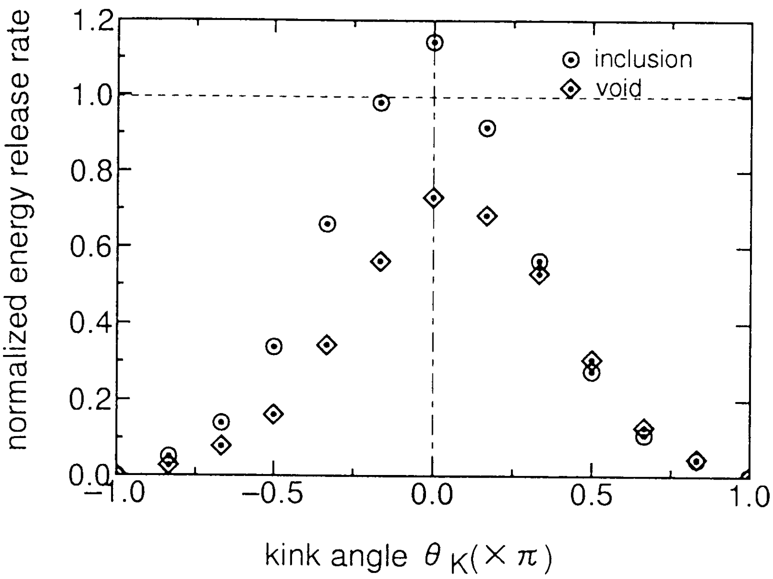


Fig.– 4.28 Normalized energy release rate for the crack tip in which side has an inclusion or a void.

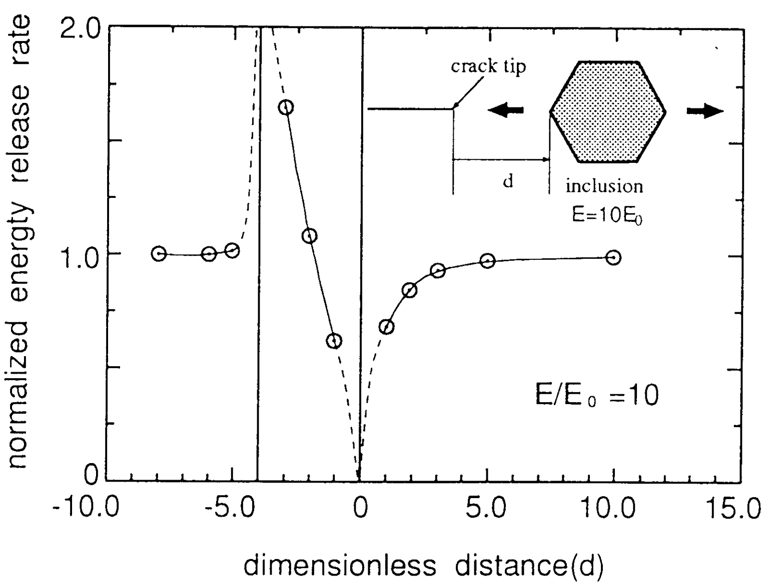


Fig.– 4.29 The variation of energy release rate with the position of an inclusion.

き裂先端の側方に介在物および空隙が存在する場合の解析結果（Fig.–4.25の(B),(C)参照）をFig.–4.27に示す．ここでは介在物や空隙が存在することによりエネルギ解放率最大の角度が直進する方向からずれることがわかる．Fig.–4.27の最大値のずれを，エネルギ解放率最大クライテリオンの観点から言及すれば（ただし，表面エネルギまたは破壊靭性値が方向によらないと仮定する），介在物は避けるように，また空隙には誘導されるようにき裂が進展することになる．さらに介在物がき裂先端側方に存在することによりエネルギ解放率の最大値は大きくなり，き裂の進展が容易になることを示す．空隙についてはこの位置ではエネルギ解放率の最大値は空隙のない場合と変わらない．しかし，空隙の位置をき裂先端の真横にずらすとFig.–4.28に示すように明らかに解放率の最大値は低下する．したがって，空隙についてはき裂先端の側方に位置することにより，き裂進展を抑える効果があるといえる．Fig.–4.28を詳説するとFig.–4.25の(B)(C)の介在物あるいは空隙の位置を1mm左方にずらしてき裂先端と介在物の中心が一致するところに存在するようにモデル化しているが，明らかにFig.–4.28の介在物あるいは空隙の効果がより強く現れている．

Fig.–4.29は図中に示すようにFig.–4.25 (A)の介在物の位置がき裂面方向に変化する場合のエネルギ解放率の違いを表している．ここで介在物のヤング係数はベース材（複合材料のマトリックス相に相当する．）の10倍にしており，横軸はき裂付近の1要素辺長さで無次元化している．また，d=0はき裂が介在物に入る瞬間時のエネルギ解放率であり，d=-4はき裂が介在物からベース材に出る瞬間時のエネルギ解放率である．この解析では介在物のヤング係数がベース材のそれより大きいので，d=0におけるエネルギ解放率は0で，d=-4でのエネルギ解放率は∞であると予想される[15]．き裂が介在物を貫通しき裂先端から介在物が離れるときは急速に等方弾性無限体の厳密解に収束するが，介在物がき裂の前方にあり，その距離が大きくなる場合はd=6程度で等方弾性無限体の厳密解に収束しており，前者の場合に比べ，その収束の仕方はかなり緩やかである．この傾向はLiらの結果[30]と若干異なるが，これはLiらは半無限長の主き裂を扱っているのに対して今回の解析では主き裂長さが著しく短いためであると考えられる．

Fig.–4.25(A)の介在物のヤング係数(E)の変化に伴う，エネルギ解放率の変化を示したものがFig.–4.30である．介在物のヤング係数がベース材のそれより大きければ正規化されたエネルギ解放率は1より小さく（したがって，

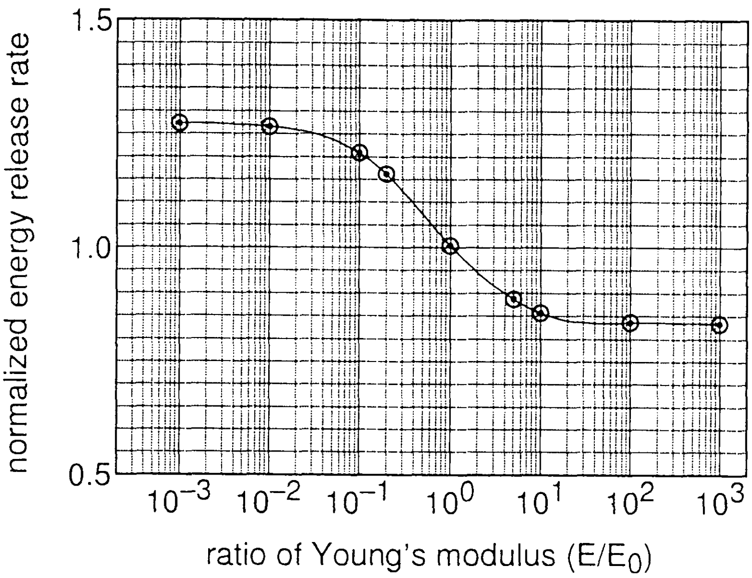


Fig.– 4.30 The variation of energy release rate with Young's modulus of an inclusion.

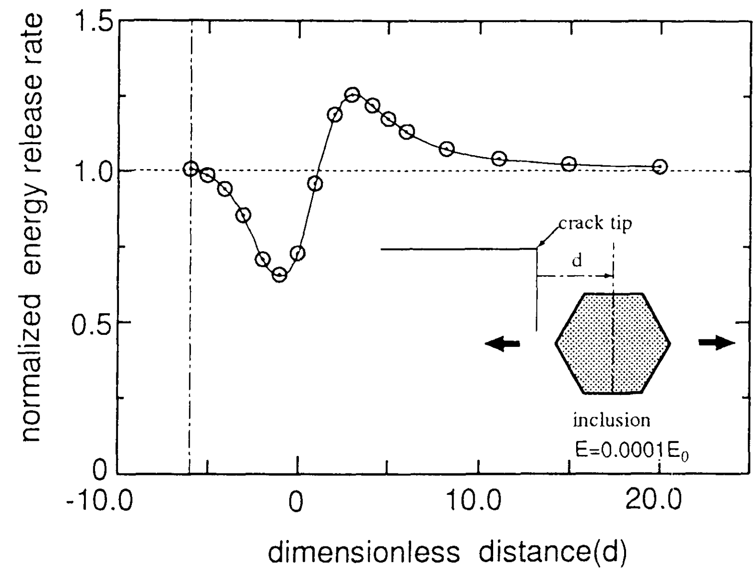


Fig.– 4.31 The variation of energy release rate with the position of an inclusion.

