

# Stochastic CVP Analysis : Continuous-Time Model

|       |                                                                                             |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| メタデータ | 言語: jpn<br>出版者:<br>公開日: 2017-10-03<br>キーワード (Ja):<br>キーワード (En):<br>作成者:<br>メールアドレス:<br>所属: |
| URL   | <a href="http://hdl.handle.net/2297/27738">http://hdl.handle.net/2297/27738</a>             |

# 不確実性下におけるCVP分析の 連続時間モデルへの拡張

佐 藤 清 和

## 目 次

- I はじめに
- II 営業利益に関する偏微分方程式
- III 境界条件としての損益分岐点
- IV 営業キャッシュフローの確率過程
- V ビジネスリスクの確率指標
- VI 問題と課題

## I はじめに

会計学におけるCost-Volume-Profit(以下CVPと略称する)分析に関する研究は、CVPの各項目および項目間に課せられる種々の制約を緩和する、という方向で展開されてきた<sup>1)</sup>。その1つがJaedicke and Robichek[1964]を嚆矢とする、いわゆる不確実性下におけるCVP分析(あるいは確率的CVP分析)の研究である。彼らはCVPの諸変数が、それぞれ独立に正規分布に従うと仮定することにより損益分岐点の期待値と標準偏差を推定し、その上で目標利益を上回る売上高の実現確率を求める方法を提示した。

この研究以後、コンピュータによるシミュレーション化や意思決定の最適化問題への応用などという形で、不確実性下におけるCVP分析の研究は進展していった(Ferrar, Hayya and Nachman[1972], Buzby[1974], Liao[1975], Hilliard and Leitch[1975], Kottas and Lau[1978], Ismail and Lounderback[1979], Chen[1980], Constantinides. et.al.[1981], Karnani[1983], Kim, et.al.[1996], Yunker

[2001])<sup>2)</sup>。

ただし、これらの先行研究で導入されたのは、一定時点における確率変数としてのCVPであり、分析期間を通じた経過時間にともなう確率過程という概念は検討されていない。したがって、以上のようなCVPモデルとは不確実性下における静学的分析モデルと見なすことが可能である。

一方、Mannes[1966]およびMoore[1986]は、将来キャッシュフローの流列を対象とする割引モデルに基づく多期間型のCVPモデルを提示した。さらに後藤[1999]は、CVP分析に分析期間(あるいは会計期間、予算期間)という意味での離散時間を明示的に取り入れた利益分析図表を提示した。これらの研究はCVP分析を多期間に拡張するために、新たな属性として離散時間を導入したところに独自性が認められる。すなわち、これらの分析モデルは、CVPの分析期間を多期間化したという点で比較静学的モデルということが可能である。すなわち、CVPの各要素は確定的に推移するか、あるいは将来時点で所与の値をとるものと仮定されているのである。

本稿では、不確実性下における静学的CVP分析、および多期間の比較静学的CVP分析に対して、CVPの要素が特定の確率過程に従うという仮定を導入することによって、CVP分析を連続時間モデルに拡張する。その上で確率解析の基本定理を用いて、営業収益や営業利益を確率的に予測する手法を提示する<sup>3)</sup>。

このような確率的アプローチとは、いわゆる不確実性下における投資決定問題、あるいはリアルオプションによる投資評価問題(Dixit and Pindyck[1994], Trigeorgis[1996])の研究成果に依拠するところが大きい。しかしながら、本稿は個別投資の評価問題ではなく、あくまで確率過程の導入による動的CVP分析の構築を目的とするものであり、これを短期利益計画や財務諸表分析に応用することを企図するものである。

本稿の構成は以下のとおりである。次節ではCVPの関係式に確率過程を導入することにより、営業利益に関する偏微分方程式を導出する。その上で、第Ⅲ節では、この偏微分方程式の境界条件として損益分岐点を導入する。第Ⅳ節では、前節のCVPモデルを拡張し、キャッシュ・フローを測度とする収支分岐点モデルを展開する。さらに第Ⅴ節では、確率過程に従うCVP要素間

