様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年５月１９日現在

研究種目：基盤研究（Ｂ）
研究期間：2006～2009
課題番号：18340047
研究課題名（和文）　偏微分方程式の解に時間依存の特異点が現れる諸問題の新展開

研究課題名（英文）　New topics for partial differential equations whose solution has singular sets

研究代表者
小俣　正朗（OMATA SEIRO）
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号：20214223

研究成果の概要（和文）：時間発展の偏微分方程式で解に特異点が生じる問題群についての数学的解析と数値解法の開発を行ってきた。特に双曲型体積保存自由境界問題・放物型体積保存自由境界問題では解の存在と一意性について一定の結果を得た。すなわち、新しい弱解定義、構成、放物型については、弱解のヘルだー連続性を示した。また、数値解法についても、ラグランジェアンの停留点を求める方法論としての離散勾配流法の有効性を確かめるとともに、これを用いた連成解析用のソルバーを開発した。さらに、一部ソルバーについては並列化を行いパラレルマシン対応とした。

研究成果の概要（英文）：We have treated the problem that the solution of PDE has singular points such as defects or free boundary. We got several new approaching methods for hyperbolic and parabolic volume constraint free boundary problems such as the existence of weak solution, or Hoelder continuity of the solution in the parabolic case. In numerically, we developed a method to treat the stationary points for some Lagrangean via the discrete Morse Flow method. It became possible to solve stationary points by use of approximate minimizing method. Moreover, our solvers extended to apply to parallel machines.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	4,500,000	1,350,000	5,850,000
2007 年度	3,000,000	900,000	3,900,000
2008 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
2009 年度	2,300,000	690,000	2,990,000
年度			
総　計	12,100,000	3,630,000	15,730,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：変分問題、特異点、数値解析、自由境界、離散勾配流

１．研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式・変分問題で、解に特異点（不連続点、微分不可能な点など）が現れる問題を時間発展（特に双曲型）で取り扱う方法論の構築が重要であり、その解決を目指

した。研究開始当初は、このような特異点解析は時間に依存しない問題か、解の大まかな正則性が期待できる放物型方程式に限られていた。これらを双曲型方程式まで拡張して新たな知見を得ようと言う問題は全く新しかった。

このような状況下で、変分法に基づく新たな解法を求めたのが本研究である。最小化法は通常偏微分方程式よりも情報量が多く、得られる解の特性がよいことが知られていた。これを時間発展問題に、どのような方法論で広げていくかがポイントであった。特に双曲型方程式では、変分的扱いが難しく、双曲型自由境界問題は well posed な問題にならないとまで考えられていた。我々は、ある種の強い解については、問題が可解であることを突き止め、本研究の礎とした。

２．研究の目的

非線形偏微分方程式・変分問題で、解に特異点（不連続点、微分不可能な点など）が現れる問題、すなわち、解のグラフが「折れる」「切れる」などの特異集合を持つ関数が、微分方程式の解として考えられるようになった。しかしながら、これらの時間発展問題への拡張は自然な流れでありながら難問となっている場合が多い。’80 年代までは、このような分野の研究は楕円型方程式・変分問題が中心であったが、徐々にその興味の対象が放物型などの時間発展問題に移ってきている。しかしながら、正則性理論にたよる問題が多く見られ、これらの問題の双曲型への拡張は自然な流れでありながら難問となっている場合が多い。

本研究では、変分問題の解の「エネルギー密度が集中している、定義域よりも低い次元の集合」を特異点として捉え、対応する放物型、さらには双曲型の問題に対して解析を行う。目標は、弱解などの適切な定義と解の構成、特異点の次元推移の評価（幾何学的測度論の視点からの構造評価）などを数値解析を交えて探ることである。さらに、得られた知見を並列ソルバーなど数値的方法論として蓄積（ライブラリ作成）し、数学の断片的な結果を得るに終わらないよう配慮する。

３．研究の方法

離散勾配流法を用いた数値解析を行いつつ、解の挙動を予測して数学的解法を探るという方法論で研究を進めた。

本研究で対象となる諸問題は方程式の中に次のような扱いにくい項を含む。例えば、平面上の油滴の問題では油滴が平面より下に行かないため、退化する波動型オペレータが出現する。また、接触角がゼロでない場合、自由境界上にデルタ測度が出現する。さらに、体積保存条件（油的の体積が保存する）では、非局所項が出現する。