等方弾性無限体の介在物のない場合より進みにくい.), 小さければ正規化されたエネルギ解放率は1より大となる(したがって, 等方弾性無限体の介在物のない場合よりき裂は進みやすくなる). ベース材のヤング係数 (E_0) との比は$E < E_0$のときは10^{-2}程度で一定値に近づく. このことは$E \approx 0.001E_0$以下をとれば空隙が近似できることを示唆する. また$E > E_0$ときは10^2程度で一定値に近づいている.

最後の解析例は**Fig.–4.31**に示すように介在物のヤング係数をベース材の0.0001倍として**Fig.–4.25**(B),(C)の介在物をき裂面方向に変化させた場合のエネルギ解放率の違いである. ここで横軸はき裂周りの1要素辺で除して無次元化している. d=0はき裂先端の真横に介在物の中心がある場合であり, d=-6はき裂の中心点の真横に介在物の中心がある場合である. このような解析は介在物の大きさに大きな影響を受けるが, 本研究のようにき裂長さ12mmに対して介在物の大きさが一辺2mmの正六角形の場合, き裂の先端のほぼ真横に介在物の中心が存在する場合に, 正規化されたエネルギ解放率は最も小さく, 介在物の中心がき裂の先端から離れていくにしたがい, 急激にエネルギ解放率は大きくなりd=3付近でピークをもつ. エネルギ解放率が最大と最小となる介在物の中心の位置の違いは, 約4要素辺の長さ(主き裂長さの1/3)で, この間でエネルギ解放率は1より大きくなる. エネルギ解放率の最大値と最小値を荷重に換算すると, き裂が最も進みやすいときの荷重は最も進みにくい場合の3割から4割小さい荷重となる. したがって空隙はき裂の進展に複雑で大きな影響を与えることがわかる.

4.6 異方弾性体への適用

岩盤や岩石はそれらが持つ異方性挙動が重要視され, 破壊, 崩壊に至るまでの変形挙動に関する研究が数多く報告されている. 岩石についてはほとんどの火成岩, 堆積岩で異方性挙動が認められ[31], 破壊現象に大きな影響を与えていることが知られている. また石油備蓄基地などの地下岩盤構造物の対象となる堅固な岩盤を構成する花崗岩は直交異方性としてよく知られており[32][33]直交方向の弾性係数は最大で2倍近く異なるものも少なくなく[34], 引張強度や破壊靭性については異方性方向の違いによるそれらの最大値および最小値の差が最大値と最小値の中間値に対して最大30%におよぶものも珍しくない[23][35][36].

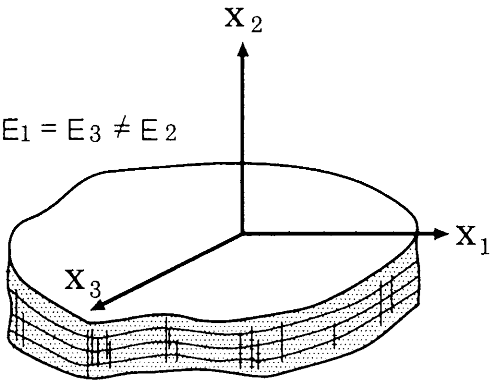


Fig.– 4.32 Transversely isotropic body.

最近では新素材と呼ばれる複合材料も異方性を示す材料として注目されつつある．これらは軽量にして高強度，高じん性を目的に開発された材料で土木構造物への応用として，今後ますますその需要が増してくると考えられるが，ほとんどが繊維補強複合材料であるため，著しい異方性を示し，使用する上でその材料特性を十分把握しておく必要がある．

本節は以上のことを背景に，異方性材料内のき裂進展時のエネルギ解放率を種々のき裂の折れ曲がり角に対して求め，最大エネルギ解放率破壊条件の立場から異方弾性体中のき裂の折れ曲がり現象を考察している[37]．ただし，現実的には，前述したような異方性材料は，一般に，弾性定数のような材料特性の異方性のみならず，破壊強度（G_{IC}，K_{IC}など）の異方性も著しく，それを厳密に評価しなければ，実際の折れ曲がり方向の予測にはならない．しかし，材料を特定したとしても，破壊強度の異方特性の詳細な研究はほとんど行われていないこと，また，本論文では，異方弾性体のE積分によるエネルギ解放率の数値計算が主目的であることから，今回は，破壊強度は，等方性と仮定して議論している．

なお，異方線形弾性体のき裂折れ曲がり時のにおける応力拡大係数やエネルギ解放率に関する研究は，Obata ら[38]と Gao ら[39]の報告がある．前者は積分方程式による数値解を，後者は，折れ曲がり角が小さいと仮定した摂動近似解を得ている．しかし，Obata らのエネルギ解放率に関する解析には誤りがあると指摘されており[39]，一方，Gao らのエネルギ解放率の結果の図も，異方性軸がき裂と直交する特別な場合を除き，彼らの得た式を使った

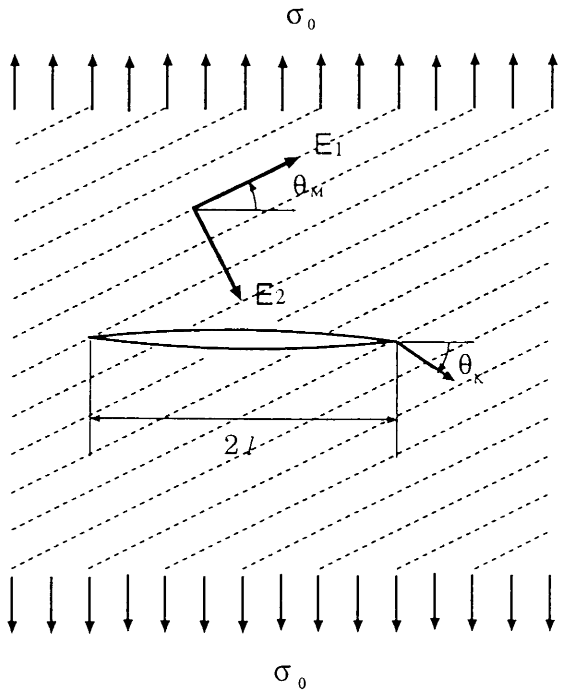


Fig.– 4.33 Anisotropic axes and kinking angle.

結果とは一致しないなど，現在まで得られている異方弾性体の場合の結果はいずれも信頼性に欠けている．

線形異方弾性体を3次元応力－ひずみ関係で完全に記述するには，対称性を加味しても21個の独立した弾性定数が必要である．2次元で考えるとこれが最大で6個に減る．本研究では実際の異方性材料によくみられる直交した方向の弾性係数の違いを2次元問題で考えるため比較的扱いの容易な面内等方性（横等方性）材料を考えた（**Fig.–4.32**）．ここで応力とひずみの関係をマトリクス表示すると線形異方弾性体の場合，

$$[\sigma] = [D][\epsilon] \tag{4.7}$$

で表され，応力マトリクスあるいは弾性マトリクスと呼ばれる[D]は面内等方性材料では，平面応力を仮定すると図中x_1–x_3平面内の変形に関するヤング係数，ポアソン比およびせん断係数をそれぞれE_1，ν_1，G_1，またx_2方向に関するヤング係数，ポアソン比およびせん断係数をそれぞれE_2，ν_2，G_2と

し，新たな定数n（=E_1/E_2）とm（=G_2/E_2）を導入すると

$$[D] = \frac{E_2}{1-n\nu_2^2}\begin{bmatrix} n & n\nu_2 & 0 \\ n\nu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\nu_2^2) \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

となる．ただし，ここでは$G_1 = E_1/2(1+\nu_1)$であり，さらに$E_1\nu_2 = E_2\nu_1$を仮定すると，独立な弾性係数は4個となる．これを全体座標系に変換して用いることになる．

本節では前節同様，無限板中にき裂長さ2ℓ=1.2cmのき裂が存在する場合を考え，荷重はき裂面に垂直な一様分布荷重が無限遠に載荷されている場合（載荷的にはモードI）を想定する．これに対する有限要素近似モデルも前節と同様である．

異方性軸の方向と主き裂およびき裂の折れ曲がり角との関係を**Fig.–4.33**に示す．ここで異方性軸の方向は，主き裂面方向と主異方性軸方向（ヤング係数Eが最も大きくなる方向）のなす角θ_Mで示し，折れ曲がり角は主き裂面方向と折れ曲がりき裂の方向のなす角をθ_Kで示す．折れ曲がり角は前節で任意の方向に設定できることが明らかになったが，ここでは主き裂面からの折れ曲がり角θ_Kを$0°$，$\pm\pi/6$，$\pm\pi/3$，$\pm\pi/2$，$\pm2\pi/3$，$\pm5\pi/6$として計11方向に進展する場合を扱った．