の関係から、ビジネスリスクを示す確率的な財務指標を提示する。第Ⅵ節は、本稿の問題と今後の課題である。

## Ⅱ 営業利益に関する偏微分方程式

売上高 $S$ 、変動費 $V$ および固定費 $F$ 、並びに営業利益 $\pi$ を用いれば、CVPの関係式は次式で与えられる。

$$\pi = S - V - F \quad (1)$$

任意の会計期間 $t$ (年次、月次あるいは日次)において、売上高1単位あたりの貢献差益 $(S-V)$ を貢献差益率 $m$ とおく。ここで $m$ を定数と仮定すれば、(1)は次式のように表される。

$$\pi = mS - F \quad (2)$$

ただし、 $m = 1 - \frac{V}{S}$ である。さらに売上高の時系列が、幾何ブラウン運動に従うと仮定すると、次式のような売上高に関する確率微分方程式が得られる。

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ \quad (3)$$

ここで $\mu$ および $\sigma$ は定数であり、それぞれ $S$ の瞬間的な期待成長率および標準偏差を表わしている。また時系列 $Z(t)$ は標準ウィーナー過程に従う不確実要素であり、 $dZ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} = \sqrt{dt}$ である。

以上より、 $\pi$ は $S$ および $t$ の関数： $\pi = \pi(S, t)$ であるから、その微分 $d\pi$ は「伊藤の補題」より次式に従うことになる。

$$d\pi = \left( \pi_S \mu S + \pi_t + \frac{1}{2} \pi_{SS} \sigma^2 S^2 \right) dt + \pi_S dS dZ \quad (4)$$

ただし、 $\pi_t = \frac{\partial \pi}{\partial t}$ 、 $\pi_S = \frac{\partial \pi}{\partial S}$ および $\pi_{SS} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2}$ である。

なお、(2)より $\pi_S = m$ であり、また $\pi_t$ はIjiri[1982]およびIjiri[1987]で提示されたincome momentum(利速)という概念に対応している。

続いて $\pi_S$ を用いて(2)を書き換えれば、次式が得られる。

$$\pi_S S - \pi = F \quad (5)$$

(5)は貢献差益 $\pi_S S$ と営業利益 $\pi$ の差額が固定費 $F$ であることを示しており、  
 微少時間 $\Delta t = \frac{t}{n}$  ( $0 < n < \infty$ )における(5)の変化量は次式のとおりになる。

$$\pi_S \Delta S - \Delta \pi = F \Delta t \quad (6)$$

$\Delta t \rightarrow 0$ として、(6)の $\Delta S$ および $\Delta \pi$ に、それぞれ(3)の $dS$ および(4)の $d\pi$ を代入すれば、次式が得られる。

$$\left( -\pi_t - \frac{1}{2} \pi_{SS} \sigma^2 S^2 \right) dt = F dt \quad (7)$$

(7)右辺の $F$ に(5)の左辺を代入し、 $dt$ を削除した上で辺々整理すると、次式のような $\pi$ に関する偏微分方程式が得られる。

$$\pi(S, t) = \pi_t(S, t) + S \pi_S(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \pi_{SS}(S, t) \quad (8)$$

ここで、次式のような変数変換を行なう。

$$\begin{cases} u = \log \frac{S}{B} + \left( 1 - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) \\ \tau = T - t \end{cases} \quad (9)$$

ここで(8)を次式のように表現する。

$$\pi(S_t, t) = e^{-r} y(u, \tau) \quad (10)$$

その上で(8)の各項を計算していくと、次式のとおりの $y(u, \tau)$ を解とする2階の偏微分方程式(拡散方程式)が得られる<sup>4)</sup>。

$$y_{uu}(u, \tau) - \frac{2}{\sigma^2} y_\tau(u, \tau) = 0 \quad (11)$$

### III 境界条件としての損益分岐点

以下では、損益分岐点  $B$  を定義し、(11)の偏微分方程式に関する境界条件を与える。(2)において  $\pi=0$  とおくことで、 $B$  は次式で与えられる。

$$B = \frac{F}{m} \quad (12)$$

これにより  $\pi$  は  $B$  によって、次式のように表される。

$$\pi = m(S - B) \quad (13)$$

ここで  $t$  の期末時点  $T$  における売上高を  $S_T$  で表わすと、営業利益  $\pi(S_T, T)$  は、次式で表される。

$$\pi(S_T, T) = \begin{cases} m(S_T - B) \cdots S_T \geq B \\ m(B - S_T) \cdots S_T < B \end{cases} \quad (14)$$

