

# Efficient calculation of stochastic user equilibrium with route aggregation using sensitivity analysis

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://doi.org/10.24517/00008368">https://doi.org/10.24517/00008368</a>

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



# 感度分析による経路集約化法を用いた 確率的利用者均衡配分の効率的計算

岡本 裕也<sup>1</sup>・中山 晶一郎<sup>2</sup>・高山 純一<sup>3</sup>

<sup>1</sup>学生会員 金沢大学大学院 自然科学研究科 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: doken-y@stu.kanazawa-u.ac.jp

<sup>2</sup>正会員 金沢大学准教授 理工研究域環境デザイン学系 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp

<sup>3</sup>フェロー会員 金沢大学教授 理工研究域環境デザイン学系 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: takayama@t.kanazawa-u.ac.jp

都市高速道路などでは、経路により料金を割り引く施策の検討が必要になるなど経路交通量の算出が必要な場面も多々ある。一方、広域を対象とした大規模道路網の交通量配分を行うには、多大な計算時間を要し、データ入力、結果表示のための作業量も膨大なものとなる。配分計算を何度も行う必要がある場合、何らかの計算の効率化は極めて重要である。ある程度の配分結果の精度を確保しつつ、計算費用を減らすための手法の一つにネットワーク集約化がある。本研究では、高速道路を含むネットワークの確率利用者均衡配分について、一般道路のみを通る経路を感度分析を用いて集約し、集約した一般道路の経路と高速道路を一部でも含む経路の間で配分を行う手法を提案し、仮想ネットワークを対象にその手法の計算時間の短縮・配分結果の有用性を検討する。

**Key Words :** *traffic assignment, sensitivity analysis, aggregated route, stochastic user equilibrium*

## 1. はじめに

高速道路は種々の主体により様々な道路が運営されている。高速道路料金体系に関して、高速自動車国道では走行距離に応じて料金変動する「対距離料金制」が採用されている。これに対し、都市高速道路では大都市の膨大な交通をスムーズに処理する必要があり、また、出口に料金所を設けるスペースの確保が難しいこともあるため、それぞれの料金エリア内で走行距離にかかわらず一定の料金が設定される「均一料金制」が現時点では採用されている。しかし、都市高速道路で採用している均一料金制は、近年ネットワークの拡大とともに、同じ料金区間内で近距離を走行する利用者と長距離を走行する利用者で不公平感が増大している。また、ETC が普及してきたことにより、出入口での混雑が解消されるとともに、均一料金制を採用している都市高速道路においては、出口でのゲートの設置により、出口の特定が容易になっている。

このような現状を受けて、都市高速道路会社では、現行の料金体系の見直しを行い、均一料金制から対距離料金制の新たな料金体系への移行が検討されている。

このように料金設定を考える際には、都市高速道路ネットワークだけでなく、周辺の一般道路も考慮することは必須となる。しかし、広域を対象とした大規模道路ネットワーク(複数の県をまたぐネットワーク)の交通量配分を行うには、膨大な計算機容量と計算時間を要し、データ入力、結果表示のための作業量も膨大なものとなる。さらに、料金について考える場合は各料金設定ごとに配分を行ったり、均衡配分の制約下で料金に関する最適化を行う必要があったりするなど多数の配分計算を行う必要がある。したがって、配分結果の精度を確保しつつ、計算費用を減らすための工夫を行うことは非常に重要である。

本研究では、計算の効率や計算量の縮減の手法として、ネットワークの集約化に着目する。ネットワーク集約化の目的は、実際のネットワークよりも規模(リンク、ノード数)の小さい計算用のネットワークを合理的に作成することにあると考えられる。最も簡単な方法として、主要なリンク(幹線道路)のみを抽出し、他のリンクを削除する方法が挙げられるが、不要なリンクを削除しているため、計算費用の節約には寄与しても、配分結果に対する精度が保証されず、交通計画の基本データとしての

利用価値が減ることになる。

Chan<sup>1)</sup>は、実ネットワークから必要なリンク(たとえば幹線道路)を抽出あるいは不必要なリンク(細街路)を削除し、さらに何本かのリンクを束ねて仮想的なリンクを作成することで計算時間の短縮を試みている。

飯田ら<sup>2)</sup>は、ネットワークをいくつかのブロックに分割し、ブロック間を関連づける上位ネットワークと、各ブロックごとの詳細道路網からなる下位ネットワークに階層化し上位ネットワークでの配分結果を下位ネットワークへ配分するとともに、その結果得られる情報を再度上位ネットワークの配分に用いる手法を提案している。

佐々木ら<sup>4)</sup>や飯田ら<sup>5)</sup>は対象領域を要素ごとに分割し、シミュレーションを組み込んだ要素レベルの走行時間関数を作成し、交通量配分の連続体近似モデルを作成することで、ネットワークの簡略化を行っている。

以上の集約化手法は、リンクの抽出・削除方法、分割方法などはモデル作成者の職人芸的な技術に依存する部分があり、明確な基準を設けにくいように思われる。

Connors ら<sup>6)</sup>は、感度分析を用いたネットワークの集約化を提案した。公共交通と一般道路を含むネットワークにおいて、一般道路を一本の仮想リンクに集約することで、計算時間を短縮することができる。感度分析による集約のため、機械的に集約を行うことができる利点がある。なお、Connors らの手法では、OD 交通量の変化に対する感度分析が扱われている。ネットワークのある領域(サブネットワーク)について、サブネットワークを出入りする交通量をそのサブネットワークの OD 交通量とし、そのサブネットワークを集約し、OD 交通量の変化に対する OD 間旅行時間などを算出できる。

