The study on Analysis of Elastic Medium Having Cavity or Rigid Inclusion of Various Shapes under In -Plane and Out-of-Plane Loadings and an Experimental Determination of Stress Intensity Factor

氏　　　名	生水雅之
生年月日	
本　　　籍	石川県
学位の種類	博士（工学）
学位記番号	博甲第166号
学位授与の日付	平成８年３月25日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第４条第１項）
学位授与の題目	面内・面外荷重下での各種形状の空孔または剛体介在物を有する弾性体の解析および応力拡大係数の実験的決定に関する研究 (The Study on Analysis of Elastic Medium Having Cavity or Rigid Inclusion of Various Shapes under In-Plne and Out-of-Plane Loadings and an Experimental Determination of Stress Intensity Factor)
論文審査委員	（主査）広瀬幸雄 （副査）茶谷明義，石田　啓 佐々木敏彦，平嶋健一

学位論文要旨

The purpose of this paper is to present the unified analysis of elastic medium with various cavities or rigid inclusions under in–plane and out–of–plane loadings at infinity as well as experimental determination of stress intensity factor. The stress and displacement are analyzed at the boundaries of cavities or rigid inclusions with various shapes including an arbitrary–shaped elastic inclusions. The analysis is based on the complex variable method using a conformal mapping technique. The stress singularity and stress intensity factor around a corner point of a cavity or a rigid inclusion are examined. Numerical examples are shown by graphical many representations using the theoretical results for the closed–form analytical solutions. Numerical results are in agreement with those of several investigators as particular cases of our solution.

The caustic method is useful technique to determine values of the stress intensity factor *K*. This method is applied to specimens with not only various thickness and different degrees of open notches but also an oblique crack. A method based on the distribution of three–dimensional stress field is proposed to obtain values of *K* from caustic images.

従来までの弾性力学やそれに基づいた線形破壊力学を考えるとき，これまでの多くの研究者たちの努力により種々の問題に対する解析解が数多く求められ，それらに基づいた応力拡大係数*K*もハンドブックとして整備され，その適応範囲も拡大してきていることが理解される．しかし，それらは各研究者によって個別的に求められたものであり，必ずしも個々の問題に対して実用的でない面があり，今後幾つかの問題に対して十分適応可能な

解析解として統一性・汎用性をさらに高めていく必要がある．

一方，それらと並行した実験分野においても，これまで様々な手法についての体系化がなされてきている．特に，実験応力解析の分野においては，X線応力測定にみられるように，多くの研究者による理論構成を含めた体系化が今日に至るまで進められている．そのなかで，線形破壊力学の最も基本的パラメータである応力拡大係数Kの実験的決定法としてコースティックス法がある．実験装置が比較的簡便であること，またき裂先端近傍の情報に基づき直接K値が求められるので誤差が少ないことから，近年さまざまな問題ー例えば界面問題，動的破壊問題，熱問題および異方性問題等ーへの適応にみられるように，他の分野との融合を計りながら，応力測定一般とは異なった独自の展開が行われている．しかし，コースティックス法に関するこれまでの基礎理論は，き裂または切欠き先端近傍における特異平面応力場の成立を仮定しているため，種々の問題への適応に際して一定の制約を受けざるを得ず，今後明らかにすべき問題点も内在している．

そこで本研究においては，弾性力学においては一般的な複素応力関数を用いて，各種形状の空孔または剛体介在物を有する２次元等方弾性体に無限遠から任意傾斜の面内・面外荷重が作用する問題および任意形状の弾性介在物を有する面外問題について閉じた型での弾性厳密解を統一的に導出し，得られた解を用いて数値計算を実施し，本解析の妥当性について明らかにする．また同時に応力拡大係数Kの実験的決定法として一般的な透過型および表面反射型コースティックス法を取り上げ，K値決定法ならびにその決定法に影響を及ぼす因子について検討を行い，その有効性について明らかにすることを目的とする．

