

ヤング率変化を有する巻糸体内部のひずみ解析理論

金沢大学工学部 新 宅 救 徳 (会員)
 " 尾 田 十 八
 " 谷 義 則 (会員)
 旭化成繊維テクノロジーサーチ(株) 奥 野 登 起 男 (会員)

Strain Analysis of Yarn Package with Young's Modulus Distribution

Sukenori Shintaku*, Juhachi Oda*, Yoshinori Tani*, Tokio Okuno**

*Department of Mechanical Engineering, Kanazawa
 University, Kodatsuno, Kanazawa

**Asahi Chemical Textiles & Fibers Techno Research,
 Nonoichi, Ishikawa

Abstract

We proposed the strain analysis theory considering radial Young's modulus distribution in yarn package, and theoretical strain distribution is derived by using the data of model experiment which decides radial Young's modulus distribution. The obtained results are as follows:

- (1) Strain analysis considering radial Young's modulus distribution come true by separating strain equations and using variable K for the hardness of yarn package.
- (2) Effectiveness of radial Young's modulus of internal yarn layer is large for strain distribution.
- (3) Theoretical strain distribution in yarn package is good agreement to the experimental strain distribution.

(Received June 5, 1990)

摘 要

目的：巻糸体内の半径方向ヤング率分布を任意に設定できる理論式を導き、この理論式にモデル実験より得られたヤング率分布を適用することで実際の巻糸体に近いひずみ解析を行った。

成果：1) ひずみ解析に硬度変数 K を用いて、ひずみ分布式を離散化することにより半径方向ヤング率を各糸層位置で任意に設定することが可能となる。

2) 巻糸体の半径方向ヤング率は、内層ほどひずみ分布に与える影響が大きい。

3) モデル実験により得られた半径方向ヤング率分布を用いることにより、実験値に近いひずみ分布を表す理論式が得られた。
 (平成2年6月5日受理)

1. 緒 言

繊維産業における巻取工程では、巻糸体の巻量、巻径、心筒強度などを設定する際に巻糸体内部の糸特性や応力・ひずみ分布の把握が必要であり、このことは特殊繊維の巻き取りでは、益々その重要性が高まっている。これまでの巻糸体内部の応力・ひず

み状態の解析理論は、巻糸体を等方性弾性体あるいは異方性弾性体と仮定したものであり、これらの解析では巻糸体内部のヤング率やポアソン比といった力学的特性は、その方向性は考慮しても巻糸体内部の任意位置については一定とした解析であった¹⁻³⁾。しかし、巻糸体内部の空孔率や累積する糸層による

締め付け力などによって内部特性変化は無視できないと考えられる。巻糸体の円周方向ヤング率は糸の長手方向のヤング率から計算できるが、半径方向ヤング率は糸層の累積状態や巻張力によって左右され、又、糸層厚さごとに変化することが考えられ、著者らもそのような変化を実験的にすでに明らかにしている⁹⁾。このことから、巻糸体内部の正確な応力・ひずみ解析を行う場合、半径方向ヤング率の分布についても考慮することが必要不可欠と考えられる。

このことは、著者らが以前に行った半径方向のヤング率を巻糸体内部全てにおいて一定と考えて提案した理論¹⁰⁾による巻糸体内部のひずみ解析結果が対応する実験結果^{9), 11)}と一致しない点の大きな理由とも考えられる。そこで、本報では、異方性係数を半径方向に対して変化させた巻糸体の応力・ひずみ解析理論を提案する。即ち、半径方向の応力 σ_r と変位 U の関係を糸層厚さの変数で表し、更にそれらの式を離散化することにより、 E_r の分布を考慮できる応力・ひずみの理論式の導出を可能とした。又、本報ではこの理論を用いて前報⁹⁾で求めたヤング率分布を用いた巻糸体のひずみ解析を行った結果をも示す。

2. 巻糸体の応力・ひずみ解析理論

ここで述べる巻糸体内部の応力・ひずみ解析理論では、解析を容易にするため巻糸体は軸上に微小厚さの糸層が同心円状に累積されているものと考え、又、巻糸体内部の微小要素における応力の釣合いは軸方向応力は無視できるものと考え、一応、平面応力状態と仮定している。