高速道路の料金等を考える場合、高速道路を利用する経路交通量は精緻に扱うことが望ましく、それについては直接変数として扱うことが望ましい。なお、高速道路を利用する場合でも高速道路へのアクセス・イグレスには一般道路が用いられるため、高速道路利用経路も一般道路リンクを含む。一方、一般道路のみの経路については高速道路利用経路ほどの精度は求められていないことが多いと思われ、一般道路のみの経路の集約を行うことで計算コストの削減等が望める。

そこで、本研究では、高速道路利用経路は正確に扱い、より重要性の低い、一般道路のみを利用する経路を集約する、感度分析を用いたネットワーク集約法を考える。高速道路については詳細で正確な交通量データ、ETC データがある一方、一般道路はデータが限られ、また、高速道路料金等を考える上では、高速道路の交通量は精緻に知る必要があるが、一般道路の交通量は必ずしも同等の精度が必要とは限らない。経路の集約が本研究の感度分析であり、OD 交通量に対する感度分析の Connors らの方法との違いである。そして、構築した手法を仮想

ネットワークに適用し、感度分析を用いたネットワーク集約化の妥当性を検討する。

## 2. 確率的利用者均衡配分の定式化

### (1) モデルの基本構造

前章で述べたように、高速道路の経路交通量を計算する必要があることから、本研究では確率的利用者均衡を採用する。ドライバーの効用関数の確定項を、経路コストのみの関数  $V_{rs,k} = -\theta \cdot c_{rs,k}$  とおく。効用関数の誤差項をどのように仮定するかによって、ロジット型やプロビット型等が考えられるが、本研究では実用的に利用可能なロジットモデルによる経路選択を仮定する。このとき、OD ペア  $rs$  間の経路選択肢集合  $K_{rs}$  から経路  $k$  が選ばれる確率は以下の通りである。

$$P_{rs,k} = \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,k})}{\sum_{k \in K_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,k})} \quad (1)$$

ここで、

$P_{rs,k}$  : OD ペア  $rs$  間において経路  $k$  が選択される確率

$c_{rs,k}$  : OD ペア  $rs$  間の経路  $k$  の旅行コスト(道路料金の時間換算分を含む)

$K_{rs}$  : OD ペア  $rs$  間の経路選択肢集合

$\theta$  : 分散パラメータ

したがって、経路交通量は以下の式で表わされる。

$$f_{rs,k} = q_{rs} \cdot P_{rs,k} \quad (2)$$

ここで、

$f_{rs,k}$  : OD ペア  $rs$  間において経路  $k$  の経路交通量

$q_{rs}$  : OD ペア  $rs$  間の OD 交通量

また、交通量保存則は、

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_{rs,k} - q_{rs} = 0 \quad (3)$$

なお、式(2)は常に  $f_{rs,k} \geq 0$  であるから、経路交通量の非負条件は自明である。

経路交通量とリンク交通量の関係は、

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} \delta_{a,rs,k} \cdot f_{rs,k} \quad (4)$$

ここで、

$x_a$  : リンク  $a$  の交通量

$\delta_{a,rs,k}$  : OD ペア  $rs$  間の経路  $k$  にリンク  $a$  が含まれるとき 1, 含まれないとき 0 となる変数

$\Omega$  : OD ペアの集合

OD ペア  $rs$  間の経路  $k$  の旅行コスト  $c_{rs,k}$  は、経路を構成するリンクの旅行コストの和を用いて、以下のように表わされる。

$$c_{rs,k} = \sum_{a \in A} \delta_{a,rs,k} \cdot t_a \quad (5)$$

ここで、

$t_a$  : リンク  $a$  の旅行コスト

$A$  : リンク集合

## (2) リンクコスト

均衡配分で用いることができる代表的なリンクパフォーマンス関数として、BPR関数やDavidson関数などが用いられるが、本研究では、BPR関数を用いる。また、有料道路の取り扱い、道路利用者の経路選択要因として旅行時間と道路料金の2つが主要なものであると考え、旅行時間と道路料金の両方を考慮できるように、道路料金を時間に換算して旅行時間に加算することとする。本研究では、通常のBPR関数に料金の時間換算項を付加したものを採用することとする。よって、有料道路のリンクパフォーマンス関数は次の関数形で表される。なお、本来は経路について料金を付加する必要があるが、本研究では均一料金制を採用する都市高速道路を含む道路網を対象とし、入口で料金を付加すれば良いため、入口のリンクに料金項を設けることで計算を行うこととする。

$$t_a(x_a) = t_{a0} \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left( \frac{x_a}{C_a} \right)^\beta \right\} + \frac{\pi_a}{\xi} \quad (6)$$

ここで、

$t_{a0}$  : リンク  $a$  の自由旅行コスト

$C_a$  : リンク  $a$  の交通容量

$\alpha, \beta$  : BPR関数のパラメータ

$\pi_a$  : リンク  $a$  の道路料金

$\xi$  : 料金時間換算パラメータ (時間価値)

## (3) 等価な最適化問題

式(1), (2), (3), (4)で示したロジット型確率的利用者均衡条件は、以下の数理最適化問題の解として求めることができる。

$$\min_{x,f} Z = \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(w) \cdot dw - \sum_{rs \in \Omega} \frac{1}{\theta} \cdot q_{rs} \cdot \sum_{k \in K_{rs}} \left( -\frac{f_{rs,k}}{q_{rs}} \cdot \ln \frac{f_{rs,k}}{q_{rs}} \right) \quad (7)$$

