

変位と面外応力を仮定する一般化高次平板理論による静的・動的解析

—Hu-Washizu 原理に基づく理論の定式化—

STATIC AND DYNAMIC SOLUTION OF GENERAL HIGHER-ORDER PLATE THEORY
ASSUMING DISPLACEMENTS AND OUT-OF-PLATE STRESSES

—Formulation of theory based on the Hu-Washizu basis—

後藤 裕*¹, 根岸嘉和*², 平島健一*³, 廣瀬幸雄*⁴
Hiroshi GOTO, Yoshikazu NEGISHI, Ken-ichi HIRASHIMA
and *Yukio HIROSE*

The mixed assumption theory can propose static and dynamic theory which satisfy the boundary conditions of upper and lower surfaces of the plate. In this paper, we formulate general higher-order theory of plates under assumption of displacement and stress components of the plate thickness distribution by using the dynamic variation principle of the mixing type which made specialized the basis of Hu-Washizu. This equation was examined through static and dynamic solution example, and as well was studied the influence given to the solution precision if it satisfies or not boundary condition of upper and lower surfaces of the plate.

Keywords : Displacement, Out-of-plate stress, Higher-order theory, Variation principle, Plate thickness direction distribution, Boundary condition

変位、面外応力、高次理論、変分原理、板厚方向分布、境界条件

1. はじめに

現実の工学問題においては、特殊な荷重や初期条件・境界条件に限定されずに、一般的な問題に関し理論的に矛盾を含まない、より厳密かつ実用性のある理論が望まれる。そのために、最も基本的構造要素である平板理論の使用性と精度の良さを兼ね備えていることが不可欠であり、複合材料・複合構造等の最近の動向を踏まえて、工学の各種分野での利用に寄与する混合仮定型の理論を提案する。この理論は、平板の変位成分と応力成分の双方を同時に仮定するため理論の従属変数の数が増え支配式が多元連立の形になるものの、変位仮定型・応力仮定型の両理論の欠点を補い、上下表面の境界条件を(応力境界のみならず変位境界の場合でも)完全に満足させた静的・動的解析理論の構築が可能である。

しかしながら、この系統においての高次理論定式化の試みは、静的問題に関して、ある特殊な多項式を用い限られた次数まで限定した形で幾つかなされているに過ぎない。^{10)~15)}(文献¹⁰⁾は Hellinger-Reissner 原理に基づく定式化、文献¹¹⁾, ¹²⁾は高次断面力の釣合方程式を付帯条件とする全補足ひずみエネルギーの原理に基づ

く手法による定式化、また文献¹³⁾~¹⁵⁾は層接合面での連続条件を満足する変位と面外応力を低次から高次に到る各種多項式の形で仮定したもののだが、いずれも静的な高次解析理論である。)

そこで本研究においては、変位と面外応力の双方を Legendre 多項式とその積分形の多項式で展開仮定することから出発し、Hu-Washizu のひずみエネルギーに基づく混合型の動的変分原理¹⁶⁾に平板理論定式化のための特殊化を施した変分原理を用いて、混合仮定型の静的・動的な一般化高次平板理論を定式化し、数値例を通じ精度特性を検証するとともに、上下表面の境界(荷重)条件を満足させるか否かが、それらの解析精度に与える影響について検討を加える。

2. 理論の定式化

混合仮定型の Hu-Washizu の変分原理¹⁶⁾に平板理論の定式化の目的に合わせた変形を加えることで動的な変分原理を求める。

さらにこれを用いて、面内等方性の均質な等厚板の動的解析理論として、各種成分の板厚方向分布に対して次数に制限を設けない一般化高次理論を定式化する。

*¹ 宇宙開発事業団施設設備室 調査役・工修
(当時金沢大学共同研究センター助教授)

*² 福島工業高等専門学校建設環境工学科 教授・工博

*³ 山梨大学工学部土木環境工学科 教授・工博

*⁴ 金沢大学理学部計算科学科 教授・工博

Special Staff to the Director, Ground Facilities Office, National Space Development Agency of Japan, M. Eng.

Prof., Dept. of Civil Engineering, Fukushima National College of Technology, Dr. Eng.

Prof., Dept. of Civil and Environmental Engineering, Faculty of Engineering, Yamanashi Univ., Dr. Eng.

Prof., Dept. of Computational Science, Faculty of Science, Kanazawa Univ., Dr. Eng.