解析例してはE_1およびν_1をそれぞれ$68.6GPa$，0.3と固定して，まず，前述の定数nが1のとき，すなわち等方弾性体のき裂折れ曲がり時のエネルギ解放率を求めた．次に異方弾性体としてn=2と10の場合を解析した．ここで**Fig.–4.32**のx_2の方向に関する弾性係数として，問題を簡単にするため，$G_2 = E_2/2(1+\nu_2)$の関係を仮定した．対象とした異方性軸の方向は$\theta_M = 0$，$\pi/6$，$\pi/3$，$\pi/2$の場合を考えた．最後に異方性材料の具体例とし，ガラス繊維強化プラスチック（E_1=20.58GPa, E_2=15.68GPa, ν_2=0.07, G_2=4.116GPa）の場合[40]を解析した（この例では$G_2 \neq E_2/2(1+\nu_2)$であることに注意）．このときの異方性軸の方向は$\theta_M = \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12, \pi/2$とした．$n(=E_1/E_2) = 2$の場合の異方性材料のエネルギ解放率とき裂の折れ曲がり角との関係を，各異方性軸方向θ_Mに対し示したものが**Fig.–4.34**である．図中，縦軸は前述同様，等方性無限弾性体のき裂が直進する場合の厳密解で除して正規化している．ここで，どの異方性軸の方向の場合でも正規化された最大エネルギ解放率は1より大きくなっている．このことはE_1を固定してE_2を小さくし

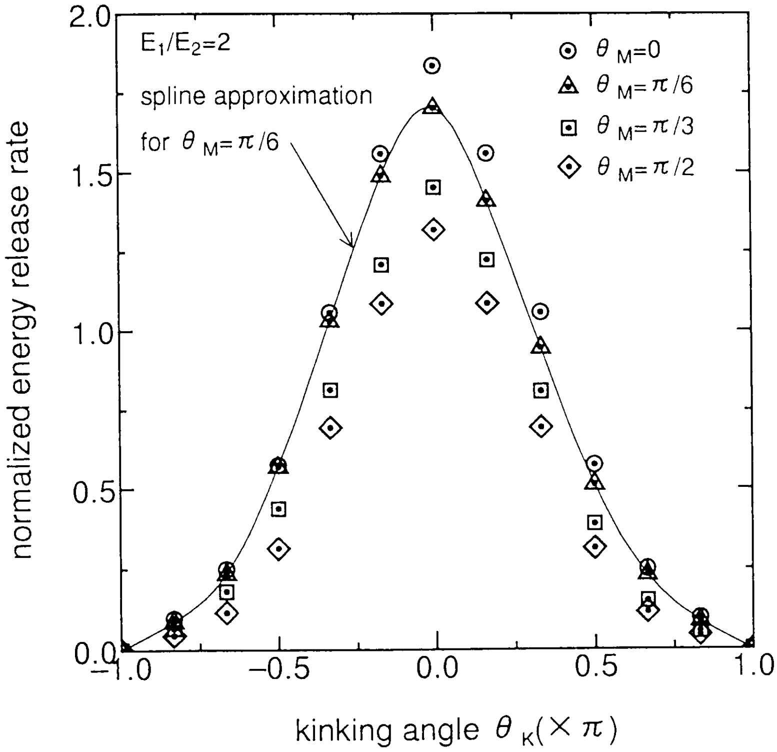


Fig.– 4.34 Energy release rate for a kinking crack in an anisotropic body (n=2).

たため，先に行った等方弾性体の場合よりもx_2方向について，変形しやすくなっているためであると解釈される．最大エネルギ解放率の異方性軸による影響は，異なるθ_Mにより得られた平均値で約30%強となっているが，最大エネルギ解放率が生じる方向は，き裂が直進する方向とすべてのケースに対してほぼ一致する．ここでき裂進展方向に対して，異方性軸の影響を最も受けていると思われる$\theta_M=\pi/6$についてスプライン曲線近似を試みたところ，曲線全体がマイナス側による傾向は認められたが，最大エネルギ解放率の生じる方向はき裂が直進する場合とほとんど変わらなかった．

Fig.–4.35は$n=10$の場合の異方性材料のエネルギ解放率とき裂の折れ曲がり角との関係を各異方性軸方向θ_Mに対し示した図である．ここでも前述のように縦軸は正規化している．この解析結果から，異方性の度合いが大きくなると最大エネルギ解放率は異なるθ_Mにより得られた平均値で100%より大きい違いを有することがわかる．さらに$\theta_M=\pi/6$についてスプライン曲線近似を行ったところ，き裂が直進する場合のエネルギ解放率と最大エ

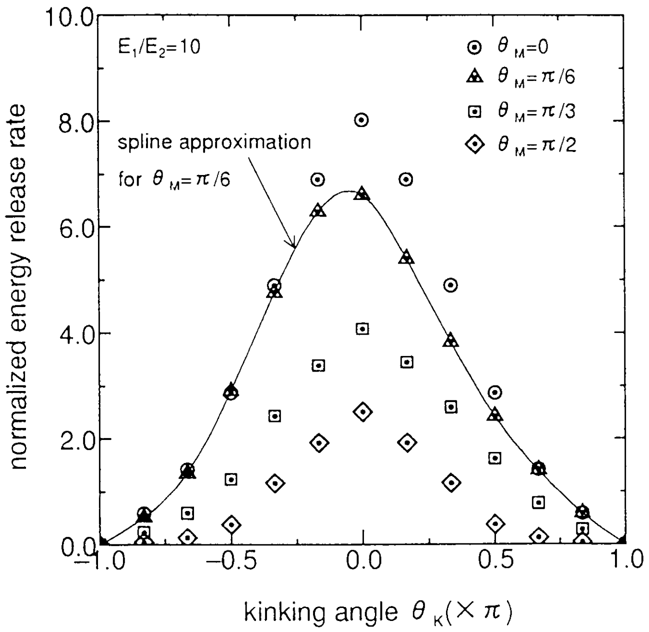


Fig.– 4.35 Energy release rate for a kinking crack in an anisotropic body (n=10).

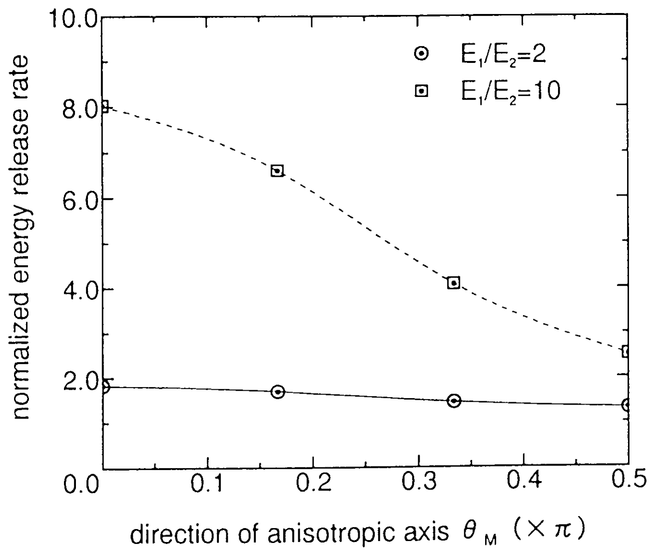


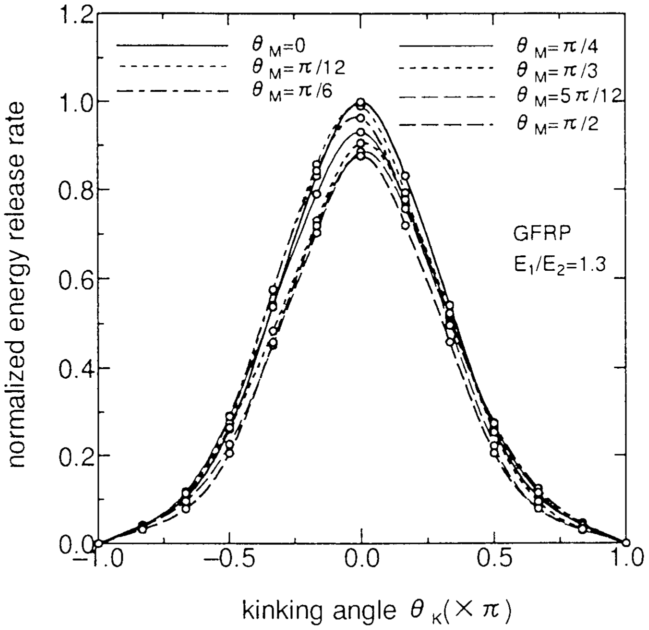
Fig.– 4.36 Relation between the direction of anisotropic axis and the energy release rate for a straight extending crack.