制約条件 :

$$f_{rs,k} \geq 0 \quad (8)$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_{rs,k} - q_{rs} = 0 \quad (9)$$

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{k \in K_{rs}} \delta_{a,rs,k} \cdot f_{rs,k} \quad (10)$$

この数理最適化問題(多次元非線形最適化問題)は、一般には解析的に解くことはできないため、未知変数  $\{x_a\}$  と  $\{f_{rs,k}\}$  を繰り返し更新することにより、徐々に目的関数  $Z$  の値を小さくしていくというアプローチを用いることになる。

## 3. 感度分析による経路集約

### (1) 一般経路の集約

感度分析は、モデルや式内の変数が変化した時、アウトプットにどの程度影響を与えるのかを調べる手法である。数理計画問題においては、目的関数や制約関数、パラメータを微小変化させたときの、最適解や最適値の変化や変化率等を近似的に調べることに多用されている。

本研究では、前章で述べた確率的利用者均衡配分をベースとし、複数の一般道路のみを利用する経路(以下、一般経路)を一つの経路に集約する。このように高速道路を一部でも利用する経路(以下、高速経路)はそのまま、一般経路(一般道路のみの経路)は一つの経路に集約すると、高速経路の交通量が分かると集約した一般経路の交通量は自動的にOD交通量から高速経路の交通量を減らすことで得られる。問題となるのは集約した一般経路の旅行時間をどのように取り扱うかである。一般経路の旅行時間は均衡を通じて高速経路の交通量にも影響を与えるため、取り扱いが難しい。つまり、変数としては、高速経路の交通量のみを取り扱うことで十分であるものの、集約した経路の旅行時間を確率利用者均衡の枠組みの中で考えなければならない。繰り返しになるが、高速経路交通量により集約した一般経路旅行時間が変化し、それが高速経路交通量に影響を与えるからである。

そこで、本研究では、感度分析を用いることで確率的利用者均衡の枠組みの中で高速経路交通量の変化に対する一般経路交通量の変化を近似的に算出し、集約した一般経路の旅行時間を計算することで、高速経路と一つに集約した一般経路の間で確率的利用者均衡を行う方法を以下に提案する。感度分析自体は既に多くの研究で用いられているものであり、また、ネットワークの集約についても前述の通り、Connorsらの研究もある。本研究の特徴は、経路を集約するという形でのネットワークの集約を提案し、それに感度分析を適用した点であると言える。

一般経路集合と高速経路集合を異なる経路集合とみなし、リンク交通量はそのリンクを通過する経路交通量の総和として定義する。そして、一般経路交通量を感度分析を用いて高速経路交通量の関数として近似的に算出する式を導出する。一般経路交通量を高速経路交通量の関数とすることで、変数としては高速経路交通量のみを考

えるだけでよく、一般経路交通量の配分計算を省き、変数自体も削減することによって、一般経路に関しては近似される部分はあるものの、計算時間の大幅な短縮が期待できる。

まず、経路交通量を一般経路交通量と高速経路交通量に分離し、リンク交通量を以下のように与える。

$$x_a = \sum_{rs \in \Omega} \sum_{m \in M_{rs}} \delta_{a,rs,m}^h \cdot h_{rs,m} + \sum_{rs \in \Omega} \sum_{n \in N_{rs}} \delta_{a,rs,n}^g \cdot g_{rs,n} \quad (11)$$

ここで、

- $h_{rs,m}$  : ODペア  $rs$  間における高速経路  $m$  の経路交通量
  - $\delta_{a,rs,m}^h$  : ODペア  $rs$  間の高速経路  $m$  にリンク  $a$  が含まれるとき 1, 含まれないとき 0 となる変数
  - $M_{rs}$  : ODペア  $rs$  間の高速経路選択枝集合
  - $g_{rs,n}$  : ODペア  $rs$  間における一般経路  $n$  の経路交通量
  - $\delta_{a,rs,n}^g$  : ODペア  $rs$  間の一般経路  $n$  にリンク  $a$  が含まれるとき 1, 含まれないとき 0 となる変数
  - $N_{rs}$  : ODペア  $rs$  間の一般経路選択枝集合
- 式(11)をベクトル表示すると以下の通りとなる。

$$\mathbf{x} = \Delta^h \cdot \mathbf{h} + \Delta^g \cdot \mathbf{g} \quad (12)$$

ここで、

- $\mathbf{x}$  :  $x_a$  を要素に持つリンク交通量ベクトル
- $\mathbf{h}$  :  $h_{rs,m}$  を要素に持つ高速経路交通量ベクトル
- $\Delta^h$  :  $\delta_{a,rs,m}^h$  を要素に持つ高速経路のリンク・経路接続行列
- $\mathbf{g}$  :  $g_{rs,n}$  を要素に持つ一般経路交通量ベクトル
- $\Delta^g$  :  $\delta_{a,rs,n}^g$  を要素に持つ一般経路のリンク・経路接続行列

なお、本論文では、今後断りがない限り、ベクトルは列ベクトルとし、基本的にブロック体の英文字はベクトルもしくは行列を表すこととする。また、式中の $\cdot$ は、内積ではなく、行列積もしくはベクトルの積を表すこととする。

ここで、一般経路のみでの経路選択について考えよう。ODペア  $rs$  間の一般経路選択枝集合  $N_{rs}$  から一般経路  $n$  が選ばれる確率は以下の式によって与えられる。

$$P_{rs,n} = \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,n})}{\sum_{n \in N_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,n})} \quad (13)$$