2.1 基礎式

外半径 r の巻糸体に dr の微小厚みの糸層を巻き加えた場合、巻糸体の中心より $d\theta$ の微小扇状部分を取り出し、図1のように各応力や寸法記号を定義すると、 $r \sim r+dr$ 間の半径(r)方向の力の平衡条件式は次のようになる。

$$-\sigma_{m+1}(r+dr)d\theta + \sigma_m r d\theta + 2(\sigma_m \sin \frac{d\theta}{2})dr = 0 \quad (1)$$

上式を簡単にするに次式となる。

$$\sigma_{m+1}(r+dr) = \sigma_m r + \sigma_m dr \quad (\because \sin \frac{d\theta}{2} \div \frac{d\theta}{2}) \quad (2)$$

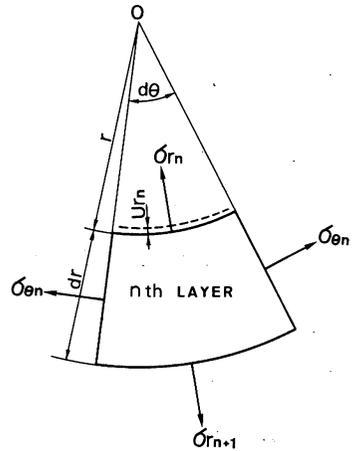


Fig. 1 Relation between the stress and the displacement in an element in yarn package.

一方、平面応力状態を仮定しているので、円周方向ひずみ $\epsilon_{\theta n}$ は次式で表される。

$$\epsilon_{\theta n} = \frac{\sigma_{\theta n}}{E_{\theta}} - \nu_{r\theta} \frac{\sigma_r}{E_r} \quad (3)$$

E_{θ} : 円周方向ヤング率

E_r : 半径方向ヤング率

$\nu_{r\theta}$: ポアソン比

ここで、Maxwellの相反定理より次式が成り立つ。

$$\frac{\nu_{r\theta}}{E_r} = \frac{\nu_{\theta r}}{E_{\theta}} \quad (4)$$

(4)式の $\nu_{r\theta}$ を(3)式へ代入して $\nu_{r\theta}$ を消去すると次式となる。

$$\epsilon_{\theta n} = \frac{\sigma_{\theta n}}{E_{\theta}} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_{\theta}} \quad (5)$$

いま、 n 層での r 方向の変位量を u_m とすれば、円筒座標系において次式が成り立つ。

$$\epsilon_{\theta n} = \frac{u_m}{r} \quad (6)$$

ここで、 u_m と σ_m の比を次式のように K_n とおき、これを硬度変数と定義する。

$$K_n = \frac{\sigma_m}{u_m} \quad (7)$$

(6)式と(7)式より u_m を消去すると、

$$\epsilon_{\theta n} = \frac{\sigma_m}{K_n r} \quad (8)$$

さらに、(8)式と(5)式より次式の関係が成り立つ。

$$\frac{\sigma_m}{K_n r} = \frac{\sigma_{\theta n}}{E_{\theta}} - \nu_{\theta r} \frac{\sigma_r}{E_{\theta}}$$

$$\sigma_{\theta n} = \left(\frac{E_{\theta}}{K_n r} + \nu_{\theta r} \right) \sigma_m \quad (9)$$

(9)式を(2)式へ代入すると次式が成り立つ。

$$\sigma_m = \frac{r+dr}{r + \left(\frac{E_{\theta}}{K_n r} + \nu_{\theta r} \right) dr} \sigma_{m+1} \quad (10)$$

又、(9)式と(10)式より、 $\sigma_{\theta n}$ を求めると次式となる。

$$\sigma_{\theta n} = \frac{r+dr}{\left(\frac{E_{\theta}}{K_n r} + \nu_{\theta r} \right)^{-1} r + dr} \sigma_{m+1} \quad (11)$$

簡単化のため次式を定義する。

$$A_n = \frac{r+dr}{r + \left(\frac{E_{\theta}}{K_n r} + \nu_{\theta r} \right) dr} \quad (12)$$

$$B_n = \frac{r+dr}{\left(\frac{E_{\theta}}{K_n r} + \nu_{\theta r} \right)^{-1} r + dr} \quad (13)$$