ネルギ解放率は1%強しか変化しなかったが，折れ曲がり角が$\theta_K=-9^\circ$辺りで最大エネルギ解放率を示す結果となった．このことは最大エネルギ解放率の方向をき裂の進展方向と仮定する場合，き裂は異方性の影響を受けて9°程度折れ曲がって進むことを示唆している．しかし，ここでも$\theta_M=\pi/3$以上にすると，折れ曲がりに対する影響は顕著にみられなかった．

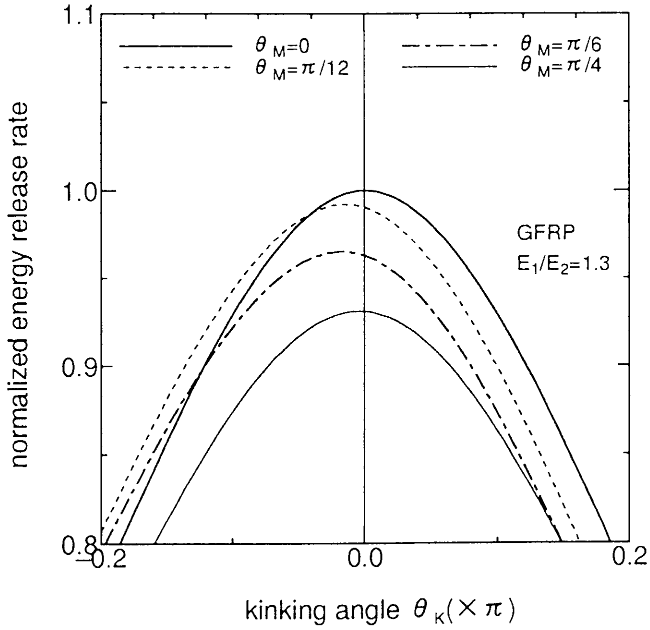
以上の異方性の影響を，$\theta_K=0$のエネルギ解放率を異方性軸の方向に対して示した図が**Fig.–4.36**である（ここで，前結果から，$\theta_K=0$のエネルギ解放率は，異方性軸の方向と無関係に，最大エネルギ解放率にほぼ等しいことに注意）．解析したデータは少ないが，$\theta_K=0$のエネルギ解放率は，$\theta_M=0$で最大（極大），$\theta_M=\pi/2$で最小（極小）となっており，異方性軸の方向に対する関係は正弦関数的な形状を呈しているようである．

最後に異方性材料の具体例としてガラス繊維強化プラスチック（GFRP, E_1=20.58GPa, E_2=15.68GPa, ν_2=0.07, G_2= 4.116GPa）の場合を解析した．**Fig.–4.37**は異方性軸方向θ_Mの違いによる，き裂の折れ曲がり角とエネルギ解放率の関係を示した図である．ここで，縦軸は両図ともき裂が直進する場合で異方性軸の方向が$\theta_M=0$のときのエネルギ解放率の解析結果で除して正規化している．**Fig.–4.37**(a)中，白丸で示した点は数値解析結果で，全異方性方向の結果に対してスプライン曲線近似を施している．この材料では異方性の度合いが比較的小さいため（$E_1/E_2=1.3$），異方性による最大エネルギ解放率の違いは，異なるθ_Mでの解析結果の平均値で13%程度しか現れていない．異方性軸の方向θ_Mの小さいうちは曲線はやや左寄りになり，最大エネルギ解放率を示すθ_Kも若干，負の方向に現れているようである．このことを詳しくみるために**Fig.–4.37**(b)に$\theta_M=0$から$\pi/4$までの結果の拡大図を示した．この図から$\theta M=\pi/6$の場合が，最大エネルギ解放率を示すθ_Kが最も負の方向にずれていることがわかる．

Fig.–4.38は異方性軸の方向と$\theta_K=0$の場合のエネルギ解放率の関係を示した図である．ここでも**Fig.–4.37**と同様にエネルギ解放率は正規化されている．この図には，**Fig.–4.36**で推定したエネルギ解放率の異方性軸の方向に対する関係が正弦関数的な形を呈するということがより明確に現れている．



(a)for the kinking angle $-\pi \leq \theta_K \leq \pi$.



(b)for the kinking angle near the maximum energy release rate.

Fig.– 4.37 Energy release rate for a kinking crack in GFRP.

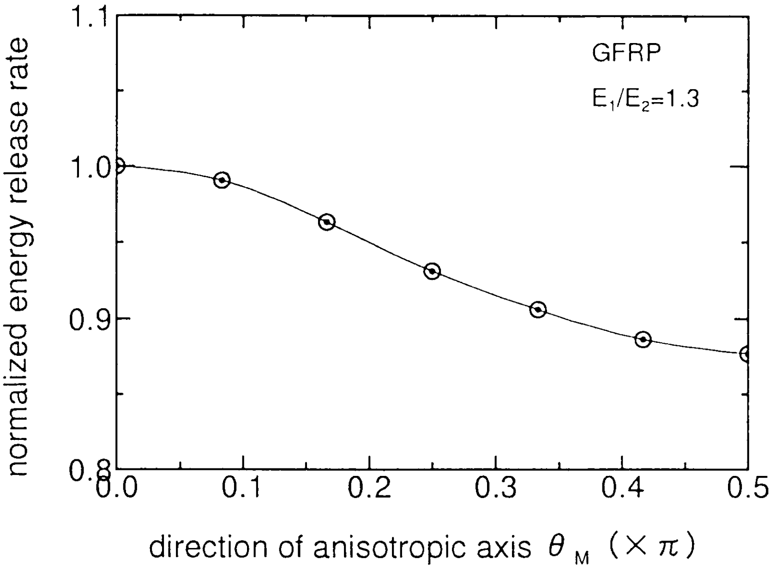


Fig.– 4.38 Relation between the direction of anisotropic axis and the energy release rate for a straight extending crack in GFRP.

4.7 弾塑性体への適用

超弾性体ではエネルギ解放率を与える経路独立な E 積分およびJ積分は弾塑性において，特に材料の弾塑性挙動を比較的うまく表現する増分理論では，エネルギ解放率としての意味は失う．その場合，J積分は物理的意味が不明瞭になるが，E 積分はある（荷重）状態に達するときに必要とされる外力がなすべき仕事のき裂長さの違いによる差という意味を有するため，塑性材料でも破壊基準としてのパラメータとして有効と考えられる[41]．E 積分の有限要素解析への適用は線形弾性体に対しては有益な結果を得ているが，弾塑性体へ応用する場合，時間とともに単調に増加するパラメータに関する積分（例えばモデルの変形挙動が単一荷重Pで制御されるならPに関する積分）を必要とするため線形材料に対する扱いに比べ複雑になる．本研究では E 積分の増分理論を用いた弾塑性解析を行い，同時にJ積分[42]，Riceの簡便式による評価値[43]（式 (2.84)），載荷節点力と載荷点変位による全エネルギ法による評価値[44]（式 (2.38)）の解析を行い，それぞれの弾塑性解析における比較検討を行った．

4.2節で扱ったように非線形材料に適用可能な E 積分の表示式は積分経路

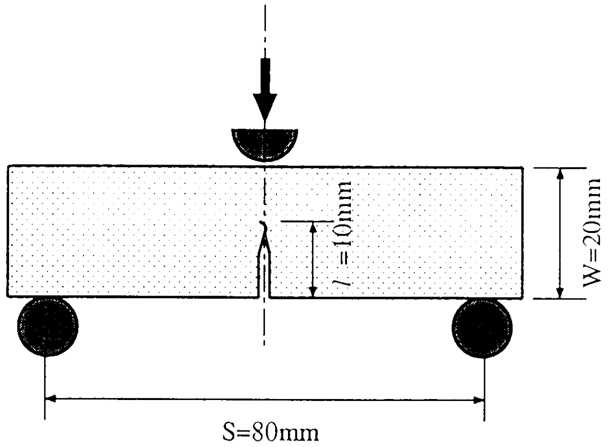


Fig.– 4.39 Three point bending specimen with a crack for the finite element analysis.

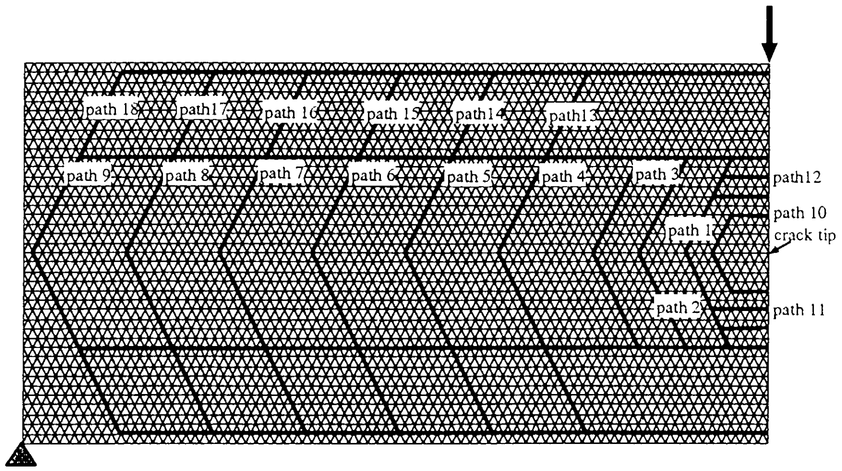


Fig.– 4.40 Finite element meshes and the integral paths for three point bending specimen model.