この式は、 $S_T$  が  $B$  以上であれば営業利益  $\pi(S_T, T) \geq 0$  が生じ、逆に  $S_T$  が  $B$  未満の場合は営業損失  $\pi(S_T, T) < 0$  が生じることを示している。さらに (9) の変数変換によって、(14)の境界条件は次式のとおり変形される<sup>5)</sup>。

$$y(u, 0) = \begin{cases} mB(e^u - 1) \cdots u \geq 0 \\ mB(1 - e^u) \cdots u < 0 \end{cases} \quad (15)$$

(15)の境界条件の下で得られる(11)の一般解は、次式のとおりである。

$$y(u, \tau) = \int_0^\infty (C(k) \cos ku + D(k) \sin ku) e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau} dk \quad (16)$$

ただし、 $C(k)$  および  $D(k)$  は  $k$  に関する定数である。

ここで初期条件  $y(u, 0) = g(u)$  において、フーリエ積分定理ならびに積分公式： $\int_0^{+\infty} e^{s^2} \cos(2bs) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$  を用いれば、次式を得る<sup>6)</sup>。

$$y(u, \tau) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)^2} da \quad (17)$$

ただし計算の途中で  $g(u) \rightarrow g(a)$  と変換している。

ここで変数変換： $v = \frac{a-u}{\sigma\sqrt{\tau}}$  を行くと、(15)の境界条件は次式のように変形される。

$$g(a) = \begin{cases} mB(e^{u+\sigma\sqrt{\tau}v} - 1) \cdots v \geq -\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ mB(1 - e^{u+\sigma\sqrt{\tau}v}) \cdots v < -\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \end{cases} \quad (18)$$

この境界条件に留意すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} y(u, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}} g(a) e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} g(a) e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}} \{m(Be^{u+\sigma\sqrt{\tau}v} - B)\} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}}^{\infty} \{m(B - Be^{u+\sigma\sqrt{\tau}v})\} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \end{aligned} \quad (19)$$

ここで(19)の積分を(11)の解  $y(u, \tau)$  として(10)の右辺に代入すれば、次式のとおり営業利益に関する偏微分方程式の特殊解  $\pi(S, t)$  が得られる<sup>7)</sup>。

$$\begin{aligned} \pi(S, t) &= m \left\{ \left[ S \cdot N\left(-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau}\right) - \frac{1}{2} \right] - \left[ e^{-\tau} B \cdot N\left(-\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - \frac{1}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ e^{-\tau} B \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) - S \cdot N\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} + \sigma\sqrt{\tau}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで  $N(\cdot)$  は標準正規分布の確率密度関数の積分： $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  である。

なお、(9)の変数変換より(20)は、次式のようにも書き換えられる。

$$\begin{aligned} \pi(S, t) &= mS \{N(d_2 - 2d_1) + N(d_1)\} \\ &\quad - me^{-\tau} B \{N(-d_1) + N(d_2)\} \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $d_1$ および $d_2$ は次式のとおりである。

$$d_1 = \frac{\log \frac{S_t}{B} + \left(1 + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

#### IV 営業キャッシュ・フローの確率過程

前節におけるCVPモデルでは、営業過程において生じる売上債権や棚卸資産などの影響を考慮していない。すなわち、生産物はすべて販売され、販売代金も全額回収されることが假定されている。しかしながら、需要量と生産量のギャップから生じる期末在庫や、売上代金の回収過程で生じる売上債権は、営業活動によるキャッシュ・フローの期末有高を変動させる。これらの点をCVPに加味することにより、売上収益の確率過程に従う営業キャッシュ・フローを記述することができる<sup>8)</sup>。