ここで、

- $P_{rs,n}$  : ODペア  $rs$  間において一般経路選択枝集合  $N_{rs}$  から一般経路  $n$  が選択される選択確率
- $c_{rs,n}$  : ODペア  $rs$  間における一般経路選択枝集合  $N_{rs}$  から一般経路  $n$  の旅行コスト
- $\theta$  : 分散パラメータ

したがって、一般経路交通量は以下の式で表わされる。

$$g_{rs,n} = (Q_{rs} - H_{rs}) \cdot P_{rs,n} \quad (14)$$

ここで、

- $Q_{rs}$  : OD交通量
  - $H_{rs}$  : 高速経路交通量の合計
- 式(14)をベクトル表示すると、
- $$\mathbf{g} = (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{P}_g \quad (15)$$

ここで、

- $\mathbf{g}$  :  $g_{rs,n}$  を要素に持つ一般経路交通量ベクトル
  - $\mathbf{Q}$  :  $Q_{rs}$  を対角成分に持つOD交通量の対角行列
  - $\mathbf{H}$  :  $H_{rs}$  を対角成分に持つ総高速経路交通量の対角行列
  - $\mathbf{P}_g$  :  $P_{rs,n}$  を要素に持つ一般経路選択確率ベクトル
- 以上の(各ODペアにある)複数の一般経路は(各ODペアごとに)一つの経路に集約する。図-1及び図-2は一般経路集約の例を示している。集約した一般経路の交通量は  $Q_{rs} - H_{rs}$  であるものの、図-2で例示した一般経路集約後の確率利用者均衡配分の際には集約した一般経路の旅行時間が必要になる。つまり、高速経路と集約した経路の間の確率的利用者均衡配分を行うには、集約した一般経路の旅行時間を与える必要がある。本研究では、それをログサムとして与えられる以下の式の期待最小旅行時間(期待最小コスト)とする。

$$S_{rs} = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{n \in N_{rs}} \exp(-\theta c_{rs,n}(x_a(\mathbf{h}))) \quad (16)$$

もし  $x_a(\mathbf{h})$  が得られれば、集約した一般経路のコストを上式のように与えることができる ( $x_a(\mathbf{h})$  は次節で近似的

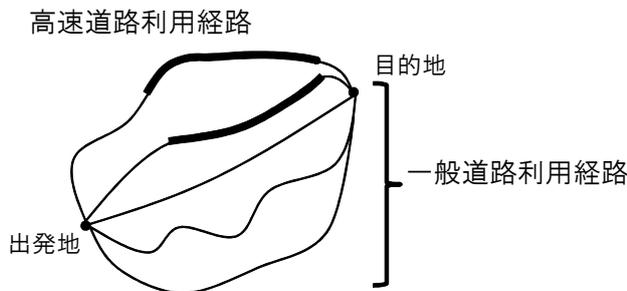


図-1 一般経路集約前ネットワーク

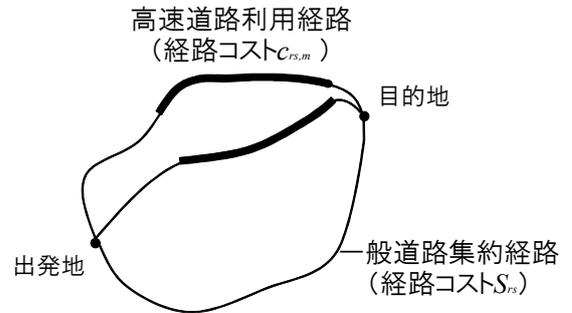


図-2 一般経路集約後ネットワーク

に与える)。そうすると、 $S_{rs}$ を用いて、求めたい高速経路の交通量は以下のように与えることができる。

$$\begin{aligned} h_{rs,m} &= q_{rs} \cdot P_{rs,m} \\ &= q_{rs} \cdot \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,m})}{\sum_{m \in M_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,m}) + \sum_{n \in N_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,n})} \quad (17) \\ &= q_{rs} \cdot \frac{\exp(-\theta \cdot c_{rs,m})}{\sum_{m \in M_{rs}} \exp(-\theta \cdot c_{rs,m}) + \exp(-\theta \cdot S_{rs})} \end{aligned}$$

ここで、

$P_{rs,m}$  : ODペア  $rs$  間において一般経路選択枝集合  $M_{rs}$  から高速経路  $m$  が選択される選択確率

$c_{rs,m}$  : ODペア  $rs$  間において一般経路選択枝集合  $M_{rs}$  から高速経路  $m$  の旅行コスト

$\theta$  : 分散パラメータ

つまり、高速経路のコストは、 $c_{rs,n}$  で集約した一般経路のコストを  $S_{rs}$  とした時の (一般経路を集約した) 確率的利用者均衡配分を行うことができる。 $S_{rs}$  を配分によって求める、つまり、 $x_a$  を配分によって求めると計算量が通常確率的利用者均衡とほぼ同じになってしまうが、次節で述べるように、配分を通さず感度分析により近似的に  $x_a(\mathbf{h})$  を与える。つまり、高速経路交通量  $\mathbf{h}$  のみを変数として、それをもとに  $x_a(\mathbf{h})$  を感度分析により近似的に与え、 $S_{rs}$  を用いることで一般経路の集約とする。

## (2) 一般経路交通量の感度分析による近似

まず、感度分析を適用するために式(15)の両辺の差をとり、それをギャップ関数  $\mathbf{d} (= \mathbf{0})$  とすると、

$$\mathbf{d}(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \mathbf{g} - (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \mathbf{P}_g(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \quad (18)$$