これらを含む問題を解く（解の存在定理を得る）ためには、「特異項を近似してから極限をとる」、「変分問題に持ち込む」などのテクニックを使う。このときの近似方法はなどは無数にあるが、物理的意味がはっきりした近似、数学的に合理的な取り扱いにしないと解が得られないと想像される。旧研究で扱った問題から派生した問題は、近似方法などを初歩から考えないと進展が見られないと思われる。研究者同士のアイデアを交換することは重要である。離散勾配流法の取り扱いとしては、時間差分を０に収束させる時に、いかに良い評価を保って、良い解に収束するかが問題である。当然、収束のトポロジー、速度、収束先の解の正則性が問題になってくる。また、双曲型の離散勾配流に限ると、弱い解と強い解の関係が今ひとつすっきりしなかった。これは正則性が期待できない場合が多いからである。このため、最初は、正則性のための damp 項の追加などして、特異点を保ちつつ、それが、分散して全体を破壊するのかどうか、それがどのような条件で起きるのかを探る方向になろう。特異極限をとる問題（液晶など）では、レイヤーでの解の補間方法などが大きな影響を与える。多相の場合、ジャンクションを込めての取り扱いで新しいアイデアが求められよう。

数値計算に置いては、モデリング終了時点で、ソフトウェアを開発し、モデルが現象を表現しているかどうか検討する。本研究で取り扱う問題は、申請者らがモデルを作り始めた問題が多い。このため既存の結果が使えない。それだけ、モデルの整合性チェックは注意深く行わなければならない。その第一の方法が数値計算である。マルチプロセッサ用のコード開発も重要になってくる。ソフトウェアの管理は代表者が行うが、分担者が使えるようにチューンアップも行う。

４．研究成果

研究計画に基づいて、(1)自由境界を持つ石鹸膜の振動問題について主要項をラプラス作用素としたものの近似解の構成と数値解析法の開発を行った。(2)双曲型の体積保存問題とそれに関連する自由境界問題についての近似弱解の構成と数値計算方法の開発を行った。(3)体積保存条件を持つ振動方程式を導きその弱解の構成を行った。(4)体積保存条件を持つ放物型方程式の弱解の構成とヘルダー連続性を示した。

数学的に詳述すると、双曲型および双曲型の体積保存問題とそれに関連する自由境界問題についての数学理論と数値計算方法の開発を引き続き行ってきた。non-local term を持つ退化双曲型自由境界問題は難問であったが、何とか基本アルゴリズムの開発を終えることができた。

この種の自由境界問題には、変分問題に基づく計算方法である離散勾配流法が大変有効であった。例えば、体積制約条件が無い場合の双曲型自由境界問題で近似方程式がうまく意味づけられ、弱解の構成が成功裏に行われた。また、自由境界付きでも空間次元が１の場合には体積保存条下である種の（非常に弱い）弱解の構成が行われた。

この問題は、物理的なイメージとしては、水面上の泡や、ガラス面上の液滴の時間発展ダイナミクスであり、その振動解析をするのが目標であった。空間微分の主要項を極小曲面方程式とすると自由境界が無くても解の存在が知られていない。よって、ここでは主要項はラプラシアンとした。これに対しても、菊地・小俣等の結果が知られているだけであった。

これらの知見のもとに数学解析と数値計算を行った。１次元の場合で弱解の存在、２次元の場合で、液滴の合体や分離も数値的に取り扱えるようになった。

さらに、内部構造をもつ物体の衝突問題も、この種の連成解析で実現できることが分かってきた。また、これに付随して出てきた放物型体積保存問題については、弱解の構成、弱解のヘルダー連続性などを示すことに成功している。

研究は、補助金のおかげと研究分担者の協力により順調に終了することが出来た。る。今後の課題としては、高次元の場合の解の存在、衝突問題などベクトル値の問題などに発展の方向を見いだしたい。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）

1. K.Svadlenka, <u>S.Omata</u>, Mathematical analysis of a constrained parabolic free boundary problem describing droplet motion on a surface, Indiana University Mathematics Journa 158(5) pp. 2073-2102(2009). 査読有

2. <u>S.Omata</u>, M.Kazama, H.Nakagawa, Variational approach to evolutionary free boundary problems, Nonlinear Analysis 71(2009) pp. e1547-e1552. 査読有

3. M.Kazama, <u>S.Omata</u> Modeling and computation of fluid-membrane interaction, Nonlinear Analysis 71 pp. e1553-e1559(2009). 査読有

