Problems related to the instruction of content across elementary and junior high schools

小・中学校を跨る内容の取扱いに関する問題点について

Problems related to the instruction of content across elementary and junior high schools

米田　力生
Yoneda　Rikio

概要

現在行われている小学校から中学校へと跨る内容を取扱う際に注意すべきことと、そこに存在する課題を明確にし、具体的にどのようにそれを改善していくべきなのかに関して、本研究では「比例」に焦点を当て具体的に考察を進めていきます。比例という概念は、小学校から中学校において教育が行われていますが、定義として採用されているものに違いがあります。出発点でもある定義の違いからくる連続的な教育の難しさ、理解の難解さが存在します。そこで今回はこの問題点を取扱うことにします。

まずは比例がどのような必要性から考え出され、どのように利用されてきたのかという流れをその開発の歴史より探り、それを踏まえながら小学校及び中学校で現在行われている教育の問題点を探っていくことにします。

「比例」という考え方はギリシャの昔から数学の中心的テーマとして議論の的であり、「マテマタ」には今では考えられない音楽が含まれていたようです。有名な数学者であるピタゴラスは音楽の祖であったことは有名です。ピタゴラス音階（指数関数が関係している）というものが今でもごく稀に使用されているようです。そしてそれは多くの人が想像するような芸術性のある音楽ではなく、複雑な比例の理論だったようです。また、ルネサンス時代から商取引が盛んに行われるようになり、もっと実用的な比例の問題を解く必要性にせまられました。そこでの典型的な比例問題とは、「８００グラムが５０００円である肉を１２００グラム買ったら、その値段はいくらになるのでしょうか」という内容のものでした。このように、商品を売る側、買う側にとって必要な問題となったのです。もちろん今日も日常生活で必要な考え方でしょう。これは小学生及び中学生が比例を学ぶ必要性にもなるのですから、この必要性を痛感させることが教員として重要になります。次に、この問題を解く方法に関してですが、その当時から３つの方法が知られていました。

肉		値段
800 g	⇒	5000 円
1200 g	⇒	□　円

１つ目の方法としては、

式：□＝（5000 円×1200 g)/800 g

を立てて解くという方法です。5000 円と 1200 g を掛けて、最後に 800 g で割って答えを求めていました。これではただ単に形式的問題を解いているだけで、なぜこのように解くのかということを理解することを全く度外視したものでした。そこでこの解法を合理化するために、

比例式

800 g：　1200 g ＝　5000 円：□　円

を立て、「外項の積＝内項の積」ということを機械的に計算することにし、800 g ×□円＝1200

令和 4 年 3 月 30 日受理

ｇ×5000円として、□を方程式で解くようになりました。

以上までの解法は、既に知られた３つの数から第４番目の未知数を機械的に求めていたというもので、「3数法」と呼ばれていました。しかし、「５０００円（金額）×１２００ｇ（重さ）は一体どういう意味を持つのだろう」ということは論理的に理解できるものではありませんでした。そこでその後、別の解法が必要になりました。そこで考え出されたのが「倍比例」という考え方です。

肉	値段
800ｇ	5000円
↓×３／２	↓×３／２
1200ｇ	□円

□＝5000円×1200g／800g

＝　5000円×３／２

＝７５００円

つまり、800ｇが1200ｇになったので、120ｇ÷80ｇ＝1200／800＝3／２（倍）になったので、値段も1200／800＝3／２（倍）になるはずであり、□＝5000円×3／２＝7500円　となるわけです。これは「倍」という考え方をしているので「倍比例」と呼ばれていました。

ここで問題になるのが、「分数倍」が出てくるという難点があることであり、この部分で躓く子供が多いことは言うまでもありません。それに子供たちは、800g で割っていいのか1200g で割るのか、一体どちらで割っていいのかわからないということが起きてしまいます。これらの難点を克服しようとして19世紀に開発されたのが、次のような指導法になります。