上の表面力ベクトル，および変位ベクトルをそれぞれs，uとして

$$E(\ell,\alpha)=\int_{\Gamma}\int_{0}^{\alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \ell}-\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \ell}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \beta}\right)d\beta d\Gamma \tag{4.9}$$

で表される[45)]．前節と同様ℓはき裂長さ，βはℓと独立な時間とともに単調増加するパラメータ（以後荷重とよぶ．）である．また，E積分の評価は式(4.5)，(4.6)と同様

$$E=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\{\boldsymbol{s}_{i,j+1}(\ell)-\boldsymbol{s}_{i,j}(\ell)\}\cdot\frac{\{\boldsymbol{u}_{i,j}(\ell+\Delta\ell)-\boldsymbol{u}_{i,j}(\ell)\}}{\Delta\ell}-\frac{\{\boldsymbol{s}_{i,j}(\ell+\Delta\ell)-\boldsymbol{s}_{i,j}(\ell)\}}{\Delta\ell}\cdot\{\boldsymbol{u}_{i,j+1}(\ell)-\boldsymbol{u}_{i,j}(\ell)\}\right]d\Gamma \tag{4.10}$$

$$E=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[\{\boldsymbol{s}_{i,j+1}(\ell)-\boldsymbol{s}_{i,j}(\ell)\}\cdot\frac{\{\boldsymbol{u}_{i,j+1}(\ell+\Delta\ell)-\boldsymbol{u}_{i,j+1}(\ell)\}}{\Delta\ell}-\frac{\{\boldsymbol{s}_{i,j+1}(\ell+\Delta\ell)-\boldsymbol{s}_{i,j+1}(\ell)\}}{\Delta\ell}\cdot\{\boldsymbol{u}_{i,j+1}(\ell)-\boldsymbol{u}_{i,j}(\ell)\}\right]d\Gamma \tag{4.11}$$

とする．ここで，mは積分経路上の要素辺数，nは荷重積分点数，sは各要素辺における表面応力ベクトル，$d\Gamma$は各要素辺長，uは各要素辺上における変位ベクトル，そして$\Delta\ell$はき裂進展長さである．また変数$\ell+\Delta\ell$とℓはそれぞれき裂進展後と進展前の物理量を表している．ここでも上2式を平均して，いわゆる台形公式に準じた数値積分を行った．

解析モデルはASTMの破壊靭性試験などにみられる3点曲げ供試体モデルで，幅$W=20mm$，支点間距離$S=80mm$，き裂長さ$\ell=10mm$である（**Fig.–4.39**参照）．このモデルの定ひずみ三角形要素分割はこれまでのモデル同様**Fig.–4.40**（1/2領域）のようにとった．図中,ここで用いた18本（き裂先端に対して上下，左右対称）の積分経路が記してある．材料の特性値はヤング係数$21000kgf/mm^2$，ポアソン比0.3，降伏応力$49kgf/mm^2$，加工硬化率$210kgf/mm^2$としている．要素の降伏はMisesの降伏条件によるものとし，解析に際してはき裂進展後のモデルに着目して，き裂進展モデルの任意の1要素が新たに降伏する時を各荷重積分点とした．すなわち，き裂進展モデルの新たな要素が降伏する荷重を決め，その要素に対して塑性構成式を用いてもう一度解析した．き裂長さの異なる2つのモデルを扱うので1荷重積分点につ

いて計4回解析することになる．この解析法は降伏要素が増えるにしたがい，荷重増分が著しく小さくなり，誤差がある段階を越えると蓄積されることになる．ここでは，その誤差があまり大きくならない時点で計算を打ち切った．

第1ステップ（j=1）における各解析値を弾性解で正規化して経路毎に図示ししたものが**Fig.–4.41**である．ここでJ積分値はほぼ経路独立性を示しているが，E積分値はき裂先端近傍の応力勾配の大きい部分の経路に誤差を含んでいる．しかし，そのような部分を除けばE積分値の方が弾性解に近い値を示し，全エネルギ法とほぼ同じ値を示している．Riceの簡便式による値は，全面降伏状態で有効とされており，この場合，弾性挙動が変形挙動のほとんどを占めるため，弾性解と大きく異なっている．**Fig.–4.42**は荷重-荷重点変位図を示している．前述のように荷重点変位が0.3mm以上で誤差が大きくなっていると思われるため，0.3mm程度までを議論の対象にする．荷重点変位が0.3mmのときの塑性域を**Fig.– 4.43**に示す．このときのJ積分値とE積分値を**Fig.–4.44**に示す．ここでは載荷点近傍の塑性域を含む経路（path13∼path18）と，含まない経路（path1∼path9）で大きな差をJ積分値，E積分値とも示している．このことは，塑性域を新たに横切らない限り同一の値を持つという意味で，J積分値もE積分値も塑性域固有の量であることを意味する．**Fig.–4.45**，**Fig.–4.46**には荷重点近傍の塑性域を含まない経路（path9）と含む経路の代表的な経路（path18）について解析値を荷重点変位に対して図示している．両図において経路9のJ積分値を除いてはすべての解析値が塑性域が広がるにしたがいRiceの簡便式に近づいていることがわかる．またE積分値は経路9よりも外側の経路18の方が全エネルギの値に近い．以上のことを総合すると，今回は，誤差を回避するため全断面降伏状態まで解析しなかったので明確に結論は出来ないが，すでに報告にあるRiceの簡便式は実際はJ積分ではなくE積分の簡便式であること[41)]，E積分の経路を物体表面にとれば全エネルギ法と等価であることが推察可能な結果であると判断できる．

本節では破壊力学的パラメータE積分の弾塑性解析を行い，弾塑性におけるE積分の意味について検討した．その結果E積分はすでに報告にあるように塑性域固有の量であること，全エネルギ法の一般的な表現となっていること，さらにはJ積分の簡便式といわれているRiceらの評価法はE積分の簡便式であることなどが有限要素解析によりある程度説明できた．

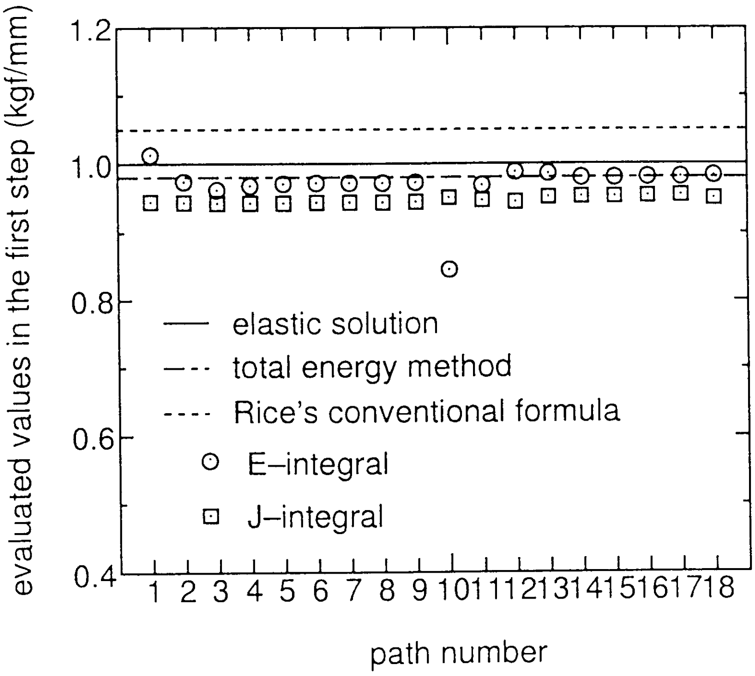


Fig.– 4.41 Normalized computed values in the first load step.

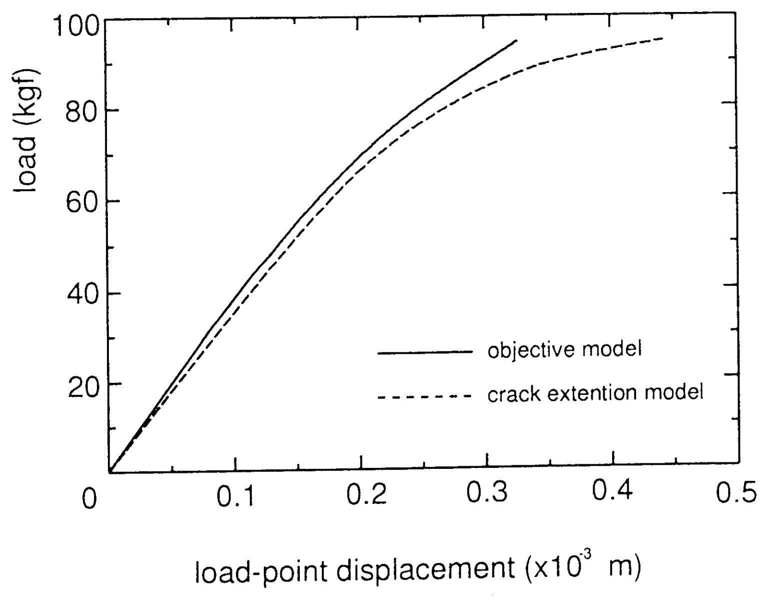


Fig.– 4.42 Relationship between a load and a load-point displacement.