ここで期首における売上債権 $AR_{t-1}$ 、棚卸資産 $I_{t-1}$ 、仕入債務 $AP_{t-1}$ は、期中に回収ないし売却されて収入となるか、あるいは期末までに支払われて支出になるものと仮定する。さらに、当期末の売上債権 $AR_t$ 、棚卸資産 $I_t$ 、仕入債務 $AP_t$ を売上高で割った回転期間を、それぞれ $t_1$ 、 $t_2$ および $t_3$ とおくことにより、当期の売上債権、棚卸資産および仕入債務を、それぞれ $AR_t = t_1 S$ 、 $I_t = t_2 S$ および $AP_t = t_3 S$ で表す。以上より、営業活動によるキャッシュ・フロー $C$ は次式で与えられる<sup>9)</sup>。

$$C = \{(1-v) - (t_1 + t_2 - t_3)\}S + \{(AR_{t-1} + I_{t-1} - AP_{t-1}) - (F - n)\} \quad (22)$$

ここで $n$ は減価償却費などの支出を伴わない費用項目である。(22)における $S$ の係数 $\{(1-v) - (t_1 + t_2 - t_3)\}$ は、売上高の変動に比例するキャッシュ・フローの増減率を示す変動収支率であり、逆に同式の $\{(AR_{t-1} + I_{t-1} - AP_{t-1}) - (F - n)\}$ は、売上高の増減とは相関しない固定収支である。

以上より、営業キャッシュ・フローがゼロとなる売上高を示す次式の収支

分岐点  $C_B$  が得られる。

$$C_B = \frac{(F - n) - (AR_{t-1} + I_{t-1} - AP_{t-1})}{(1 - v) - (t_1 + t_2 - t_3)} \quad (23)$$

(23) は営業キャッシュ・フローが売上高の一次式で表わされることを示しているから、(2)～(7)と同様の計算を行なうことで、次式の営業キャッシュ・フローに関する偏微分方程式が得られる。

$$C(S, t) = C_t(S, t) + S \cdot C_S(S, t) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 C_{SS}(S, t) \quad (24)$$

ただし、 $C_t(S, t) = \frac{\partial C}{\partial t}$ 、 $C_S(S, t) = \frac{\partial C}{\partial S}$ 、および  $C_{SS} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$  である。(24) の解は、(20) の営業利益に関する偏微分方程式と同様に次式で与えられる。

$$C_F(S, t) = vr_t \cdot e^{-\tau} \left\{ \{Se^{\tau} \cdot N(-d_{C2} - 2d_{C1}) - B_C \cdot N(-d_{C1})\} \right. \\ \left. + \{Se^{\tau} \cdot N(d_{C1}) - B_C \cdot N(d_{C2})\} \right\} \quad (25)$$

ここで、 $d_{C1}$  および  $d_{C2}$  は次式のとおりである。

$$d_{C1} = \frac{\log \frac{S_t}{B_C} + \left(1 + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}} \\ d_{C2} = d_{C1} - \sigma \sqrt{T - t}$$

## V ビジネスリスクの確率指標

営業活動にともなうビジネスリスクを、売上高の変化率に対する営業利益の変化率の比、すなわち売上高に対する営業利益の弾力性  $\frac{\Delta \pi}{\pi} / \frac{\Delta S}{S}$  と定義して、これをオペレーティング・レバレッジ度  $D$  と呼ぶ。ここで  $t \rightarrow 0$  とすれば、 $\Delta \pi \rightarrow d\pi$ 、 $\Delta S \rightarrow dS$  であるから(2)より次式を得る。

$$D_t = \frac{d\pi}{dS} \frac{\pi}{S} = 1 + \frac{F}{S - (V + F)} \quad (26)$$

(26) が示すとおり、 $SK \rightarrow V + F$  (すなわち  $B$ ) に近い位置にあるほど、 $B$  を漸近線

として $|D|$ は増加する。すなわち、 $S$ が損益分岐の境界近傍にあるほど、 $|D|$ を測度とするビジネスリスクは急激に上昇する。このように損益分岐点を境界値とするリスクの定量化は直感的にも優れているが、これはあくまで現時点における静的ビジネスリスクの指標である。

そこで、本稿におけるこれまでの議論を援用して、幾何ブラウン運動に従うと仮定された売上高に伴って変動する、営業利益に関わるビジネスリスクを、オペレーティング・レバレッジ度の確率的变化をもって表現し、これを動的(すなわち確率的)ビジネスリスクと定義する。このため(26)の $D$ を $S$ で微分すれば次式を得る。

$$\frac{dD}{dS} = \frac{-F}{(S - V - F)^2} = \frac{-F}{\pi^2} \quad (27)$$

この確率的なビジネスリスクは、営業利益の増減に対して2次のオーダーで変化する。すなわち、(27)は連続時間における需要(売上高)の不確実な変動が、業績指標としての営業利益に及ぼす影響力として測定されるビジネスリスクのシグナルとして、(26)よりも敏感に機能することが期待できるということである。