ここで、 $\mathbf{d}$  は一般経路交通量式の両辺の差を表すギャップ関数 (ベクトル値関数) であり、高速経路交通量  $\mathbf{h}$  と一般経路交通量  $\mathbf{g}$  の関数である。なお、高速経路交通量  $\mathbf{h}$  は、高速道路を一部でも利用する経路の交通量であり、アクセス・イグレスに一般道路を利用する場合も考慮している。そのため、 $\mathbf{P}_g$  には  $\mathbf{h}$  と  $\mathbf{g}$  を内在的に含んでいることになる。

式(18)に  $(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0)$  の周りで一次のテーラー展開を施すと、

$$\mathbf{d}(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \mathbf{d}(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0) + \nabla_g \mathbf{d} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{g}_0) + \nabla_h \mathbf{d} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) \quad (19)$$

となる。このとき、ギャップ関数  $\mathbf{d}$  は  $\mathbf{0}$  でなければならないため、 $\mathbf{d}(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{d}(\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0) = \mathbf{0}$  の条件を式(19)に適用すると以下の式が与えられる。

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{h}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}_0) - (\nabla_g \mathbf{d})^{-1} \nabla_h \mathbf{d} (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) \quad (20)$$

つまり、一般経路交通量  $\mathbf{g}$  は、高速経路交通量  $\mathbf{h}$  の関数として、上式のように与えられる。ここで、高速経路交通量の摂動を  $\mathbf{h}_s$  とすると、高速経路交通量を  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_s$  と表すことができる。また、勾配行列  $G$  を

以下の式(22)のように定義することとする。

$$\mathbf{g}(\mathbf{h}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_s) = \mathbf{g}(\mathbf{h}_0) - G \cdot \mathbf{h}_s \quad (21)$$

$$G = (\nabla_g \mathbf{d})^{-1} \nabla_h \mathbf{d} \quad (22)$$

次に、勾配行列  $G$  についてももう少し考えよう。まず、ギャップ関数の式(18)を  $\mathbf{g}$  で偏微分すると  $\nabla_g \mathbf{d}$  は、

$$\nabla_g \mathbf{d} = \mathbf{I} - (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \nabla_g \mathbf{P}_g \quad (23)$$

となる。上式の  $\nabla_g \mathbf{P}_g$  に関して、 $\mathbf{P}_g$  は  $\mathbf{c}_g$  ( $c_{rs,n}$  を要素に持つ一般経路の旅行コストベクトル) の関数、そして、 $\mathbf{c}_g$  は  $\mathbf{t}$  ( $t_a$  を要素に持つリンク旅行コストベクトル) の関数、さらに  $\mathbf{t}$  は  $\mathbf{x}$  の関数、 $\mathbf{x}$  は  $\mathbf{h}$  が与えられた場合は  $\mathbf{g}$  の関数であり、それらを偏微分する。ここで、 $\nabla_t \mathbf{c}_g$  に関しては、一般経路のリンク・経路接続行列の転置行列、 $\nabla_x \mathbf{x}$  に関しては、一般経路のリンク・経路接続行列になる。これらをまとめると、以下の式が与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla_g \mathbf{d} &= \mathbf{I} - (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \nabla_c \mathbf{P}_g \cdot \nabla_t \mathbf{c}_g \cdot \nabla_x \mathbf{t} \cdot \nabla_g \mathbf{x} \\ &= \mathbf{I} - (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \nabla_c \mathbf{P}_g \cdot \Delta^g \cdot \nabla_x \mathbf{t} \cdot \Delta^g \end{aligned} \quad (24)$$

$\nabla_h \mathbf{d}$  に関しても、上記と同様に GAP 関数を  $\mathbf{h}$  で偏微分する。

$$\nabla_h \mathbf{d} = \nabla_h \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_g - (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \nabla_c \mathbf{P}_g \cdot \Delta^g \cdot \nabla_x \mathbf{t} \cdot \Delta^h \quad (25)$$

式(24)、(25)を式(22)に代入すると、

$$\begin{aligned} G &= \left( \mathbf{I} - (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \nabla_c \mathbf{P}_g \cdot \Delta^g \cdot \nabla_x \mathbf{t} \cdot \Delta^g \right)^{-1} \\ &\quad \cdot \left\{ \nabla_h \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}_g - (\mathbf{Q} - \mathbf{H}) \cdot \nabla_c \mathbf{P}_g \cdot \Delta^g \cdot \nabla_x \mathbf{t} \cdot \Delta^h \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

今度はリンク交通量について考えよう。式(12)、(21)をまとめると、リンク交通量  $\mathbf{x}$  は高速経路交通量  $\mathbf{h}$  の関数として、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{h}) &= \Delta^h \mathbf{h} + \Delta^g \mathbf{g}(\mathbf{h}) \\ &= \Delta^h \mathbf{h} + \Delta^g \mathbf{g}(\mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_s) \\ &\approx \Delta^h \mathbf{h} + \Delta^g (\mathbf{g}(\mathbf{h}_0) - G \cdot \mathbf{h}_s) \\ &= \Delta^h \mathbf{h} + \Delta^g \mathbf{g}(\mathbf{h}_0) - \Delta^g \cdot G \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $\Delta^g \mathbf{g}(\mathbf{h}_0)$  は計算時間を短縮するために事前に計算しておき、定数として与える。 $\Delta^g \mathbf{g}(\mathbf{h}_0)$  を  $\mathbf{x}(\mathbf{h}_0)$  とおくとリンク交通量は以下の式のように与えられる。

$$\mathbf{x}(\mathbf{h}) = \mathbf{x}(\mathbf{h}_0) + \Delta^h \mathbf{h} - \Delta^g \cdot G \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) \quad (28)$$

## 4. 感度分析を用いた交通量配分計算法

本研究で用いる計算アルゴリズムは、逐次平均法を用いることとする。逐次平均法は、計算手順がシンプルであり、必要とする記憶容量も少ないという利点があり、実務的にも多用される手法と言える。ただし、計算の収束に必要な繰り返し計算回数がやや多くなる。

### Step 0: 初期値の計算

予め、確率的利用者均衡配分を行い、ある状態(料金)

におけるリンク交通量の初期値  $\mathbf{h}_0, \mathbf{x}(\mathbf{h}_0)$ , およびその時の勾配行列  $G$  を計算しておく.