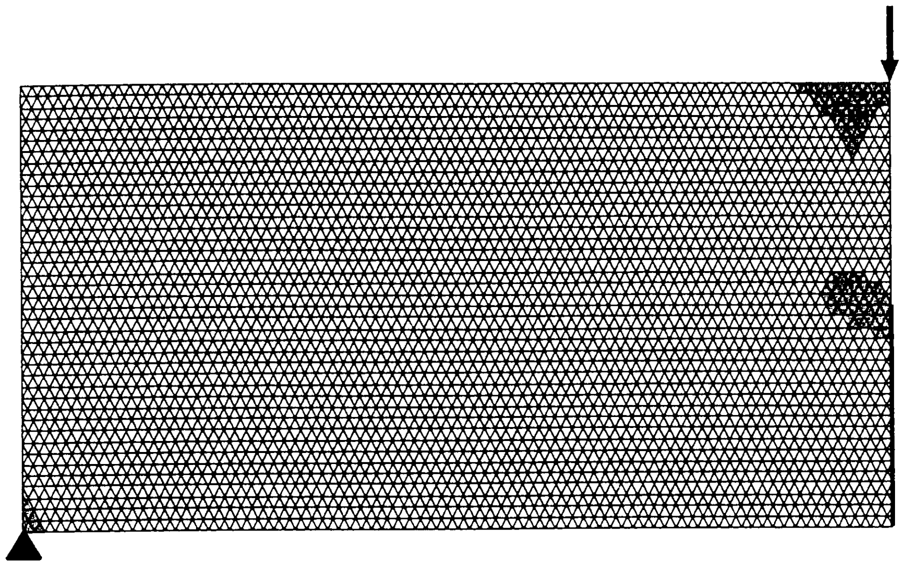


Fig.– 4.43 Plastic regions for a 0.3mm load-loint displacement.

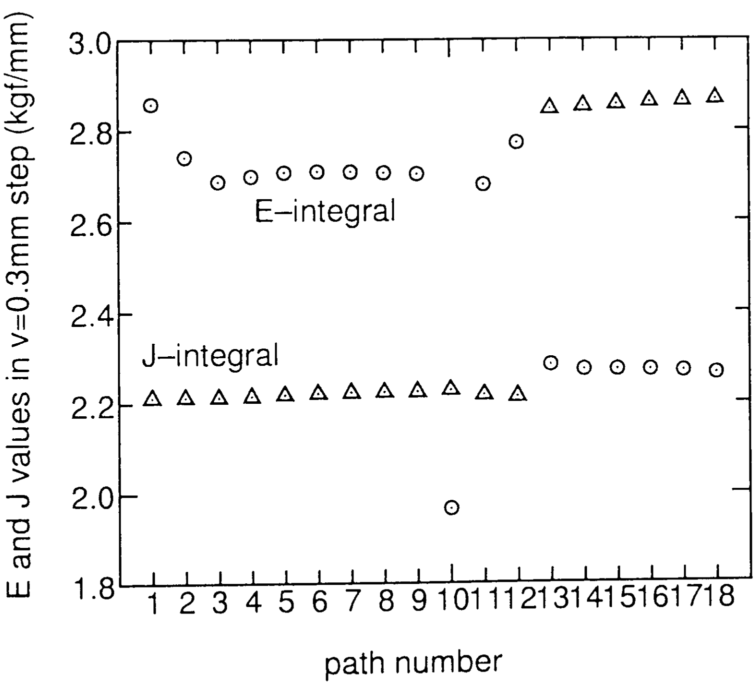


Fig.– 4.44 E and J integral values for a 0.3mm load-point displacement.

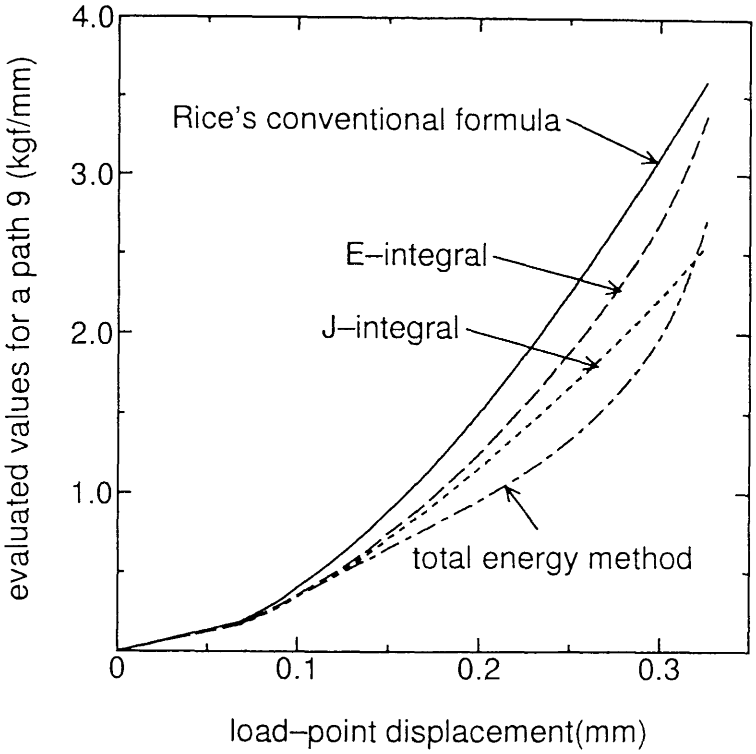


Fig.– 4.45 Integral values for a path 9.

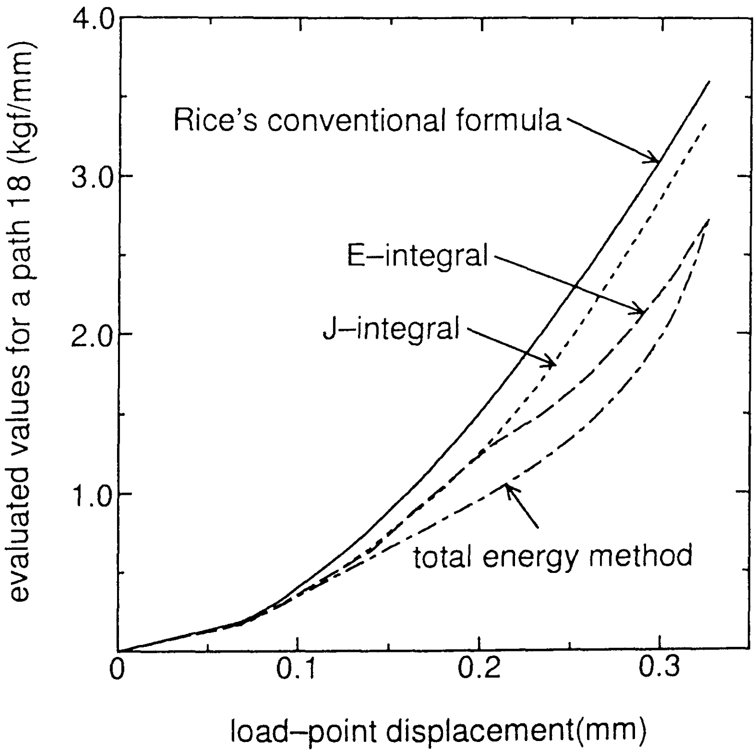


Fig.– 4.46 Integral values for a path 18.

4.8　有限要素特性と精度の向上

本節では，有限要素解析の8節点アイソパラメトリック要素を用いた E 積分の解析を行った．用いたモデルは片側切り欠きを有する帯板引張モデルである．

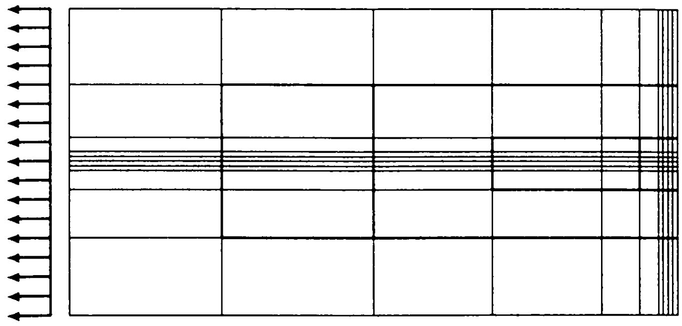


Fig.– 4.47 Finite element mesh for the eight–noded isopramemetoric finite element.