## VI 問題と課題

本稿で提示された連続時間による確率的なCVP分析モデルでは、唯一売上高の確率的変動過程だけに着目し、企業のコスト構造や価格設定あるいは在庫数量などは変動しないと仮定されている。無論、このような仮定は現実の短期利益計画や採算性分析を通じた経営計画の立案を無視して、経営者のリスク中立性というような非現実的な状況を想定したものではない。

むしろ、直接的なコントロールが困難な外部要因の中から売上高のみを確率変数とすることによって、経営判断が介入する以前の段階における、その意味において客観的なCVP情報をシミュレートすることにより、速やかな経営計画の立案に資することを企図するものである。

一方で、先行研究で試みられたように多変数を確率変数とすれば、モデル

およびシミュレーションの精緻化には相応の効果が期待できるだろう。しかしながら、それら多変数に基づく経営計画の立案、あるいは分析結果の解釈とは容易なことではない。むしろ不確実性が進展することに伴う複雑性の増大という弊害が生じることも懸念される。このことは、CVP分析に不確実性を導入することのそもそもの利点を阻害することにもなりかねない。すなわち、確実性→多要素→複雑化に対して、不確実性→単要素→簡略化という考え方も一考に価する、ということである。

さらに、そもそも CVP分析とは、コスト構造が変化しない短期間における採算性の分析に効果を発揮するものであるから、本稿のような連続時間における CVP分析の適合性は高い。すなわち、当該モデルは、あくまで短期的(迅速)な経営計画の立案に有効性を発揮することを期待して提示されたものである。

もとより、本稿で連続時間に拡張された CVP分析には、根本的な課題が山積していることもまた明らかである。その一部を列挙すれば、以下の通りである。

1. 売上高が幾何ブラウン運動に従うという仮定の現実妥当性
2. 突発的経済事象の発生にともなう非連続的な確率過程の検討
3. コスト構造の確率的変動の導入可能性
4. 会計期間と連続時間概念の親和性の検討

## Appendix

### (1) 偏微分方程式の変換

ここで(8)における  $\pi_i(S, t)$ ,  $\pi_s(S, t)$  および  $\pi_{ss}(S, t)$  を計算すると、それぞれ以下のような(28)~(30)が得られる。まず  $\pi_i(S, t)$  は、次式のとおりである。

$$\begin{aligned}
 \pi_t(S, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \pi(S, t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \{e^{-\tau} \cdot y(u, \tau)\} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \{e^{-\tau} \cdot y(u, \tau)\} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \\
 &= e^{-\tau} \left[ -\left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) y_u(u, \tau) + y(u, \tau) - y_t(u, \tau) \right]
 \end{aligned} \tag{28}$$

つづいて  $\pi_s(S, t)$  は、次式とおりである。

$$\begin{aligned}
 \pi_s(S, t) &= \frac{\partial}{\partial S} \pi(S, t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial u} \pi(S, t) \cdot \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial \tau} \pi(S, t) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \\
 &= e^{-\tau} \cdot y_u(u, \tau) \cdot \frac{1}{S}
 \end{aligned} \tag{29}$$

さらに  $\pi_{ss}(S, t)$  は、次式のとおりである。

$$\begin{aligned}
 \pi_{ss}(S, t) &= \frac{\partial^2}{\partial S^2} \pi(S, t) \\
 &= \frac{\partial}{\partial S} \left\{ e^{-\tau} \frac{\partial}{\partial u} y(u, \tau) \cdot \frac{1}{S} \right\} \\
 &= \frac{e^{-\tau}}{S^2} \left[ \frac{\partial}{\partial S} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} y(u, \tau) \right\} \cdot S - \frac{\partial}{\partial u} y(u, \tau) \right] \\
 &= \frac{e^{-\tau}}{S^2} [y_{uu}(u, \tau) - y_u(u, \tau)]
 \end{aligned} \tag{30}$$