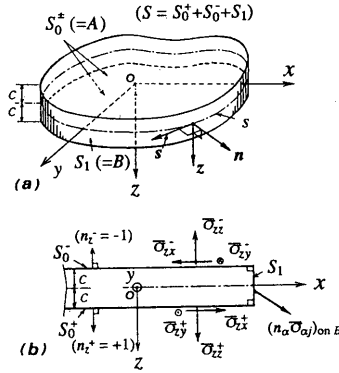


図1 平板の形状と表面力ならびに座標系

まず、図1に示すような座標系の平板に対する動的な支配方程式ならびに境界条件式を得るために、次式のような変分原理を用いる。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \{T_M - \Pi_M\} dt = 0. \tag{1}$$

式中の T_M は、運動エネルギーであり次式で与えられる。

$$T_M = \int_V \left[\frac{1}{2} \rho v_j v_j - p_j (v_j - \dot{u}_j) \right] dV = 0. \tag{2}$$

ここに v_j は速度成分、 u_j は変位成分であり、 ρ は質量密度、 p_j は Lagrange の未定乗数である。

なお、上式及び以下の諸式で、ドット ($\dot{\cdot}$) は時間 t に関する偏微分を表し、ラテン添字 (i, j, k, \dots) は x, y, z をそれぞれとり、繰り返し添字は総和規約に従うものとする。式(1)の Π_M は次式のような汎関数である。

$$\Pi_M = \int_V \left\{ U(\varepsilon_{ij}) - f_j u_j - \sigma_{\alpha\alpha} \{ 2\varepsilon_{\alpha\alpha} - (u_{\alpha,\alpha} + u_{z,\alpha}) \} - \sigma_{zz} \{ \varepsilon_{zz} - u_{z,z} \} \right\} dV - \int_{S_a} \bar{t}_j u_j dS - \int_{S_u} r_j (u_j - \bar{u}_j) dS \tag{3}$$

ここに U はひずみエネルギー関数、 ε_{ij} はひずみテンソル、 f_j は物体力を表す。 V は平板の内部領域を、 S_a は作用表面力が \bar{t}_j で規定された境界を、 S_u は変位が \bar{u}_j で規定された境界をそれぞれ表す。さらに $\sigma_{\alpha\alpha}$ 、 r_j は Lagrange の未定乗数である。

上式ならびに以下の式において、ギリシャ添字 ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) は面内座標 x, y をとるものとする。式(1)の変分原理とともに設定すべき付帯条件は次の各式である。

(面内ひずみの幾何学的関係式) :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \tag{4}$$

(面内応力の構成関係式) :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_{yy} + \frac{\nu E}{(1-\nu)E_z} \sigma_{zz} , \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_{yy} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \varepsilon_{xx} + \frac{\nu E}{(1-\nu)E_z} \sigma_{zz} , \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} . \end{aligned} \tag{5}$$

(面外ひずみの構成関係式) :

$$2\varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{G} \sigma_{\alpha z} , \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E_z} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{E_z} \sigma_{zz} . \tag{6}$$

(初期値・終値条件) :

$$\delta u_j = 0 \quad \text{at} \quad t = t_0, t_1 . \tag{7}$$

以上の式において、 $E, E_z; G, G_z; \nu, \nu_z$ はそれぞれ面内・面外の縦弾性係数、せん断弾性係数、Poisson 比を表す。

式(1)の $p_j, v_j, \sigma_{\alpha z}, \varepsilon_{\alpha z}, u_j$ ならびに r_j を独立変数として変分を実行し、さらに式(4)を用いて面内ひずみを変位で表し、Gauss の発散定理を用いて体積積分を行い、同時に時間 t に関する部分積分を実施した後、式(6)を用いてこれを整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V \left[\delta u_\alpha \{ \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha z,z} + f_\alpha - \dot{p}_\alpha \} + \delta u_z \{ \sigma_{z\beta,\beta} + \sigma_{zz,z} + f_z - \dot{p}_z \} \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \sigma_{\alpha\alpha} \{ 2\varepsilon_{\alpha\alpha} - (u_{\alpha,\alpha} + u_{z,\alpha}) \} + \delta \sigma_{zz} \{ \varepsilon_{zz} - u_{z,z} \} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\delta \varepsilon_{\alpha z} \left(\sigma_{\alpha z} - \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{\alpha z}} \right) + \delta \varepsilon_{zz} \left(\sigma_{zz} - \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{zz}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \delta v_j (\rho v_j - p_j) + \delta p_j (\dot{u}_j - v_j) \right] dV \right. \\ \left. - \int_{S_a} \delta u_j (n_i \sigma_{ij} - \bar{t}_j) dS + \int_{S_u} \delta r_j (u_j - \bar{u}_j) + \delta u_j (r_j - n_i \sigma_{ij}) dS \right\} dt = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