800ｇが5000円ですから、1g あたりの単価は5000円÷800ｇ＝6.25円／ｇになります。よって、1200g の値段は6.25円／g×1200g＝7500円となります。これは、１あたりの量を求める割り算と、いくつ分を求める掛け算の組み合わせですので、小学生にも理解しやすいことが予想されるでしょう。

5000円	⇒	□円
800g		1200ｇ

式で表すと、(5000円／800ｇ)×1200ｇ＝(6.25円／g)×1200g＝7500円となります。この方法は、最初に１あたり量を求めることから「帰一法」と呼ばれています。

以上３つの計算方法をまとめますと、

・「3数法」同じ800ｇが分母の真ん中にきていて、分子の掛け算から先に済ませてから割る形になっている。
・「倍比例」分母の800g が対応する値段の5000g の下にきている。
・「帰一法」他の解法のような既習事項を前提としていない。

のみであることが計算方法から簡単に理解できるでしょう。

つぎに、よくされる質問「１あたり量を格別重視してきた流れからいっても、小学校の比例にはほとんど問題がない」ように思えますが、教科書には「一方の量が２倍、３倍、…になると、他の量も２倍、３倍…になる」といった記述が出てきて混乱してしまうようで、「これと前に述べた比例問題を解くこととは、一体どういう関係があるのだろうか」に関して考察していくことにします。

（１）二つの数量ｘ,ｙがあったとして、一方の数量が２倍、３倍…に変化するに伴って他方の数量も２倍、３倍…と変化し、一方が1/２、1/３…に変化するに伴って、他方の数量も1/２、1/３…に変化するということ。

（２）（１）を一般的に考察して、二つの数量において、一方の数量の二つの数値の割合が、それと対応する他方の数量の二つの数値の割合といつでも等しくなっているということ。

（３）二つの数量の対応している値の商に着目すると、それがどこも一定になっているということ。

さらに詳しく突き詰めて考察していきますと、

（１）は、２つの数量ｘとｙの連続的な変化を

考えますと、そのとき関数的な考え方が必要になります。この２つの数量ｘをｙに対応させる関数ｆは、「倍」つまり整数倍「×ｋ」と交換可能ということになります。つまり、

式で表すと　$f(x\times k)=f(x)\times k$　で、その対応を図式化しますと、

$$
\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{f} & y=f(x) \\
\downarrow\times k & & \downarrow\times k \\
x\times k & \xrightarrow{f} & f(x\times k)=f(x)\times k
\end{array}
$$

となります。

（２）数量Ａの２つの数値ｘ、　ｘ’　に対して、数量の数値Ｂｙ、　ｙ’　があるとき、

$$x : x' = y : y'$$

となります。

（３）同じ数値を使えば、これは

$$y / x = y' / x'$$

となります。

(3)は、１あたりの量がどこでも同じということを意味し、牛肉の重さと値段のような単純な場合（１つの物の２つの側面）ならば、単価が一定ということと解釈できます。

（２）は、「割合」を「比」と考えれば、「３数法」に出てきた比例式そのもので、「割合」を「倍」と解釈すれば「倍比例」とも関連付けられるので、解釈が複数あるということも含めて理解することは難しいことが容易に想像できるでしょう。しかし、（２）も（３）も、２つの数量Ａ，Ｂの対応で２つの断面を問題にしているというだけで、(１)のような対応のすべてを考えているわけではないことがわかるでしょう。

これらのことを総合的に勘案しますと、(１)を正比例の定義として採用することは、非常に有効なことがわかるでしょう。もし「比例」を「関数」として解釈すると、「関数」というどんな遠く離れた２つの数量でも、因果関係で結びつけることが可能になるからです。しかし、「関数」を本当に理解するには、抽象能力がまだそれほど備わっていない小学生には難しいでしょう。(１)がもっとも易しく、それから(２)(３)を導くように文科省は指示していますが、総合的に考えても容易なことではありません。肉の例のように「関数」を持ち出す必要がない場合の比例を「**量的比例**」と呼び、関数の考え方が必要となる比例を「**関数的比例**」と区別することを提案されている文献がありますが、まったくその通りでしょうし、もっというと同じ「比例」という用語を使うのすら辞めた方が子供たちの混乱を避けることができるのではとさえ考えられます。

$$
\begin{array}{ccc}
 & \text{肉} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\text{重量} & & \text{値段}
\end{array}
$$