4. K.Svadlenka, <u>S.Omata</u> Construction of weak solution to hyperbolic problem with volume constraint, Nonlinear Analysis, 69 3202--3212(2008). 査読有

5. K.Svadlenka, <u>S.Omata</u> Construction of solutions to heat type problems with volume constraint via the discrete Morse flow, Funkcialaj Ekvacioj, pp. ee50261-285(2007). 査読有

6. H.Yoshiuchi, <u>S.Omata</u>, K.Svadlenka, K.Ohara Numerical solution of film vibration with obstacle Adv. Math. Sci. Appl., 16, 1 33--43(2006). 査読有

7. T.Yamazaki, S.Omata, K.Svadlenka, K.Ohara Construction of approximate solution to a hyperbolic free boundary problem with volume constraint and its numerical computation, Adv. Math. Sci. Appl., 16, 1 57--67(2006). 査読有

〔学会発表〕（計 20 件）

1. <u>小俣正朗</u> 日本数学会秋期総合分科会特別講演 「付着・剥離・衝突現象の数理解析」 大阪大学,2009 年 9 月 26 日

2. <u>S.Omata</u>, Mathematical Theory and Numerical Calculations of Collision, Peeling and Attached Droplets, Invited Plenary Talk in The Second International Conference on Mathematics and Natural Sciences, Bandung Indonesia, 2008.10.29

3. <u>S.Omata</u>, Mathematical theory and numerical calculations of collision, peeling and attached droplets, Invited Speaker in The Second China-Japan-Korea Workshop on Numerical Mathematics Weihai, Shandong Province, 2008.8.26.

4. <u>S.Omata</u>, Variational approach to evolutionary free boundary problems, Keynote speaker(Invited Prenary talk) in World Congress of Nonlinear Analysis 2008 at Florida, 2008.7.4.

5. <u>小俣正朗</u>, Discrete Morse flow for nonlocal problems 変分問題とその周辺 京都大学数理解析研究所,2008 年 6 月 24 日

6. <u>S.Omata</u>, Motion of water droplets in contact with a surface, Ryukoku Workshop 2008 : Recent Progress on Pattern Formation and Dynamics in Mathematical Sciences, 2008.6.13 龍谷大学

7. <u>S.Omata</u>, Droplet Motion on a plane International Conference on Computational Science, International Conference on Computational Science: 3rd - 4th Dec.

2007. at Bandung Invited Talk, 2007.12.3
8. S.Omata, Droplet Motion on a plane Equadiff 07 5th -- 11th Augsut 2007, (Wien), 2007.8.10
9. S.Omata, Bubble Motion on Water Surface HK-Japan Workshop on Pattern Formations and Reaction-Diffusion Systems, Dec 14 -- 16, 2006, Institute of Math. Chinese U. of HongKong Invited Talk, 2006.12.15
10. S.Omata, Droplet motion with some contact angle Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006: September 14-16, 2006 Department of Mathematics, FNSPE CTU in Prague & Institute of Thermomechanics of the Czech Academy of Sciences, 2006.9.14
11. S.Omata, On a hyperbolic free boundary problem First Slovak-Japan workshop on Computational Mathematics, September 9-13, 2006 . ブラチスラバ, 2006.9.10

〔その他〕
ホームページ等
http://polaris.s.kanazawa-u.ac.jp/

６．研究組織
(1)研究代表者
小俣　正朗（OMATA SEIRO）
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号：20214223

(2)研究分担者
宮川　鉄朗（MIYAKAWA TETSURO）
金沢大学・自然科学研究科・教授
研究者番号：10033929
（H18→H19：連携研究者）

神保　秀一（JINBO SHUICHI）
北海道大学・理学系研究院・教授
研究者番号：80201565
（H18→H19：連携研究者）

菊地　光嗣（KIKUCHI KOJI）
静岡大学・工学部・教授
研究者番号：50195202
（H18→H19：連携研究者）

ヴァイス　ゲオグ（WEISS GEORG）
東京大学・数理科学研究院・准教授
研究者番号：30282817
（H18→H19：連携研究者）

山浦　義彦（YAMAURA YOSHIHIKO）
日本大学・文理学部・教授
研究者番号：90255597
（H18→H19：連携研究者）

(3)連携研究者
小林　健太（KOBAYASHI KENTA）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：60432902

長山　雅晴（NAGAYAMA MASAHARU）
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号：20314289