上式(8)と以降の式(17)、(18)、(20)中の面内応力 $\sigma_{\alpha\beta}$ と面外ひずみ $\varepsilon_{\alpha z}$ は、付帯条件：式(5)、(6)および(4)を用いて、面外変位と面外応力で表される量である。上式中の $\varepsilon_{\alpha z}, v_j, p_j$ に関する停留条件および S_u 上における u_j に関する停留条件より、次式が得られる。

$$\sigma_{\alpha z} = \frac{\partial U(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{\alpha z}} , \quad p_j = \rho v_j , \quad v_j = \dot{u}_j \quad \text{in } V , \tag{9}$$

$$r_j = n_i \sigma_{ij} ; \quad \text{on } S_u .$$

これらは速度、ならびに Lagrange の未定乗数 $\sigma_{\alpha z}, p_j, r_j$ の物理的意味を与えるものである。以上の表示式を用いることにより式(8)は最終的に次式のように整理できる。

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V \left[\delta u_\alpha \{ \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \sigma_{\alpha z,z} + f_\alpha - \rho \ddot{u}_\alpha \} + \delta u_z \{ \sigma_{z\beta,\beta} + \sigma_{zz,z} + f_z - \rho \ddot{u}_z \} \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \sigma_{\alpha\alpha} \{ 2\varepsilon_{\alpha\alpha} - (u_{\alpha,\alpha} + u_{z,\alpha}) \} + \delta \sigma_{zz} \{ \varepsilon_{zz} - u_{z,z} \} \right] dV \right. \\ \left. - \int_{S_a} \delta u_j (n_i \sigma_{ij} - \bar{t}_j) dS + \int_{S_u} \delta \sigma_{ij} n_i (u_j - \bar{u}_j) dS \right\} dt = 0 . \end{aligned} \tag{10}$$

上式の体積積分中の u_j に関する停留条件から運動方程式が得られ、 $\sigma_{\alpha z}$ 停留条件から面外ひずみの幾何学的関係式が求められる。

また、上での $\sigma_{\alpha z}$ ならびに S_a 上での u_j の停留条件より境界条件式が求められることになる。

以上に示したように、本変分原理は Hu-Washizu の変分原理において面内応力を独立変数から除去し、面内ひずみの幾何学的関係式および面内応力の構成関係式と面外ひずみの構成関係式を、付帯条件として与えたものになっている。同時に本変分原理は Reissner の新しい混合型の変分原理²⁵⁾を拡張し、運動エネルギーを考慮した動弾性学の変分原理となっている。

さて、式(8)の原理式に基づいて平板原理を構築するために、変位と面外応力の各成分を、以下に示すような基準化した板厚座標

$\xi = z/c = 2z/h$; ($h = 2c$) に関する無限多項式で展開する。

変位に関しては、面内変位と面外変位をそれぞれ次式で仮定する。

$$u_\alpha = \sum_{m=0}^{\infty} u_{\alpha(m)} P_m(\xi), \quad u_z = u_{z0} + c \sum_{m=0}^{\infty} u_{z(m)} R_m(\xi). \quad (11)$$

ここに $P_m(\xi)$ は Legendre 多項式であり、次式で与えられる。

$$P_m(\xi) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \frac{d^m}{d\xi^m} (\xi^2 - 1)^m; \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi, \quad (12)$$

$$P_2(\xi) = \frac{1}{2} (3\xi^2 - 1), \quad P_3(\xi) = \frac{1}{2} (5\xi^2 - 3\xi), \dots$$

また $R_m(\xi)$ は $P_m(\xi)$ を 1 回積分して得られる多項式であり、具体的な表示は以下ようになる。

$$R_m(\xi) = \frac{1}{2^m \cdot m!} \frac{d^{m-1}}{d\xi^{m-1}} (\xi^2 - 1)^m; \quad R_0(\xi) = \xi, \quad R_1(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1), \quad (13)$$

$$R_2(\xi) = \frac{1}{2} (\xi^3 - \xi), \quad R_3(\xi) = \frac{1}{8} (\xi^2 - 1)(5\xi^2 - 1), \dots$$