以下，本研究における【写像関数】，【境界条件の設定】，【応力特異性のオーダと応力拡大(特異)係数】および【コースティックス法(基準モード)】について簡単に説明する．

【写像関数】　本研究において用いた，写像関数$\omega(\zeta)$を以下に示す．

<u>(Ⅰ)正多角形境界の場合</u>

$$z=\omega(\zeta)=a\ \{\zeta+\sum_{n=1}^{m}\beta_n\zeta^{-(kn-1)}\}\ /\ (1+\sum_{n=1}^{m}\beta_n). \tag{1}$$

ここに，aは正k角形(k=3,4,･･･)の対角線の半長を表し，β_nは物理平面内の境界の幾何形状によって定まる複素定数であり，mは写像関数の級数展開項を示している．

<u>(Ⅱ)ひし形境界の場合</u>

$$z=\omega(\zeta)=a\ \{\zeta+\sum_{n=1}^{m}\beta_n\zeta^{-(2n-1)}\}\ /(1+\sum_{n=1}^{m}\beta_n). \tag{2}$$

ここに，aはひし形の長軸の半長を表し，β_nは物理平面内の境界幾何形状によって定まる複素定数であり，ωはコーナ部の開き角を示している．

<u>(Ⅲ)任意形状の境界の場合</u>

$$z=\omega(\zeta)=C\sum_{n=-1}^{\nu}\lambda_n\zeta^{-n}. \tag{3}$$

ここに，Cおよび$\lambda_{-1},\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_\nu$は，境界の形状により定まる複素定数である．

以上のように，式(1)～(3)に示す写像関数$\omega(\zeta)$を用いることにより，z−平面上の各種形状の境界とその外部領域は，ζ−平面上の単位円とその外部領域に等角写像される．す

なわち正多角形境界においては，式(1)により任意の正k角形に拡張して問題を扱うことができる．またひし形境界においては式(2)により，隅角部の開き角が鈍角の場合からき裂までを対象とすることができる．さらに任意形状境界の場合，式(3)に示すように最も一般的な級数型で与えることとした．なお，式(1)および(2)における写像関数の特徴として，級数展開項mを増大させることによって，各種形状の境界のコーナ点における曲率半径は有限値ではあるが極めて小さくなる．これとコーナ点における応力との関係を利用して，後述の応力特異性のオーダ λ と応力拡大(特異)係数 *SIF* が決定できることになる．

【境界条件の設定】　本研究における境界の条件は，複素応力関数 $\Phi(\zeta)$, $\Psi(\zeta)$ および写像関数 $\omega(\zeta)$ を用い，面内問題に関して次式のように設定する．すなわち，写像平面における境界上の点を $\zeta = e^{i\theta}$ とするとパラメータ k_0 を介して，次式で表すことができる．

$$k_0 \omega'(\zeta)\overline{\Phi(\zeta)} - \overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) - \Psi'(\zeta) = 0. \tag{4}$$

ここに，パラメータ k_0 は境界の条件により，次のような値をとる．

$$k_0 = \begin{cases} -1.0 & \cdots\cdots \text{境界が自由境界の場合} \\ \kappa & \cdots\cdots \text{境界が固定境界の場合} \end{cases} \tag{5}$$

以上のように，パラメータ k_0 を用いることにより自由および固定境界の場合を統一的に扱うことができる．また，同様に面外問題においても類似の算定式が定義される．なお，第５章において取り扱った弾性介在物問題については紙面の都合上，ここでは省略する．

【応力特異性のオーダ λ と応力拡大(特異)係数 *SIF*】　正多角形境界，ひし形境界のコーナ点および任意形状のCusp先端においては一般に応力集中点が存在する．本研究においては，前二者についての λ および *SIF* の検討を行う．式(1)および(2)の級数の項数mを増大させることにより，その点での応力は有限値であるが極めて大きくなる．これらの値に基づいて応力特異性のオーダ $\lambda(\mathrm{m})$ を次式で定義する．