よって、(10)、(11)式は次式となる。

$$\sigma_m = A_n \sigma_{m+1} \quad (14)$$

$$\sigma_{\theta n} = B_n \sigma_{m+1} \quad (15)$$

以上の(14)、(15)式は A_n 、 B_n が与えられ、かつ σ_{m+1} が求まっているとき、 σ_m 、 $\sigma_{\theta n}$ を与える式であり、又、第 n 層と第 $n+1$ 層の応力間の関係を与える漸化式と解釈できる。

2.2 境界条件

図2に示す巻糸体断面において巻糸体は内半径 r_0 、外半径 R であるとする。いま、外半径 R の巻糸体に dr の厚さの糸層を張力 T で巻き付けることにより、この dr の糸層よりも内側には圧縮力 p が生じると仮定する。又、心筒は巻糸体に比べ剛性が大きく、その変形が無視できるほど小さいとすれば、境界条件は次のようになる。

$$(a) \quad r=r_0 \text{ において } u_{r0} = 0 \quad (16)$$

u_{r0} : 心筒表面での半径方向変位

$$(b) \quad r=R \text{ において } \sigma_r = -p = -T \frac{dr}{R} \quad (17)$$

さて、ここで(16)式を満たすために、(7)式で定義した K_n を次のように仮定する。

即ち、心筒を剛体と考えているので、 $r=r_0$ のときは $u_{r0} = 0$ となり、 K_n が無限大になる。一方、 $(r-r_0)$ の増大とともにこれは減少し、その傾向は半径方向

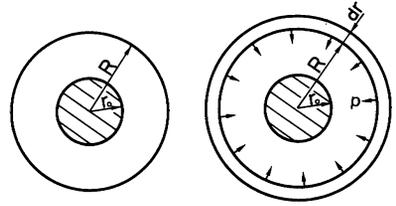


Fig. 2 Cross-section of yarn package.

に対して指数関数的に変化する σ_n 、 u_r に依存するので、これらを考慮し K_n を次式で置くことにする。

$$K_n = C_1 (r-r_0)^{C_2} + C_3 \quad (18)$$

ただし、 C_1 、 C_2 、 C_3 は定数であり、 $C_2 < 0$ 、 $r \geq r_0$

2.3 応力・ひずみ式

外半径 R まで巻糸体形成した場合その最外層を $n+m$ 層としたとき、 $n+m$ 層を形成したことにより半径 R の位置で生じる半径方向応力 σ_{m+m} は境界条件(17)式を用いて次のように与えられる。

$$\sigma_{m+m} = -T \frac{dr}{R} \quad (19)$$

このとき n 層に生じる半径方向応力 σ_n は、(19)式の σ_{m+m} を(14)式の σ_{m+1} に代入し、この操作を繰り返すことにより求められる。

いま、上記のようにして求めた σ_m を σ_{mm} と表す、外半径 R まで巻き取りが終了したときの r の位置での半径方向応力 σ_m^* は各巻層応力を重ね合わせることで次式のように与えられる。

$$\sigma_m^* = \sum_{i=1}^m \sigma_{mi} \quad (20)$$

(20)式を(9)式に代入することにより

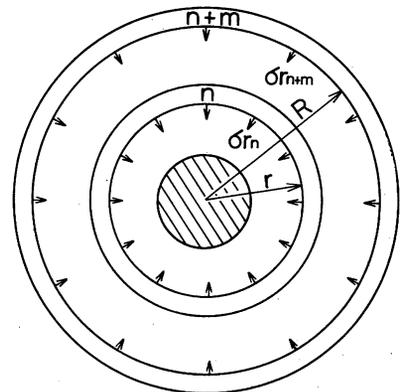


Fig. 3 Transmitting area of stress to the internal layer from the external layer.

$$\sigma_{\theta}^* = \left(\frac{E_{\theta}}{K_n r} + \nu_{\theta r} \right) \sigma_m^* \quad (21)$$

このときの σ_m^* は R まで巻き取りが終了した時点での r の位置での円周方向応力を示している。

よって、このとき対応する位置での円周方向ひずみ ε_{θ}^* は(8)式の σ_m を σ_m^* と置き換えた式と等価であることから次式で与えられるものとなる。

$$\varepsilon_{\theta}^* = \frac{\sigma_m^*}{K_n r} \quad (22)$$

2.4 半径方向ヤング率の設定

巻糸体内部の特性分布 K_n は、(18)式において C_1 , C_2 , C_3 の値を決めることにより求まる。この K_n の値を設定することは、巻糸体における n 層での半径方向ヤング率 E_m を設定することと等価となる。そこで、 K_n と E_m の関係を導いてみよう。