なお(30)の第3式では、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} y(u, \tau) \right\} &= \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} y(u, \tau) \right\} \cdot \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} y(u, \tau) \right\} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial S} \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} y(u, \tau) \cdot \frac{1}{S}
 \end{aligned}$$

という関係を用いている。以上の(28)～(30)を(8)に代入して整理すれば、(11)で与えられた2階の偏微分方程式(拡散方程式)が得られる。

## (2) 境界条件の変換および拡散方程式の求解プロセス

境界条件(4)に  $t = T$  を代入すると、 $\tau = 0$ 、 $S = S_T$  であるから、これらを (10) に代入すると、 $\pi(S_T, T) = m \cdot y(u, 0)$ 、および  $u = \log \frac{S_T}{B}$  より  $S_T = Be^u$  を得る。これから  $T$  時点における境界条件は、本文(15)のように表わされる。

ここでは(11)に関する一般解の求解過程を示しておく。まず同式を変数分離

形で表現することを考える。すなわち、 $y(u, \tau) = V(u) \cdot W(\tau)$  が成り立つと仮定すれば、 $y_{uu}(u, \tau) = V_{uu}(u) \cdot W(\tau)$  ならびに  $y_{\tau}(u, \tau) = V(u) \cdot W_{\tau}(\tau)$  が得られる。そこでこれらを(1)に代入することによって次式を得る。

$$V_{uu}(u)W(\tau) - \frac{2}{\sigma^2}V(u)W_{\tau}(\tau) = 0 \quad (31)$$

この(31)は、 $\tau$  の関数と  $u$  の関数を両辺に分離できるから、それぞれの解は  $u$  および  $\tau$  とは無関係な定数  $-k^2$  ( $0 \leq k < \infty$ ) とおくことができる。

$$\frac{V_{uu}(u)}{V(u)} = \frac{2}{\sigma^2} \frac{W_{\tau}(\tau)}{W(\tau)} = -k^2 \quad (32)$$

これより、以下の2つの微分方程式が得られる。

$$V_{uu}(u) + k^2 V(u) = 0 \quad (33)$$

$$W_{\tau}(\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 W(\tau) = 0 \quad (34)$$

(33)は定数係数2階線形微分方程式であるから、その一般解は次式で与えられる。

$$V(u) = C_1 \cos(ku) + C_2 \sin(ku) \quad (35)$$

ここで  $C_1, C_2$  は  $k$  に関する定数であるから、 $C_1 \rightarrow C(k)$ 、 $C_2 \rightarrow D(k)$  と記述しておく。これにより(35)は、次式のように書き換えられる。

$$V(u) = C(k) \cos(ku) + D(k) \sin(ku) \quad (36)$$

また(34)より、次式の変数分離形の微分方程式が得られる。

$$W_{\tau}(\tau) - \frac{\sigma^2 k^2}{2} W(\tau) = 0 \quad (37)$$

同式の一般解は次式で与えられる。

$$W(\tau) = C_3 e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\tau} \quad (38)$$

結局、(8)の偏微分方程式の解の1つとして、次式を得る。

$$y(u, \tau) = \{C(k) \cos(ku) + D(k) \sin(ku)\} e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\tau} \quad (39)$$

ここで  $C(k)C_3$ ,  $D(k)C_3$  はともに  $k$  に関する定数であるから、それぞれ  $C(k)C_3 \rightarrow C(k)$ ,  $D(k)C_3 \rightarrow D(k)$  と置き換えている。また重ね合わせの原理より、(39)をすべての  $k (0 \leq k < \infty)$  について重ね合わせた次式もまた(11)の一般解である。

$$y(u, \tau) = \int_0^\infty (C(k) \cos ku + D(k) \sin ku) e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\tau} dk \quad (40)$$

### (3) フーリエ積分定理と積分公式の適用

初期条件  $\tau = 0$  が満たされるならば、(40)より次式が得られる。

$$y(u, 0) = \int_0^\infty (C(k) \cos ku + D(k) \sin ku) dk \quad (41)$$

係数  $C(k)$  および  $D(k)$  は、フーリエ積分展開より、次式で与えられる。

$$\begin{cases} C(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) \cos kada \\ D(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) \sin kada \end{cases} \quad (42)$$