有限要素モデルを基本的には**Fig.–4.47**に示すメッシュ分割を用いた．積分経路は図に示すように要素辺上に設けたが，節点変位により節点変位と要素内応力の関係を用いて求められる要素境界応力は精度に大きな誤差を含むため，その影響が E 積分値にも表れる．そこで応力はガウスの積分点でのみ求め積分経路内外の積分点要素応力を1次近似して要素辺上に外挿する方法を採用した．アイソパラメトリック要素の辺上の線積分は局所座標形の数値積分により容易に求めることができる．

その結果，以下のことが明らかになった．

1. **Fig.–4.47**に示すようなメッシュ分割でもJ積分値はき裂先端に特異要素を用いる限り，既報の級数解にほぼ一致するよい精度が得られた．

2. アイソパラメトリック要素の場合，き裂進展長さに非常に敏感で微分項を2点差分で十分な精度を得ようとするとき裂進展長さ$\Delta\ell$とき裂長さℓの比（$\Delta\ell/\ell$）が1/150以下になるようにき裂進展長さをかなり短くする必要がある．ただし，アイソパラメトリック要素では3点差分による方法が有効になりき裂進展長さを比較的長く設定しても3点差分であれば適当な精度が得られる．

3. アイソパラメトリック要素の場合，き裂進展モデルを考える際に節点

を解除するにはかなりの困難があるが仮想き裂進展を有効に使えば，容易な操作でき裂進展モデルが得られ，精度も向上する．

4. き裂先端隣接要素には特異要素の使用が不可欠なものになる．この場合，き裂の折れ曲がりを考えると折れ曲がり部分の応力の特異性も考えるべきであるが，折れ曲がり角が比較的小さい間は精度も高い．

以上の特性を利用することにより一定ひずみ要素を使用する方法より高い精度を得ることができたが，方法の取扱いとしては煩雑であり今後は対処する問題に応じて要素の選択を行うことが望ましい．

4.9 結言

本章では本論文の主要な内容であるE積分の有限要素法への適用について多角的にとらえて解析した．き裂の干渉[46)]や圧縮応力場のき裂の挙動などにも有効であることも確認できているが，アイソパラメトリック要素の適用も含めて今後，複雑なモデルの解析が期待される．これまでにE積分の有限要素解析で得られた知見を挙げると次のとおりになる．

1. 応力関数などを用いてこれまで解析された応力拡大係数やエネルギ解放率はE積分法で適当な有限要素を与えることにより1%程度の誤差をもって解析可能である．

2. 載荷状態が混合モードになる場合はき裂の折れ曲がり瞬間時のエネルギ解放率を解析することにより最大エネルギ解放率クライテリオンの立場からき裂の進展方向やき裂進展に必要な限界荷重が推定できる．

3. 異種接合材のような界面をもつ部材の解析はJ積分のように積分経路の界面補正をしなくてもE積分では経路独立性が保たれ，高精度でエネルギ解放率が得られる．界面を持つ部材は，機能傾斜材料など，今後有用性が増すものと考えられ，その意味でもE積分が重要な役割を果たすものと考えられる．

4. き裂近傍に介在物や空隙を有する場合のエネルギ解放率の変化も高い精度で得られていると考えられ，き裂進展に及ぼす空隙や介在物のき裂進展助長効果，抑制効果が明らかになった．この結果，岩石やセラ

ミックスの破壊靭性評価における誤差原因や誤差の範囲の予測などの説明が可能となる．

5. 載荷状態がモードIの開口型でも材料のもつ異方性の影響や部材界面などによって変形状態が混合モードになる場合，明らかにき裂の折れ曲がり挙動は確認できるが，載荷状態が混合モードになる場合に比べて小さい．

6. 弾塑性体への適用も可能であるが，その場合積分経路をモデル境界にとれば周知の簡便式とほぼ同様な値となる．このことは通常いわれている簡便式が「J積分の簡便式」ではなく，実際は「E 積分の簡便式」であることを示唆する．

以上，E 積分の有限要素解析により，これまで得られた所見を列挙した．今後の有限要素解析の対象としては特性の把握が急務となる新素材などの解析が挙げられるが，材料の複雑な挙動を表す非線形構成式に対しても物理的に解釈が明確な値を与えることから，E 積分による有限要素解析の今後の幅広い応用が期待される．

参　考　文　献

(1) 戸川隼人：続　マイコンによる有限要素解析，培風館，1983.

(2) たとえば，白鳥正樹，三好俊郎，松下久雄：数値破壊力学，実教出版，pp.66, 1980.

(3) Gross, B. and Srawley, J. E. : Stress-Intensity Factors for a Single-Edge-Notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function, NASA, Technical Note, D-2396, 1964.

(4) Irwin, G. R. : Analysis of stresses and strains near the end of a crack, J. Appl. Mech., Vol. 24, pp. 361-364, 1957.

(5) 矢富盟祥，橋本堅一，石田　啓：E積分による斜向荷重下でのき裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギ解放率の有限要素解析，日本機械学会論文集投稿中．

(6) Sih, G. C. : Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problem, J. Appl. Mech., Vol. 23, pp.51-58, 1965.

(7) たとえば, Tada, H. : A Note on the Finite Width Corrections to the Stress Intensity Factor, Engng. Frac. Mech., Vol. 3, No. 3, pp. 345-347, 1971.

(8) Lo, K. K. : Analysis of Branched Cracks, J. Appl. Mech., Vol. 45, No. 4, pp. 797-802, 1978.

(9) Wu, C. H. : Explicit asymptotic solution for the maximum-energy-release-rate problem, Int. J. Solid Structure, Vol. 15, pp. 561-566, 1983.

(10) Wu, C. H. : Fracture Under Combined Loads by Maximum-Energy Release-Rate Criterion, J. Appl. Mech., Vol. 45, pp.553-558, 1978.

(11) Wu, C. H. : Energy-Release Rate and Crack Kinking Under Combined Loading, J. Appl. Mech., Vol. 48, pp.520-524, 1981.

(12) Wu, C. H. : Elasticity problems of a slender Z-crack, J. Elasticity, Vol. 8, No. 2, pp.183-205, 1978.

(13) 北川英夫，結城良治，神原静夫：異材境界を横切る有限板中のき裂の応力拡大係数，日本機械学会論文集，Vol. 45, No. 397, A, pp. 1024-1032, 1979.

(14) 石田　誠，野口博司：任意分布き裂群を持つ接合半無限体の面内荷重問題，日本機械学会論文集，Vol. 49, No. 437, A, pp. 36-45, 1983.

(15) 結城良治，Cho, S. B.，松本敏郎，木須博行：Hetenyiの基本解を用いた効率的境界要素弾性解析，日本機械学会論文集，Vol. 53, No. 492, A, pp. 1581-1589, 1987.

(16) 結城良治，Cho, S, B.：異材界面き裂の応力拡大係数の境界要素解析，日本機械学会論文集，Vol. 55, No. 510, A, pp. 340-347, 1989.

(17) 結城良治，許　金泉：パーソナルコンピュータによる異材接合継手・界面き裂の境界要素弾性解析，日本機械学会論文集，Vol. 56, No. 527, A, pp. 1517-1523, 1990.

(18) 矢富盟祥，橋本堅一，石田　啓：界面貫通き裂および界面近傍き裂のエネルギ解放率のE積分による数値解析，日本機械学会論文集投稿中．

(19) editor-in-chief Murakami, Y. : Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, Vol. 1, pp. 3, 1987.

(20) 白鳥正樹，三好俊郎，松下久雄：数値破壊力学，実教出版，1980.

(21) Wu, C. H. : Maximum-energy-release-rate criterion applied to a tension-compression with crack, J. Elasticity, Vol. 8, No. 3, pp.235-257, 1978.

(22) Hussain, M. A., Pu, S. L. and Underwood, J. : Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II, ASTM STP 560, pp. 2-28, 1974.

(23) 橋本堅一，工藤洋三，矢富盟祥，中川浩二：花崗岩の亀裂の進展特性と破壊靭性異方性，岩盤力学に関するシンポジウム論文集, Vol.21, pp.446-450, 1989.

(24) 工藤洋三，橋本堅一，佐野修，中川浩二：花崗岩内に発生するクラックと鉱物粒の関係，資源と素材，Vol. 107, pp. 423-427, 1991.

(25) Tirosh, J. and Tetelman, A. S. : Fracture condition of a crack approaching a distance, Int. J. Fracture, Vol. 12, No. 2, pp. 187-199, 1976.

(26) Rubinstein, A. A. : Macrocrack-microdefect interaction, J. Appl. Mech., Vol.53, pp.505-510, 1986.

(27) Tamate, O. : The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension, Int. J. Fract. Mech., Vol.4, No.3, pp.257-266, 1968.

(28) 橋本堅一，矢富盟祥，石田　啓：岩石内の破壊き裂進展に関する破壊力学的一考察，岩盤力学に関するシンポジウム論文集, Vol.26, pp.106–110, 1995.