また、面外応力に関しては、次のような展開仮定を設ける。

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha 0} + c \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{\alpha(m)} R_m(\xi), \quad \sigma_z = \sigma_{z0} + c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{z(m)} R_m(\xi). \quad (14)$$

このような仮定の結果、 σ_{ij0} と $\sigma_{ij(0)}$ を次式のように規定することにより、一般に応力で与えられる平板の境界条件を完全に満足させることも可能となる。

$$\sigma_{ij0} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ij}^+ + \bar{\sigma}_{ij}^-), \quad \sigma_{ij(0)} = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ij}^+ - \bar{\sigma}_{ij}^-). \quad (15)$$

上式の $\bar{\sigma}_{ij}$ は図 1 に示すように $\xi = \pm 1$ の表面において規定されている応力値を表す。

以上の変位ならびに面外応力の展開仮定の式(11)および式(14)を、式(4)、(5)に用いれば、面内応力の各成分が次式のように表される。

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \nu u_{\beta(m),\beta} + (1-\nu) u_{\alpha(m),\alpha} \right\} P_m(\xi) + \frac{\nu E}{(1-\nu)E_z} \left\{ \sigma_{z0} + c^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{z(m)} R_m(\xi) \right\}, \quad (16)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma} = G \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ u_{x(m),y} + u_{y(m),x} \right\} P_m(\xi) : \quad (\text{no sum on } \alpha).$$

これらの各変位成分と応力成分の仮定に基づき理論を定式化する。まず、式(14)で仮定した面外応力成分が表面の境界条件を満足しない一般的な場合について定式化を行う。

式(11)、(14)を式(10)に代入し、式(12)、(13)を考慮して式(10)の板厚方向積分を実施すると、各変位係数 u_{z0} 、 $u_{j(m)}$ と面外応力係数 σ_{z0} 、 $\sigma_{z(m)}$ の変分の係数式として次式を得る。

(運動方程式) :

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} - \frac{1}{c} \sigma_\alpha^{(n)} + f_\alpha^{(n)} + \frac{1}{c} F_\alpha^{(n)} = \rho \ddot{u}_\alpha^{(n)}, \quad (17)$$

$$\sigma_{z\beta,\beta} - \frac{1}{c} \sigma_z^{(n)} + f_z^{(n)} + \frac{1}{c} F_z^{(n)} = \rho \ddot{u}_z^{(n)} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\sigma_{z\beta,\beta} + f_z^0 + \frac{1}{c} F_z^0 = \rho \ddot{u}_z^0.$$

ここで、 $F_j^{(n)}$ は平板の上下表面 A^\pm 上での作用外力 (荷重) の n 次モーメントで、 f_j は単位体積当たりの物体力で、それぞれ

$$F_j^{(n)} = [\bar{\sigma}_{zj} T_n(\xi)]_{\xi=-1}^{\xi=+1}, \quad f_j^{(n)} = c \int_{-1}^{+1} f_j T_n(\xi) d\xi \quad \text{と表せる。}$$

(幾何学的関係式) :

$$2\varepsilon_\alpha^{(n)} = u_\alpha^{(n)} + u_{z,\alpha}^{(n)}, \quad \varepsilon_z^{(n)} = u_z^{(n)}; \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (18)$$

$$2\varepsilon_\alpha^0 = u_\alpha^0 + u_{z,\alpha}^0, \quad \varepsilon_z^0 = u_z^0.$$

同様に、側端面上での境界条件の積分形表示として次式を得る。

(境界条件) :

$$n_i \sigma_{ij}^{(n)} = \bar{T}_j^{(n)}, \quad n_i \sigma_{iz}^0 = \bar{T}_z^0, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (19)$$

or

$$u_j^{(n)} = \bar{u}_j^{(n)}, \quad u_z^0 = \bar{u}_z^0.$$

上式および後出の式において用いられる断面積分量は、各々次式で与えられる量である。

$$\left\{ \sigma_{\alpha\beta}^{(n)}, u_\alpha^{(n)}, f_\alpha^{(n)}, \sigma_z^{(n)}, \sigma_\alpha^{(n)} \right\} = \int_{-1}^{+1} P_n(\xi) \left\{ \sigma_{\alpha\beta}, u_\alpha, f_\alpha, \sigma_z, \sigma_\alpha \right\} d\xi,$$

$$\left\{ \sigma_\alpha^{(n)}, u_z^{(n)}, f_z^{(n)}, \varepsilon_{ij}^{(n)}, u_j^{(n)}, \sigma_z^{(n)} \right\} = \int_{-1}^{+1} R_n(\xi) \left\{ \sigma_\alpha, u_z, f_z, \varepsilon_{ij}, u_j, \sigma_z \right\} d\xi, \quad (20)_{1,3}$$

$$\left\{ \sigma_{ij}^0, u_z^0, \varepsilon_{ij}^0, u_z^0, \sigma_z^0 \right\} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \sigma_{ij}, u_z, \varepsilon_{ij}, u_z, \sigma_z \right\} d\xi,$$

$$\sigma_\alpha^{(n)} = \int_{-1}^{+1} \sigma_\alpha \frac{d}{d\xi} P_n(\xi) d\xi. \quad (20)_4$$