量的比例の具体例

自動車ｆ
ガソリン　ｘ　ℓ　⇒　距離　ｙ　km

関数的比例の具体例

小学校では、「ｘが２倍３倍…になると、そのときｙも２倍、３倍…になる」とき、**ｙはｘに比例する**という定義になっています。他方で、中学校ではｙ＝ax という式がいきなり出てきて、「伴って変わる２つの変数ｘ、ｙの関係が、この式ｙ＝ax で表せる」とき、**ｙはｘに比例する**という定義になっています。

ここで、もし中学校の定義「ｙ＝ax で表せる」が成立すると仮定すれば、そのとき小学校の定義「ｘが２倍３倍…になると、そのときｙも２倍、３倍…になる」が成立することは自明なことですが、その逆方向は自明ではなく、重要な定理ということがわかります（大学数学を利用する程、証明も難解である）。つまり、小学校の定義の方が適用範囲も広いということになりま

す。中学校の定義の方が条件としては強い条件であるということでもあり、その適用範囲も狭いということになります。

しかし、両方の定義が必要十分条件であるかのごとく小学校・中学校において取り扱われているというのが現状がありますので（この段階の子供たちにとっては必要十分であると理解することは困難である)、この問題（不具合）を取り除く必要があるでしょう。実際には、教える側の教員も混乱してしまうという問題も数多く生じてしまっているようです。

$$f(x\times k)=f(x)\times k$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, Rightarrow, "f"'] \arrow[d, "\times k"'] & y=f(x) \arrow[d, "\times k"'] \\ x\times k \arrow[r, Rightarrow, "f"'] & f(x\times k)=f(x)\times k \end{tikzcd}$$

ｆという関数の働きとｋ倍という働きの順序を交換可能ということです。

人が物事を認識する際に、中学校の定義を採用していては、内包量が予め分かっている場合にしか正比例を適用できず（比例を使用しようという考えにすら及ばないこともあり)、適用範囲が狭くなってしまうことにつながります。

一方、小学校の定義を採用すれば、関数対応そのものに関して言及しているのですから、適用範囲も広くなりますし、内包量がわかっていない場合にも対応できます。

一つの提案としては、小学校と中学校の定義を入れ替えることと、その用語も明確に異なるものに変更することで、その違いを意識出来、どちらが定義であって、どちらが性質なのかというすみわけもできることに繋がるのではないでしょうか。

しかし、先に述べた通り関数という定義を小学生教科書に採用しようとしても、抽象能力がまだそれほど備わっていない小学生には難しいという問題があります。そこで、グラフや関数というものを排除した比例の性質のみを小学校にて学習し、その後、中学校にてそれを一般化するということでグラフも含めた関数的性質を学んでいくという流れにしてはどうだろうかと考えます。

算数・数学の跨る内容の取扱い及び教科書についての問題点は、ほんの一例を挙げただけで、他にも様々な算数・数学教育目標を達成するために理想的な教育を円滑に進められることが困難な現状があります。これらの問題をどのように克服するかは、それを教える教師の力量に大きく依存する状況であり、学ぶ側の子供たちにとっての困難さをどのように取り除くかは今後の教育の大きな課題になっているでしょう。

参考文献

１．小学校学習指導要領（平成２９年告示　文部科学省）

２．小学校学習指導要領解説　算数編（平成３０年２月文部科学省　）

Faculty of teacher education
Institute of human and social sciences
Kanazawa university
Kakuma-machi, Kanazawa,
Ishikawa, 920-1192, Japan
rikioyoneda@staff.kanazawa-u.ac.jp