いま、 n 層での半径方向ヤング率 E_m を次式と置く。

$$E_m = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} \quad (23)$$

半径方向ひずみは次式で与えられる。

$$\varepsilon_m = \frac{u_m - u_{m-1}}{dr} \quad (24)$$

(24)式を(23)式に代入することにより

$$E_m = \frac{\sigma_m dr}{u_m - u_{m-1}} \quad (25)$$

(7)式を用いると

$$E_m = \frac{\sigma_m dr}{\frac{\sigma_m}{K_n} - \frac{\sigma_{m-1}}{K_{n-1}}} \quad (26)$$

又、(14)式より

$$\sigma_{m-1} = A_{n-1} \sigma_m \quad (27)$$

(27)式を(26)式へ代入し、 σ_m を消去すると

$$E_m = \frac{dr}{(K_n)^{-1} - A_{n-1} (K_{n-1})^{-1}} \quad (28)$$

以上より、 E_m の分布が実験により既知の場合は、(28)式の E_m 値が実験値を表すように C_1 , C_2 , C_3 を設定することで、ひずみ解析を行うことができ、又、逆に E_m の分布が未知の場合には、(22)式の ε_{θ}^* 値がひずみ測定値を表すように C_1 , C_2 , C_3 を設定することで、 E_m の分布を算出することも可能である。

3. E_r 分布とひずみ分布

ここでは、本報で求めたひずみ解析理論を用い、

半径方向ヤング率 E_r の分布の変化を仮定した場合の円周方向ひずみの分布をナイロン巻糸体に当てはめた計算例について示す。なお、このとき巻張力 $T = 10.7 \text{ MPa}$ 、円周方向ヤング率 $E_{\theta} = 2744 \text{ MPa}$ 、内半径 $r_0 = 12.5 \text{ mm}$ として計算を行っており、離散化に際しての dr の値は、最内層で 0.01 mm として計算精度を高めており、外層に近くなるほど dr は粗くし最外層では 0.4 mm とした。

3.1 ヤング率分布を直線的と仮定した場合

まず、半径方向ヤング率 E_r が糸層厚さの増加に伴い直線的に変化する場合について、そのひずみ変化を計算した結果を示す。なお、ヤング率の値は内層から外層に至る平均がすでに著者らが行ったヤング率一定での解析¹⁰⁾に用いられる値 (1372 MPa) となるような分布を与えている。

図5はヤング率分布を図4のように仮定して求めた円周方向ひずみの計算結果である。この図中に示すようにヤング率が直線的に変化し、それが、図4中の(a)、(b)のように Δr に対して増加方向に変化するときひずみ値が大きくなる。逆に、図中の(d)、(e)のように減少方向に変化するとき、ひずみ値が小さくなっている。これは、各糸層において、その糸層よりも内層側のヤング率の大きさは糸層の変位に与える影響が大きいのに対し、糸層より外層側のヤング率は巻取張力が糸層に半径方向応力として伝わるまでの応力緩和の程度に影響するだけであることから、ひずみ分布に与える影響は小さい。そのため内層側での平均ヤング率の違いが、ひずみの大きさに現れたといえる。又、ひずみ分布形状について見ると、ヤング率分布の傾きが(e)から(a)のように Δr に対して増加する傾向に対して、図5の ε_{θ}^* の最大

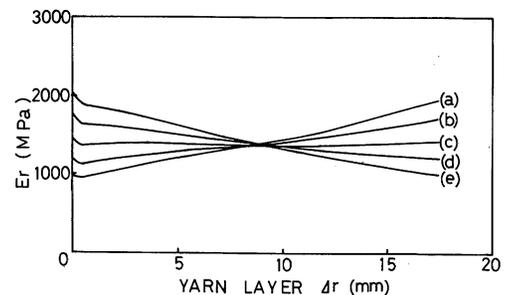


Fig. 4 Distribution of radial Young's modulus. (linear)
 (a), (b) increase
 (c) constant
 (d), (e) decrease