**Step 1: 初期実行可能解の設定**

初期実行可能解を上述の  $\mathbf{h}^0 = \{h_{rs,m}^{(0)}\}$  として設定する. そして, 高速経路交通量  $\mathbf{h}^0$  に対する以下の 4 つの計算を行う.

- ・リンク交通量  $\mathbf{x}(\mathbf{h}^0)$
- ・リンク旅行コスト  $\mathbf{t}(\mathbf{h}^0)$
- ・高速経路コスト  $\mathbf{c}_h(\mathbf{h}^0)$
- ・一般経路の期待最小コスト  $\mathbf{S}(\mathbf{h}^0)$

ここで,

$\mathbf{c}_h$ :  $c_{rs,m}$  を要素を持つ一般経路の旅行コストベクトル  
 $\mathbf{S}$ :  $S_{rs}$  を要素を持つ一般経路の期待最小コストベクトル

全 OD 交通量をネットワーク上に確率配分し, 得られた高速経路交通量を  $\mathbf{h}^1$  とする.

繰り返し計算のカウントを  $n=1$  とする.

**Step 2: 高速経路交通量の更新**

高速経路交通量  $\mathbf{h}^n$  に対する以下の 4 つの計算を行う.

- ・リンク交通量  $\mathbf{x}(\mathbf{h}^n)$
- ・リンク旅行コスト  $\mathbf{t}(\mathbf{h}^n)$
- ・高速道路の経路コスト  $\mathbf{c}_h(\mathbf{h}^n)$
- ・一般道路の期待最小コスト  $\mathbf{S}(\mathbf{h}^n)$

**Step 3: 降下方向ベクトルの算出**

Step 2 で得られた高速経路コスト  $\mathbf{c}_h(\mathbf{h}^n)$  および一般経路の期待最小コスト  $\mathbf{S}(\mathbf{h}^n)$  の下で全 OD 交通量をネットワーク上に確率的利用者配分を行い, 得られた高速経路交通量を  $\mathbf{h}^n$  とする. 降下方向ベクトル  $\mathbf{d}^n = \{d_{rs,m}^n\}$  を次式によって算出する.

$$\mathbf{d}^n = \mathbf{h}^n - \mathbf{h}^{n-1} \quad (29)$$

**Step 4: 解の更新**

これを次式に代入して, 高速経路交通量を更新する.

$$\mathbf{h}^{n+1} = \mathbf{h}^n + \frac{1}{n+1} \cdot \mathbf{d}^n \quad (30)$$

**Step 5: 収束判定**

以下に示す収束条件が満たされていないければ,  $n=n+1$

として Step 2 に戻る. 収束条件式が満たされていれば, 計算を終了しリンク交通量  $\mathbf{h}^{n+1}$  を解として出力する.

Step 5 の収束判定の方法については, やや注意が必要である. 逐次平均法の場合, ステップサイズが徐々に減少するため,  $n$  回目繰り返しでの解と  $n+1$  回目繰り返し計算での解との乖離も徐々に減少するため, 均衡状態への収束状況の把握が困難になる. 通常, 以下のような収束判定指標を用いられることから, 本研究ではこの収束判定指標を採用した.

$$D^{(n)} = \max_{m \in M} |h_{rs,m}^{(n)} - h_{rs,m}^{(n-1)}| < \varepsilon \quad (31)$$

上式は交通量に基づく指標であり, 比較的容易であることから実務で使われることが多い. 直感的には, 収束が進めばこれらの判定指標は次第に小さくなっていくことが予想される. しかし, 実際には  $D^{(n)}$  が小さくなくても必ずしも厳密解に近づいているとは限らず, また, この指標は解法によって異なった挙動を示すこともある.

**5. 仮想ネットワークへの適用**

**(1) 対象ネットワーク及び設定**

前章までに述べた手法の適用対象ネットワークは以下の図-3 の通りである. 図の実線が一般道路, 太線は高速道路 (リンク 5 が高速道路) を示している. リンクパラメータは図中の [自由旅行時間(分), 交通容量(台)] である.