ここでは記号を識別するために変数  $u$  を  $a$  で置き換え、すなわち  $g(u) \rightarrow g(a)$  としている。さらに(42)の係数を(40)に代入することにより次式を得る。

$$y(u, \tau) = \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) \cos k(a-u) da \right] e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\tau} dk \quad (43)$$

ここで(43)の積分の順序を交換して,

$$\begin{aligned} y(u, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^{+\infty} g(a) \cos k(a-u) e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau} dk \right\} da \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(a) \left\{ \int_0^{+\infty} \cos k(a-u) e^{-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \tau} dk \right\} da \end{aligned} \quad (44)$$

その上で, (43)に積分公式:  $\int_0^{+\infty} e^{S^2} \cos(2bs) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$  を当てはめれば, 本文(47)が次式のとおりで得られる。

$$\begin{aligned} y(u, \tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(a-u)^2}{2\sigma^2 \tau}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sigma \sqrt{\tau}} \right\} da \\ &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi \tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(a) e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{a-u}{\sigma \sqrt{\tau}} \right)^2} da \end{aligned} \quad (45)$$

#### (4) (49)の積分計算

(49)の右辺第1項は, 次式の2つの積分の差である。

$$\frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{u}{\sigma \sqrt{\tau}}} B e^{u+\sigma \sqrt{\tau} v} e^{-\frac{v^2}{2}} dv - \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{u}{\sigma \sqrt{\tau}}} B e^{-\frac{v^2}{2}} dv \quad (46)$$

ここで,  $u = \log \frac{S}{B} + \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}\right) \tau$  より,  $e^u = e^{\log \frac{S}{B}} e^{\tau - \frac{\sigma^2 \tau}{2}} = \frac{S}{B} e^{\tau - \frac{\sigma^2 \tau}{2}}$  であるから,  $B e^u = S e^{\tau - \frac{\sigma^2 \tau}{2}}$  となる。これにより(46)の第1項を  $I_1$  とおけば, 次式を得る。

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{u}{\sigma \sqrt{\tau}}} B e^{u+\sigma \sqrt{\tau} v} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{u}{\sigma \sqrt{\tau}}} S e^{\tau - \frac{\sigma^2 \tau}{2}} e^{\sigma \sqrt{\tau} v} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &= m S e^{\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\frac{u}{\sigma \sqrt{\tau}}} e^{\frac{1}{2} (v - \sigma \sqrt{\tau})^2} dv \end{aligned} \quad (47)$$

ここで、変数変換： $z = v - \sigma \sqrt{\tau}$ を行えば、

$$I_1 = mSe^{\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (48)$$

が得られる。つづいて(46)の第2項を $I_2$ とおき、 $z = v$ とすれば、次式を得る。

$$I_2 = mB \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \quad (49)$$

したがって、 $I_1 - I_2$ は次式のとおりである。

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= mSe^{\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - mB \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= m \left[ Se^{\tau} \left\{ N \left( -\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} - \sigma\sqrt{\tau} \right) - \frac{1}{2} \right\} - B \left\{ N \left( -\frac{u}{\sigma\sqrt{\tau}} \right) - \frac{1}{2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

## 参考文献

- Buzby, S. L. 1974. Extending the applicability of probabilistic management planning and control models. *The Accounting Review* 49 : 42-49.
- Chen, J. T. 1980. Cost-volume-profit analysis in stochastic programming models. *Decision Sciences* 11 : 632-647.
- Constantinides, G. M., Y. Ijiri and R. A. Leitch. 1981. Stochastic cost-volume-profit analysis with a linear demand function. *Decision Sciences* 12 : 417-427.
- Dixit, A., and R. S. Pindyck. 1994. *Investment under Uncertainty*. Princeton : NJ. Princeton University Press.
- Ferrara, W. L., J. C. Hayya and D. A. Nachman. 1972. Normalcy of profit in the Jaedicke-Robichek Model. *The Accounting Review* 47 : 299-307.
- Hilliard J. E. and R. A. Leitch. 1975. Cost-volume-profit analysis under uncertainty : A log normal approach. *The Accounting Review* 50 : 69-80.
- Ijiri, Y. 1982. *Triple-Entry and Income Momentum*. Sarasota, FL : American