また、上下表面と側端面の高次モーメントは次式で与えられる。

$$F_\alpha^{(n)} = [\bar{\sigma}_{z\alpha} \cdot P_n(\xi)]_{\xi=-1}^{\xi=+1} = \hat{\delta}_n (\bar{\sigma}_{z\alpha}^+ - \bar{\sigma}_{z\alpha}^-) + \tilde{\delta}_n (\bar{\sigma}_{z\alpha}^+ + \bar{\sigma}_{z\alpha}^-),$$

$$F_z^{(n)} = [\bar{\sigma}_z \cdot R_n(\xi)]_{\xi=-1}^{\xi=+1} = \delta_n (\bar{\sigma}_z^+ - \bar{\sigma}_z^-), \quad (21)_1$$

$$F_z^0 = [\bar{\sigma}_z \cdot 1]_{\xi=-1}^{\xi=+1} = (\bar{\sigma}_z^+ - \bar{\sigma}_z^-)$$

$$\bar{T}_\alpha^{(n)} = \int_{-1}^{+1} (n_\beta \bar{\sigma}_{\alpha\beta})_{\text{on } B} P_n(\xi) d\xi,$$

$$\left\{ \bar{T}_z^{(n)}, \bar{T}_z^0 \right\} = \int_{-1}^{+1} (n_\alpha \bar{\sigma}_\alpha)_{\text{on } B} \left\{ R_n(\xi), 1 \right\} d\xi. \quad (21)_2$$

なお、これらの式ならびに以下の式においては、次のような記号を導入した。

$$\Gamma_m^n = \int_{-1}^{+1} R_m(\xi) R_n(\xi) d\xi = \frac{1}{2m+1} (\hat{\Gamma}_{m-1}^n - \hat{\Gamma}_{m+1}^n),$$

$$\hat{\Gamma}_m^n = \int_{-1}^{+1} R_m(\xi) P_n(\xi) d\xi = \frac{2}{(2m+1)(2n+1)} (\delta_{n,m+1} - \delta_{n,m-1}), \quad (22)$$

$$k_n = \int_{-1}^{+1} P_m(\xi) P_n(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & \text{for } m=n \\ 0 & \text{for } m \neq n \end{cases}$$

$$\hat{\delta}_n = \frac{\{1 + (-1)^n\}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{for } n: \text{even} \\ 0 & \text{for } n: \text{odd} \end{cases}, \quad (23)$$

$$\tilde{\delta}_n = \frac{\{1 - (-1)^n\}}{2} = \begin{cases} 0 & \text{for } n: \text{even} \\ 1 & \text{for } n: \text{odd} \end{cases}$$

$$e_{(n)} = u_{\alpha(n),\alpha} = u_{x(n),x} + u_{y(n),y} \quad (24)$$

ここに、 δ_{ij} は Kronecker のデルタである。これらの断面積分量を式(17)、(18)の基礎方程式に代入すると未知係数 $u_{j(m)}$ 、 u_{z0} 、 $\sigma_{z(m)}$ および σ_{z0} に関する支配方程式が次式のように得られる。

(運動方程式) :