［面内問題］

$$\lambda(\mathrm{m}) = ln\ [(\sigma_y+\sigma_x)_{n=m+50}/(\sigma_y+\sigma_x)_{n=m}] \;/ln\ [\rho(\mathrm{m})/\rho(\mathrm{m}+50)]\ . \tag{6}$$

さらに，$\lim_{\rho\to 0} \lambda(\mathrm{m}) = \lambda$ ととれば式(1)および(2)の写像関数の級数の項は極限操作が可能となって，*SIF* が次式で定義される．

［面内問題］

$$SIF = \lim_{\rho\to 0}(\rho/\mathrm{a})^{\lambda}(\sigma_y+\sigma_x). \tag{7}$$

なお，面外問題においても同様に，式(6)～(7)と類似の算定式が定義される．

【コースティックス法(基準モード)】　応力拡大係数 K の実験的決定法にコースティックス法がある．切欠きを有する試験片に負荷を与え，光を入射させスクリーン上に透過光または反射光を映し出す場合を考える．切欠き先端近傍においては，応力集中により試験片の板厚および屈折率が変化する．そのため光の光路長が変化し，光の方向が曲げられスクリーン上には光が集中して明るい包絡線ができ，その内側は光のこない暗い領域の像ができる．この光の包絡線で形成される像がコースティック像であり，この像の大きさおよ

び形状より応力拡大係数を決定することができる．基準モード(*Mode* Iに相当)の場合，実験的応力拡大係数K_{exp}は像の最大直径の大きさD_t^{max}との関係において次式で表すことができる．

$$\left.\begin{aligned} &K_{exp}=\delta_\lambda(\phi)\cdot\left[D_t^{max}\right]^{(2-\lambda)}\cdot\frac{1}{|2c'|}, \\ &\text{ここに，} \\ &\delta_\lambda(\phi)=\frac{2^{(\lambda-2)}}{\lambda(\lambda-1)}\cdot\left[\sin\frac{\pi}{2-\lambda}+\frac{1}{|\lambda-1|}\sin\frac{\pi(1-\lambda)}{2-\lambda}\right]^{(\lambda-2)} \\ &c'=z_0\cdot|c_t|\cdot t/(\sqrt{2}\pi) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

r_0：初期曲線の大きさ，ϕ：切欠き開き角，λ：応力特異性のオーダ，
z_0：試験片とスクリーンとの距離，c_t：試験片の光学定数，t：試験片板厚．

以上のように，D_t^{max}を実測することにより比較的簡単にK_{exp}が決定できる．本研究においては，これと理論的応力拡大係数K_{the}との関係について考察を行った．

以上，本研究における幾つかの基本的な事項について簡単に述べた．次に，本研究論文の第２章〜第７章までの内容について，得られた成果を要約して記述する．

第２章においては，無限遠から任意傾斜の面内および面外荷重が作用する２次元等方性弾性体内に単一の正多角形の空孔または剛体介在物が存在する問題に対して，これまでの複素係数の場合分けという手続きを行わずに，正多角形問題に拡張し汎用性のある形で解析解の導出を行った．次に，それらの解に基づき応力集中点である境界のコーナ点における特異性のオーダおよび応力拡大(特異)係数を求めた．本結果はこれまでの他の研究者によって求められた面内問題での特定の形状における解を，その特殊な場合として包含するとともに面外問題にまで拡張したものになっている．

第３章においては，第２章と同様な荷重条件下において，鋭いコーナ部を有する単一の各種ひし形空孔または剛体介在物の境界における特異応力解析を行い，コーナ点での応力特異性のオーダを求めた．さらに空孔境界における変位解析が完全に実施できる定式化を行い，各変形モードに対応したコーナ部近傍における開口変位(COD)を求めた．また，荷重形式としては面内のみならず面外問題にまで拡張して取り扱うことが可能である．