- Accounting Association. Studies in Accounting Research No.18.
- Ijiri, Y. 1989. *Momentum Accounting and Triple-Entry Bookkeeping : Exploring the Dynamic Structure of Accounting Measurements*. Sarasota, FL : American Accounting Association. Studies in Accounting Research No.31.
- Ismail, B. E. and J. G. Louderback. 1979. Optimizing and satisficing in stochastic cost-volume-profit analysis. *Decision Sciences* 10 : 205—217.
- Jaedicke R. K. and A. A. Robichek. 1964. Cost-volume-profit analysis under conditions of uncertainty. *The Accounting Review* 39 : 917—926.
- Karnani, A. 1983. Stochastic cost-volume-profit analysis in a competitive oligopoly. *Decision Sciences* 14 : 187—193.
- Kim, S., M. J. Abdolmohammadi and L. A. Klein. 1996. CVP under uncertainty and the manager's utility function. *Review of Quantitative Finance and Accounting* 6 : 133—147.
- Kottas, J. F. and H. S. Lau. 1978. Direct simulation in stochastic CVP analysis. *The Accounting Review* 53 : 698—707.
- Liao, M. 1975. Model Sampling : A stochastic cost-volume-profit analysis. *The Accounting Review* 50 (October) : 780—790.
- Manes, R. 1966. A new dimension to breakeven analysis. *Journal of Accounting Research* 4 : 87—100.
- Moore, G. 1986. A multiperiod breakeven analysis. *Canadian Journal of Administrative Sciences*. 3 (1) : 123—130.
- Schweitzer, M., E. Trossmann, and G. H. Lawson. 1992. *Break-Even Analysis : Basic Model, Variations, Extensions*. John Wiley & Sons.
- Shih, W. 1979. A general decision model for cost-volume-profit analysis under uncertainty. *The Accounting Review* 54 : 678—706.
- Trigeorgis, L. 1996. *Real Option : Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Cambridge, MA : The MIT Press.
- Yunker, J. A. 2001. Stochastic CVP analysis with economic demand and cost functions. *Review of Quantitative Finance and Accounting* 17 : 127—149.
- 古川浩一(1988)『財務分析の研究』同文館出版。

國広員人(1958)『収支分岐点－資金と採算の総合管理－』ダイヤモンド社。  
後藤晃範(1999)「損益分岐分析の離散型動的モデルへの拡張」、『管理会計学』第7巻第1・2合併号。  
佐藤靖・佐藤清和(2000)『キャッシュ・フロー情報－ブームの異現象を超えて－』同文館出版。  
佐藤康男(1978)『CVP分析の研究』白桃書房。

- 1) 不確実性下のCVP分析の研究動向については、佐藤[1978]、古川[1988]およびSchweitzer[1991]を参照されたい。  
また、本文の制約条件とは次のような事項である(古川[1988]p.171)。  
[1] CVPの各変数を確定値とみなしている。  
[2] 取り扱う製品は1種類か、あるいは製品の構成は変わらない。  
[3] 生産量は販売量に等しい、あるいは等しいと見なせる。  
[4] 変動費および価格は、生産量や販売量の大きさと無関係に一定である。
- 2) これらの研究とは異なり、國広[1969]は、キャッシュ・フローを測度とするCVP分析を展開した独自の研究成果である。
- 3) 期間計算される会計情報を連続時間モデルで扱うことの意義と有用性については、Ijiri[1982]、およびIjiri[1989]を参照されたい。
- 4) この計算過程については Appendix(1)を参照せよ。
- 5) この境界条件の変形と⑪の一般解⑫の求解過程については、Appendix(2)を参照せよ。
- 6) フーリエ積分定理および積分公式の適用については、Appendix(3)を参照せよ。
- 7) ⑨の積分については、Appendix(4)を参照せよ。
- 8) Ismail and Loudback[1979]ならびに Shih[1979]は、需要量を確率変数とし、この需要量と供給量のギャップから生じる機会費用や在庫の保管費用を考慮したCVPモデルを提示している。
- 9) 計算の詳細は、佐藤・佐藤[2000]pp.140－145を参照されたい。