(29) 橋本堅一，矢富盟祥，石田　啓：き裂先端付近に介在物あるいは空隙がある場合のE積分によるエネルギ解放率の解析，構造工学論文集, Vol.41A, pp.499–508, 1995.

(30) Li, R. and Chudnovsky, A. : Energy analysis of crack interaction with an elastic inclusion, Int. J. Fracture, Vol. 63, pp. 247–261. 1993.

(31) 工藤洋三，橋本堅一，佐野修，中川浩二：岩石の主軸の決定，材料，Vol. 38, No. 426, pp.209–215, 1989.

(32) Dale, T. N. : The Commercial granite of New England, Bull. U. S. Geol. Surv., 738, pp.22–103. 1923.

(33) Osborne, F. F. : Rift, grain, and hardway in some Pre-Cambrian granites, Quebec. Econ. Geol., 30, pp.540–551, 1935.

(34) 佐野修，民部雅史，平野亨，工藤洋三，水田義明：弾性的対称性未知の岩石の弾性係数決定に関する研究，材料，Vol. 40, No. 449, pp.228–234, 1991.

(35) 工藤洋三，橋本堅一，佐野修，中川浩二：花崗岩の力学的異方性と岩石組織欠陥の分布，土木学会論文集，No. 370, Ⅲ-6, pp.189–198, 1986.

(36) 工藤洋三，橋本堅一，佐野修，中川浩二：瀬戸内地方の採石場における花崗岩質岩石の異方性，土木学会論文集，No. 382, Ⅲ-7, pp.45–53, 1987.

(37) 橋本堅一，矢富盟祥，石田　啓：E 積分による異方弾性体内のき裂折れ曲がり時におけるエネルギ解放率の数値解析，土木学会論文集，No. 513, I-31, pp. 17–25, 1995.

(38) Obata, M., Nemat-Nasser, S. and Goto, Y. : Branched Cracks in Anisotropic Elastic Solids, ASME J. Appl. Mech., Vol. 56, pp.858–864, 1989.

(39) Gao, H. and Chiu, C : Slightry Curved or Kinked Cracks in Anisotoropic Elastic Solids, Int. J. Solid Structure, Vol. 29, pp.947–972, 1992.

(40) S. A. アムバルツミャン：異方性板の理論，神谷紀生訳，森北出版，1975.

(41) 矢富盟祥：エネルギ解放率の新公式とその応用一多軸荷重の場合の簡便式一，材料，Vol. 35, No. 394, pp. 767–771, 1986.

(42) Rice, J. R. : A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech., Vol. 35, pp.376–386, 1968.

(43) Rice, J. R. Paris, P. C. and Merkle, J. G. : Some further results of J–integral analysis and estimate, ASTM STP 536, pp. 231–245, 1973.

(44) 三好俊郎：非線形破壊力学と有限要素法，日本機械学会誌，Vol. 79, No. 691, pp. 60–66, 1976.

(45) Yatomi, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, Int. J. Solid Structure, Vol. 19, pp. 183–187, 1983.

(46) 阿部孝弘，橋本堅一，矢富盟祥，小森友明：複数のき裂が相互に干渉する場合のエネルギ解放率の数値解析，岩盤力学に関するシンポジウム論文集, Vol.26, pp.66–70, 1995.

5　結論

破壊力学は材料の欠陥から破壊が生じるとして仮定して，材料の破壊を議論するため発展してきた力学である．換言すれば，き裂の力学と考えられる．欠陥近傍の応力場が弾性学的に応力特異性を持つことから，対処すべき点，究明すべき点が多く，線形弾性体に基づく応力拡大係数や応力特異性のオーダーの解析に興味が注がれてきた．そして現在でも新しい対象モデルで多くの研究者が労力を費やしている．このような線形破壊力学における諸問題を解決することは，力学的には重要で非常に意義があることである．しかし，一般的には，材料が準静的に力を受ける場合，線形特異応力場の挙動を示すことは少なく，工学的には非線形ないし弾塑性的な挙動の解明が重要となる．そのような場合，線形破壊力学に基づいて材料の破壊靭性評価を材料固有の物性値として得ることは不可能である．例えば，今後ますます発展していく材料の構成関係理論に対して応力拡大係数で対応することは，応力拡大係数の背景には線形弾性力学があるためその使用には自ずと限界がある．これらの意味から，材料の構成関係を忠実にとらえることは今後ますます重要となり，それに対処できるパラメータが不可欠となる．

弾塑性体に適用可能なパラメータとしてJ積分が挙げられる．J積分は線形弾性体ではエネルギ解放率を与え，応力拡大係数と一意的な関係があるため線形材料についても多くの研究報告がみられる．しかしこれらは，有限要素法などでの解析で比較的容易で高い精度が得られるため，応力拡大係数の解析の手法として位置づけられる報告が多い．J積分の弾塑性解析もいくらかみられるが[1)〜4)]，比較的容易な構成関係を用いており，界面部材や異方性材料の弾塑性解析を考えれば扱いが非常に困難になる．

本論文は破壊力学におけるパラメータのE積分を有限要素解析を中心にまとめたが，前述のような変形挙動の複雑な非線形弾性体ないし弾塑性体で材料の破壊を考えることを最終的な目標に置いている．E積分は，弾塑性体においても物理的意味が明確であり，破壊靭性の評価もE積分の概念で直接行えるなど，これまでの破壊力学のパラメータにない特徴を有す．したがって，材料の破壊を考えるための一貫したパラメータとして用いることができる．

先頃，起こった阪神大震災は活断層が起因している．活断層型の地震は

材料の破壊のメカニズムと若干違いはあるが，破壊力学的にとらえることができ，特にGriffithの理論が基本的理論となっている[5)]．すなわちモードII，モードIIIの変形様式が生じるような応力場が存在する．これらの詳しいメカニズムを分析することは地震学者だけでなく応用力学者の考え方が大いに必要である．また，非破壊検査的に材料の欠陥を見出すことへの技術は年々向上しているが，実際にはその欠陥が破壊に対して安全なのか否かを評価することが重要である．しかしそれに対する方法を考えることは難しく不明瞭な点が多い．このような視野を広げた範囲でも破壊力学的に解明を急がなければならない点が多い．これらの問題に対してもE積分は適用可能な要素を有しており，今後の発展が期待できる．

参考文献

(1) 三好俊郎：非線形破壊力学と有限要素法，日本機械学会誌，Vol. 79, No. 691, pp. 60–66, 1976.

(2) 材料強度および破壊基準の評価とその工学的応用に関する研究分科会：J積分数値解析の比較，日本機械学会論文集，Vol. 47, No. 417, A, pp. 559–564, 1981.

(3) 坂田　勝，青木　繁，岸本喜久雄，神沢守仁，小樽直明：J積分解析における板厚効果，日本機械学会論文集，Vol. 48, No. 429, A, pp. 574–589, 1982.

(4) 三好俊郎，吉田有一郎，白鳥正樹：不安定延性破壊におけるJ積分の評価と安定性解析，日本機械学会論文集，Vol. 50, No. 453, A, pp. 904–911, 1984.

(5) 島崎邦彦，松田時彦編著：地震と断層，東京大学出版界，1994.

謝辞

著者は爆薬および静的破砕剤の効果的破壊に切り欠き利用を導入した際，その理論付けに破壊力学の適用を考えて以来，岩質材料の破壊靭性評価やE積分の有限要素解析を通じて広く破壊力学に関わってきました．本論文はその間10年以上におよぶ研究を，主に平成6年度に内地研究員として金沢大学で研究に従事したときの成果を中心にまとめたものです．本論文を執筆するにあたっては金沢大学工学部教授矢富盟祥先生に，始終懇切丁寧な御指導を賜りました．また矢富先生には山口大学教授中川浩二先生にご紹介いただきましてこのかた，破壊力学に関する理論はもとより，力学全般について非常に詳しいご教授を賜りました．そして私的な相談にも親身になって応じていただきました．ここに深く感謝する次第です．金沢大学工学部教授石田啓先生には内地留学の申し出に快く応じていただいただけでなく，研究にふさわしい恵まれた環境を提供いただきました．またその際，特に研究に対しては幅広いご指導を賜りました．そして公私共にお世話いただきました．ありがとうございました．

前述の中川浩二先生および徳山高専教授工藤洋三先生には長年，研究の進め方や論文の書き方など多くのご指導をいただきました．

金沢大学工学部の由比政年先生，斉藤武久先生には内地研究の際，同室で数々の便宜をはかっていただきました．また，同大学院生，鱸洋一氏には論文原稿の校正にご協力いただきました．

徳山高専助教授原隆先生には数値解析やコンピュータに関する多くの問題にご協力いただきました．

その他，多くの方々のご指導，ご協力ならびにご支援をいただきまして本論文をまとめることができました．深く感謝いたします．

最後に，結婚以来10年間苦楽をともにした妻，孝枝および心の支えとなってくれた結衣，征磨に「ありがとう」の言葉を贈りたい．