ネットワークは 3 ノード, 5 リンクであり, 3 つの OD ペアがある仮想ネットワークである. OD ペアについては, ノード 1 からノード 2 へ向かう OD ペア 1, ノード 1 からノード 3 へ向かう OD ペア 2 とノード 2 からノード 3 へ向かう OD ペア 3 の 3 つである. そして, OD 交通量については, OD ペア 1 に 2000 台, OD ペア 2 に 1000 台, OD ペア 3 に 1000 台を設定する. また, 経路については OD ペア 1 の中で, リンク 1 からなる経路を経路 1, OD ペア 2 の中でリンク 1 とリンク 3 からなる経

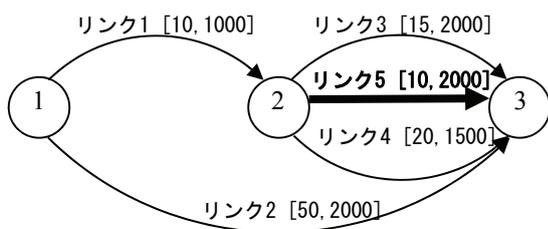


図-3 対象ネットワーク

表-1 OD交通量と経路情報

ODペア	OD交通量(台)	経路	通過リンク
(1)→(2)	2000	1	1
		2	1 3
(1)→(3)	1000	3	1 4
		4	2
		5	1 5
		6	3
(2)→(3)	1000	7	4
		8	5

路を経路 2, リンク 1 とリンク 4 からなる経路を経路 3, リンク 2 からなる経路を経路 4, リンク 1 とリンク 5 からなる経路を経路 5, OD ペア 3 の中でリンク 3 からなる経路を経路 6, リンク 4 からなる経路を経路 7, リンク 5 からなる経路を経路 8 とする. 以上の OD ペア, OD 交通量, 経路についてまとめたのが表-1 である. BPR 関数のパラメータについて,  $\alpha=1.0$ ,  $\beta=2.0$ , 時間価値(料金時間換算パラメータ) $\xi=50$ 円/分とする.

現在 500 円の高速度料金を変化させた場合の高速度路交通量及び料金収入の変化を考えることを対象に, 前章までに述べた感度分析を用いて確率的利用者均衡配分

を適用する. 料金変化として, 料金 0~1000 円 (100 円刻み) の間で配分計算を行う. 通常に感度分析を用いない場合は 11 回確率的利用者均衡配分を行う.

感度分析を用いた手法の場合も 11 回の配分を行うが, 基準となる現況の 500 円の場合のみ通常確率的利用者均衡を行い, 勾配行列等を求め, 一般経路を集約し, 残りの 10 回は一般経路が集約された確率的利用者均衡となっている. なお, いずれも確率的利用者均衡配分の計算アルゴリズムは, 逐次平均法を用いている.

上述の計算を確率的利用者均衡配分(Stochastic User Equilibrium)で配分した結果(以下, SUE)と感度分析(Sensitivity Analysis)を用いて交通量配分した結果(以下, SA)を比較する. 感度分析で用いるリンク交通量の初期値  $x(h_0)$  は, 料金 500 円における確率的利用者均衡配分により算出した値を用いることとする.

対象ネットワークでは, 経路が 8 本存在するが, 感度分析を用いることで一般経路交通量は高速経路交通量の関数として与えられることから, 実際に繰り返し計算を行うものは, 経路 5, 8 の高速経路交通量の 2 本のみを変数として計算することとなる. このことにより計算時間の短縮が可能となる.

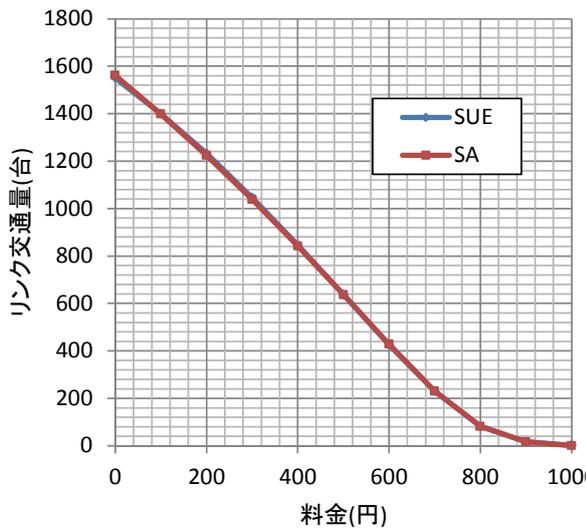


図-4 リンク 5 の交通量の比較

表-2 SUE と SA の計算時間の比較

	SUE	SA
初期値の計算時間(s)	—	2.90
配分計算時間(s)	33.12	0.48
総計算時間(s)	33.12	3.38

表-3 SUE と SA の配分計算結果

	料金(円)	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
SUE	リンク1	2273.9	2267.6	2261.3	2255.0	2248.3	2240.8	2232.6	2224.2	2217.6	2214.5	2213.8
	リンク2	726.1	732.4	738.7	745.0	751.7	759.2	767.4	775.8	782.4	785.5	786.2
	リンク3	695.1	807.5	909.3	1004.0	1098.9	1198.0	1300.0	1397.5	1471.9	1504.9	1512.2
	リンク4	28.5	60.7	119.8	204.4	303.1	405.9	506.5	597.5	664.1	693.0	699.2
	リンク5	1550.4	1399.3	1232.3	1046.6	846.2	636.9	426.0	229.2	81.6	16.6	2.4
	収束計算時間(s)	3.14	3.03	3.03	2.92	2.98	2.90	3.07	3.03	3.07	3.01	2.95
SA	リンク1	2275.5	2269.4	2263.0	2256.1	2248.7	2240.8	2232.7	2225.1	2219.5	2217.1	2216.6
	リンク2	724.5	730.6	737.0	743.9	751.3	759.2	767.3	774.9	780.5	782.9	783.4
	リンク3	731.5	814.0	902.0	995.4	1094.4	1198.0	1303.5	1402.8	1477.7	1510.8	1518.0
	リンク4	0.0	57.6	137.4	222.1	311.9	405.9	501.5	591.6	659.6	689.6	696.1
	リンク5	1561.2	1397.8	1223.7	1038.5	842.4	636.9	427.7	230.7	82.1	16.7	2.5
	収束計算時間(s)	0.02	0.03	0.02	0.03	0.03	0.05	0.02	0.03	0.08	0.09	0.09
相関係数	0.99967	0.99999	0.99993	0.99991	0.99998	1	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	0.99999	
RMSE	21.252	3.51471	9.4132	9.53566	4.74939	3E-05	2.80299	3.63249	3.52132	3.43101	3.41898	