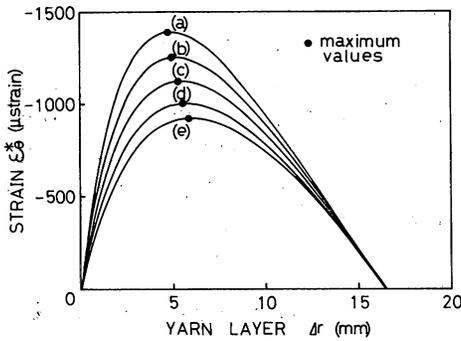


Fig. 5 Relation between circumferential strain and yarn layer thickness of yarn package for various Young's modulus distributions (a)-(e). (linear)

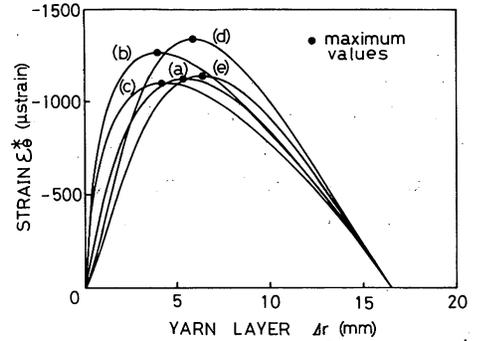


Fig. 7 Relation between circumferential strain and yarn layer thickness of yarn package for various Young's modulus distributions (a)-(e). (circumflex)

値が内層側へ移動することが示されている。

3.2 ヤング率分布を曲線状と仮定した場合

次に、ヤング率の分布形状による影響を知るため、図6のようにヤング率を凸状となる分布と仮定することにより、内層側 ($\Delta r < 5$ mm の範囲)での平均ヤング率の違いを小さくして計算を行った。なお、このときのヤング率の分布もその平均が約 1,372 MPa になるように設定している。

図7は、ヤング率分布を図6のように仮定したときのひずみ分布の計算結果である。図6の(b), (c)のようにヤング率を凸状に変化させた場合、図7の(b), (c)のようにひずみ分布の最大値は内層側へ移動する。又、図6(d), (e)のように凹状に変化させた場合は、図7の(d), (e)のように外層側へ移動している。どちらの場合も、ヤング率を直線的と仮定したときに比べ、ヤング率の変化量が大きいと、ひずみ最

大値の移動量が大きくなっている。

以上のように、ヤング率の分布形状とひずみ分布形状との相関を明らかとした。

4. 実験値を用いたひずみ解析と考察

ここでは、実験により求められた半径方向ヤング率分布をもとにひずみ解析を行うことにする。まず、図8の(a)は、巻張力 7 gf (0.069 N) で形成したポリエステル燃糸巻糸体を用いて著者らが実験したヤング率分布の測定結果を前報⁹⁾より引用して近似式(18)及び(28)式を用いることにより示したものである。このヤング率分布は最内層で最も小さく、糸層厚さが増加するに従い内層部で急激な上昇の後、一定値に収束する傾向を示している。この分布を先の2章で述べた理論に適用すると図9の曲線(a)で示される理論ひずみ分布が求められる。なお、この理論曲線は $E_0 = 8418$ MPa, $r_0 = 46.5$ mm として計算を行っている。一方、図9中の・は、対応する燃糸巻糸体内の円周方向にひずみゲージを挿入することに

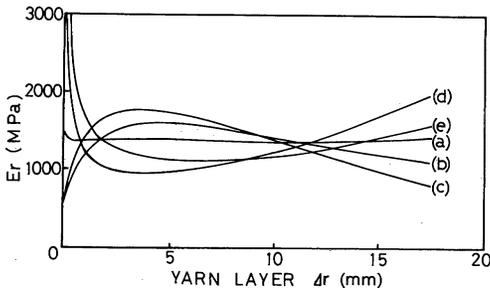


Fig. 6 Distribution of Radial Young's modulus. (circumflex)
(a) constant
(b), (c) convex curves
(d), (e) concave curves