第４章においては，第３章で取り扱った順解析理論にしたがって，面内および面外荷重下における各種のひし形空孔の境界およびその近傍におけるひずみの計測値を用い，直接定式化法を用いた逆解析理論の提示を行い，具体的数値シミュレーションを行い逆解析の精度を検証した．本結果は，仮に実験において入力データに20%程度の誤差が伴う場合にも正確な逆解析を行うことが可能であり，空孔を有する媒体に対する物性値または作用応力値を高精度に同定できることが明らかとなった．

第５章においては，第２章〜第４章までの内容を拡張し，面外せん断荷重下での任意形状の弾性介在物問題を取り扱う．複素関数法により閉じた型での弾性厳密解を導出し，弾性定数および介在物の形状を変化させ，空孔および剛体介在物の結果を，その特殊な場合として包含する最も一般的な場合について数値計算例を提示した．さらに，境界がCuspを有する場合の先端部における応力集中について検討を行うとともに，弾性介在物の内部における応力分布を明らかにした．

第６章においては，応力拡大係数Kの実験的決定として，基準モードの場合(*Mode* Iに相当)について提示を行う．すなわち測定法として最も基本的な透過型コースティック

ス法を取り上げ，試験片板厚および切欠き先端部に導入した開き角が応力拡大係数の決定におよぼす影響について実験的に検討を行い，本法の有効性について明らかにした．また，コースティックス法では重要な因子となる初期曲線r_0の大きさについて考察し，3次元応力場の変化による光学定数の相対的補正に基づいたK値の簡便補正法を提示し，実用上十分な精度でK値が推定できることを明らかにした．

第7章においては，第6章の研究内容を発展させ，混合モード下(*Mode* Ⅰ+Ⅱに相当)の応力拡大係数Kの実験的決定について検討を行う．すなわち表面反射型コースティックス法により，傾斜切欠きを有する試験片を用い，応力拡大係数Kの決定におよぼす混合モードの影響について実験的に検討を行った．その結果，正確な$K_{\rm I}$および$K_{\rm II}$をそれぞれ分離して求めるために測定上必要な初期曲線r_0の限界値r_0^{min}を提示し，さらに切欠き先端近傍での応力状態を考察し，板厚方向の応力σ_zを考慮に入れた補正を行うことによりr_0の大きさによらずKの理論値の推定が可能であることを明らかにした．

学位論文の審査結果の要旨

各審査委員らによって，さきに提出された学位論文ならびに学位申請書類を個別に審査し，平成8年2月3日に開催した口頭発表の内容を踏まえ，同日審査会を開催し協議した結果，以下の通り判定した。

本論文は各種形状の空孔または剛体介在物を有する二次元等方弾性体に任意傾斜の面内・面外荷重が作用する問題および任意形状の弾性介在物を有する弾性体の面外問題に対して閉じた型の弾性厳密解を統一的に導出し，得られた解析解を用いて数値計算例を示したものである。また同時に応力拡大係数Kの実験的決定法としてコースティックス法に注目し，K値の決定法ならびにその際に影響をおよぼす諸因子についてまとめたものである。本論文で得られた成果は大別して次の2点より成る。

①各種形状の空孔または剛体介在物の境界における特異応力解析を行い，コーナ点での応力特異性のオーダおよび応力拡大係数を求め，隅角部の開き角が鈍角の場合からき裂までを対象とした任意点の応力・変位解析が可能であることを明らかにしている。また介在物を任意形状の弾性体に拡張し，上述の空孔または剛体介在物の結果をその特殊な場合として包含する最も一般的な場合について多数の例示を行っている。

②基準モード（*Mode* I）および混合モード（*Mode* I + II）の場合の応力拡大係数Kの実験的決定について検討を行い，切欠き先端近傍における三次元応力場の変化に基づいた光学定数の補正を行うことで初期曲線の大きさr_0によらず，より簡便に高い精度で理論値を推定できることを明らかにしている。本論文は，新たな弾性厳密解を統一的に汎用性のある形で導出するとともに応力拡大係数Kの実験的決定に対しても応用性・発展性の高いものとなっている。これらの成果は，今後新たな工学的な問題の解決が可能となるものである。したがって，本論文は十分に博士の学位論文に値するものと判定する。