## (2) 計算結果

SUE と SA を比較した場合の高速道路リンク(リンク 5) 交通量の配分計算結果を図-4 に、配分計算にかかる総計算時間を表-2 に示す。また、詳細な計算結果を表-3 に示す。なお、計算時間については、式(31)の収束条件を  $\varepsilon = 0.001$  で計算した結果である。

図-4、表-2、表-3 より、SUE と SA を比較した結果、配分結果の精度に問題は見られないのに加え、総計算時間は大幅に短縮していることが分かった。

総計算時間については SUE で 33.12 秒、SA で 338 秒であり、29.74 秒(約 90%)の短縮が確認できた。初期値の計算に 2.90 秒がかかっているが、配分計算時間が大幅に短縮され、それに伴って総計算時間が大幅に短縮されていることがわかる。なお、初期値の計算時間については、料金 500 円における SUE の計算時間と勾配行列  $G$  の計算時間を示している。

計算時間が短縮できた要因として、初期値からの変動によって配分計算を行っていること、計算する経路交通量の数が SUE での 8 本から SA での 2 本に減少していることから、SUE と比較して収束が早くなり計算回数、計算時間が短縮されたと考えられる。

また、表-3 中の料金が 0 の場合、SUE と比較して相関係数が 0.99967 と少し低くなったが、誤差は小さく、精度は確保できていることがわかる。このことから、初期値(料金 500 円)から離れるにつれ精度は落ちると考えられるが、大きな誤差は生じないと予想される。以上により、本研究で用いた手法の有用性を確認することができた。なお、料金が 0 の場合、本来 RMSE が 0 となるべきであろうが、表-3 で  $3E-5$  となっているのは、計算機上の丸め誤差により生じた誤差であると考えられる。

## 6. まとめ

本研究では、料金設定のために用いる配分計算を行う際、計算時間が膨大になるという問題に対して、感度分析を用いたネットワークの集約化手法を用いる方法を提案し、配分計算を効率化することで計算時間の短縮を試

みた。提案モデルを仮想ネットワークに適用した結果、計算時間の短縮とともに配分精度の確保が確認できたため、本モデルが有用であると考えられる。

今後の課題として、本研究で提案したモデル中の勾配行列  $G$  は[一般道路経路数×高速道路経路数]の行列であり、阪神高速道路を含む京阪神道路ネットワークなどでは経路数が膨大となり、計算が困難になることが予想される。これを解決する方法として、勾配行列の簡略化を検討している。これは、勾配行列を 0 次の近似と置くことで大幅な計算負荷の軽減を実現できる。料金設定を考える際、大まかな料金体系を、簡略化した勾配行列を用いた配分により推定し、詳細を通常の確率的利用者均衡配分により決定する方法を用いることで計算時間の大幅な短縮が期待できる。今後は勾配行列の簡略化等に関しての検討が必要であると考えられる。

## 参考文献

- 1) Chan, Y.: A Method to Simplify Network Representation in Transportation Planning, *Transportation Research*, Vol.10, pp.179-191, 1976.
- 2) 飯田恭敬, 高山純一, 横山日出男: メッシュ分割によるネットワーク表示の簡略化手法を用いた交通量配分計算法, 土木計画学研究・論文集, No.2, pp.149-156, 1985.
- 3) 飯田恭敬, 朝倉康夫, 広川誠一, 鷹尾和享: ネットワークの分割およびバンドリングによる交通量配分計算の効率化, 土木計画学研究・講演集, No.11, pp.227-234, 1988.
- 4) 佐々木綱, 朝倉康夫, 楊海: 連続的空間における単一 OD ペアに関する交通量配分, 土木計画学研究・講演集, No.11, pp.23-30, 1988.
- 5) 飯田恭敬, 朝倉康夫, 楊海, 進士肇: ネットワークの連続体近似による交通量配分, 土木計画学研究・講演集, No.12, pp.543-550, 1989.
- 6) Connors, R. D., Sumalee, A. and Watling, D. P.: Sensitivity analysis of the variable demand probit stochastic user equilibrium with multiple user-classes, *Transportation Research Part B*, Vol.41, pp.593-615, 2007.
- 7) Connors, R. D. and Watling, D. P.: Aggregation of Traffic Networks Using Sensitivity Analysis, *UTSG*, 2A1.1-2A1.11, January 2008.

(2011.2.25 受付)

# EFFICIENT CALCULATION OF STOCHASTIC USER EQUILIBRIUM WITH ROUTE AGGREGATION USING SENSITIVITY ANALYSIS

Yuya OKAMOTO, Sho-ichiro NAKAYAMA and Jun-ichi TAKAYAMA

Assignment of route flows is required when examining fare discount of some routes on urban expressways. In general, traffic assignment of a large-scale road network needs much computation capacity and computation time, and work of data entry and displaying results is also very tough. It is important to reduce computational cost and capacity especially when traffic assignment is made many times. Aggregation of traffic network is one of the methods for reducing the computation cost, maintaining the accuracy of the results. In this study, a method of aggregating the routes that consist solely of general links is developed using sensitivity analysis, and traffic assignment is made between the aggregated general link route and routes which wholly or partially include expressway link. Then, the above method is applied to a simple network and its validity and computational time reduction are examined.