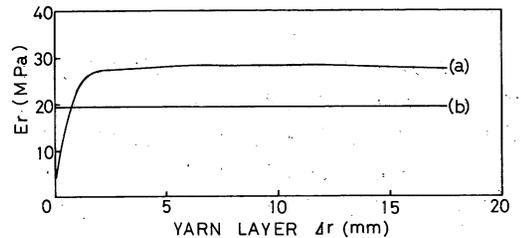


Fig. 8 Radial Young's modulus distribution to yarn layer thickness Δr .
(a) according to the model experiment
(b) constant Young's modulus (19.6 MPa)

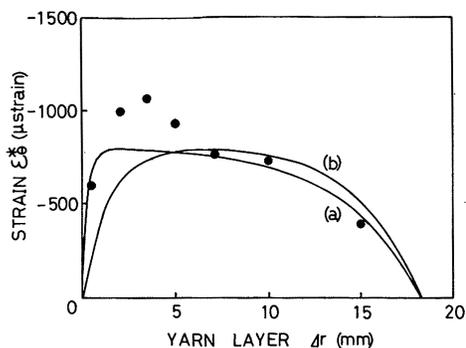


Fig. 9 Relation between circumferential strain and yarn layer thickness Δr of the twisted yarn package. Solid lines are theoretical strain curves.

- are circumferential strain, under constant winding tension $T = 7 \text{ gf}$ (0.069 N).
- (a) according to the model experiment
- (b) constant Young's modulus (19.6 MPa)

より測定された円周方向ひずみ値である。この実験値は内層側が高く、そして外層側では低くなっており、全体的にはひずみ最大値が内層側へ片寄る傾向が見られ、その傾向は本報で示した理論値のそれに近いものであることが分かる。このことは又、図8(a)の E_r 分布と半径方向での平均値が等しい一定分布(b)をもとに計算した ϵ_{θ}^* の分布である図9(b)が明らかに対応する実験値とかなり相違したものとなっていることから分かる。以上のことは、ヤング率の分布を考慮することにより巻糸体内部のひずみ解析をより正確に行えることを示している。

5. 結 言

本報告では、巻糸体内の半径方向ヤング率分布を任意に設定できる理論式を導き、これに実際の巻糸体を用いた実験により測定された半径方向ヤング率分布を適用することによって、より正確なひずみ解析を行った。そして、次のことが明らかとなった。

- 1) 式を離散化することにより、半径方向ヤング率を糸層厚さにより変化させ得る巻糸体内部の応力・ひずみ式を導出した。
- 2) 巻糸体内層側の半径方向ヤング率の大きさが巻糸体内部のひずみ分布に与える影響は大きい。
- 3) モデル実験から推定したヤング率分布を用いた巻糸体内部のひずみ分布は、実際の巻糸体のひずみ分布を表し得る。

最後に本研究を遂行するに際し、当時金沢大学工学部の卒業研究生であった平野敬君に多大なる協力を得た。ここに記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) B. Beddoe; J. Strain Analy., 2, No. 3, 207 (1967).
- 2) B. G. Neal; J. Strain Analy., 2, No. 3, 213 (1967).
- 3) V. Vicentini; J. Strain Analy., 4, No. 1, 48 (1969).
- 4) P. Ursiny; Textiltechnik, 36, No. 10, 535 (1986).
- 5) M. G. Catlow, G. W. Walls; J. Text. Inst., 35, T 410 (1962).
- 6) 西原利夫, 藤野清久, 平井恒夫, 津久間新; 機論, 26, No. 164, 588 (1960).
- 7) 中島達夫; 織機誌, 20, No. 7/8, T 194 (1967).
- 8) V. A. Stepanov; Izv Vyssh Uchebn Zaved Tekhoni Tekst Prom-st, No. 3, 136 (1976).
- 9) 新宅救徳, 尾田十八, 谷義則, 奥野登起男; 織機誌, 43, No. 10, T 86 (1990).
- 10) 新宅救徳, 尾田十八, 奥野登起男; 織学誌, 45, No. 6, 278 (1989).
- 11) 新宅救徳, 尾田十八, 奥野登起男; 織学誌, 46, No. 3, 115 (1990).

正誤表 (本誌 Vol. 43, No. 10, 平成2年10月号に次の誤りがありましたのでお詫びして訂正します)

52頁 (T 89) 右欄4行目「 E_m' の値は……」を「 E_m の値は……」に、同6行目「 E_m は……」を「 E_m' は……」に。