$$\begin{aligned} & k_n \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 u_{\alpha(n)} + (1+\nu) e_{(n),\alpha} \right\} \\ & + \frac{\nu_z E}{(1-\nu) E_z} \left\{ 2\delta_{n0} \sigma_{z0,\alpha} + c^2 (\hat{\Gamma}_{n-1}^n \sigma_{z(n-1),\alpha} + \hat{\Gamma}_{n+1}^n \sigma_{z(n+1),\alpha}) \right\} \\ & - 2 \left(\tilde{\delta}_n \frac{1}{c} \sigma_{\alpha 0} + \hat{\delta}_n \sigma_{\alpha(0)} \right) + k_n \sigma_{\alpha(n)} + f_\alpha^{(n)} + \frac{1}{c} F_\alpha^{(n)} = k_n \rho \ddot{u}_{\alpha(n)} \quad , \\ & \frac{2}{3} \delta_{n1} \sigma_{z\beta 0,\beta} - c (\Gamma_{n-2}^n \sigma_{z\beta(n-2),\beta} + \Gamma_n^n \sigma_{z\beta(n),\beta} + \Gamma_{n+2}^n \sigma_{z\beta(n+2),\beta}) \\ & + \frac{2}{c} \delta_{n0} \sigma_{z0} + c (\hat{\Gamma}_{n-1}^n \sigma_{z(n-1)} + \hat{\Gamma}_{n+1}^n \sigma_{z(n+1)}) - f_z^{(n)} - \frac{1}{c} F_z^{(n)} \\ & = \frac{2}{3} \delta_{n1} \rho \ddot{u}_{z0} - c p (\Gamma_{n-2}^n \ddot{u}_{z(n-2)} + \Gamma_n^n \ddot{u}_{z(n)} + \Gamma_{n+2}^n \ddot{u}_{z(n+2)}) \quad , \\ & 2\sigma_{z\beta 0} - \frac{2}{3} c \sigma_{z\beta(0),\beta} + f_z^0 + \frac{1}{c} F_z^0 = 2\rho \ddot{u}_{z0} - \frac{2}{3} c \rho \ddot{u}_{z(0)} \quad . \end{aligned} \quad (25)$$

上式中の ∇^2 は 2 次元 Laplace 演算子であり、次式で示される。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (26)$$

(幾何学的関係式) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_z} \left\{ -\frac{2}{3} \delta_{n1} \sigma_{\alpha 0} + c (\Gamma_{n-2}^n \sigma_{\alpha(n-2)} + \Gamma_n^n \sigma_{\alpha(n)} + \Gamma_{n+2}^n \sigma_{\alpha(n+2)}) \right\} \\ & = \frac{1}{c} \left\{ 2\delta_{n0} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\delta}_m u_{\alpha(m)} - k_n u_{\alpha(n)} \right\} + \left\{ -\frac{2}{3} \delta_{n1} u_{z0,\alpha} + \right. \\ & \quad \left. c (\Gamma_{n-2}^n u_{z(n-2),\alpha} + \Gamma_n^n u_{z(n),\alpha} + \Gamma_{n+2}^n u_{z(n+2),\alpha}) \right\} \quad , \\ & \frac{1}{G_z} \left(2\sigma_{\alpha 0} - \frac{2}{3} c \sigma_{\alpha(0)} \right) = \frac{2}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\delta}_m u_{\alpha(m)} + \left(2u_{z0,\alpha} - \frac{2}{3} c u_{z(0),\alpha} \right) \quad , \\ & \frac{\nu_z E}{(1-\nu) E_z} (\hat{\Gamma}_{n-1}^n e_{(n-1)} + \hat{\Gamma}_{n+1}^n e_{(n+1)}) + \frac{(1-\nu) E_z - 2\nu \nu_z E}{(1-\nu) E_z^2} \left\{ -\frac{2}{3} \delta_{n1} \sigma_{z0} + \right. \\ & \quad \left. c^2 (\Gamma_{n-2}^n \sigma_{z(n-2)} + \Gamma_n^n \sigma_{z(n)} + \Gamma_{n+2}^n \sigma_{z(n+2)}) \right\} \\ & = -(\hat{\Gamma}_{n-1}^n u_{z(n-1)} + \hat{\Gamma}_{n+1}^n u_{z(n+1)}) \quad , \\ & 2 \frac{\nu^2 E}{(1-\nu) E_z} e_{(0)} + \frac{(1-\nu) E_z - 2\nu \nu_z E}{(1-\nu) E_z^2} \left(2\sigma_{z0} - \frac{2}{3} c^2 \sigma_{z(0)} \right) = 2u_{z(0)} \quad . \end{aligned} \quad (27)$$

次に、式(14)で仮定した面外応力成分が上下表面の応力の境界(荷重)条件を満足する場合、すなわち式(15)のように最低次の2つの応力係数が決められた場合についての定式化を行う。この場合の運動方程式は、領域内での応力の動的つりあい式の重み付き積分表示として次式のように求められる。

(連動方程式) :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta}^{(n)} + \sigma_{\alpha z}^{(n)} + f_\alpha^{(n)} &= p \ddot{u}_\alpha^{(n)} \quad , \quad \sigma_{z\beta}^{(n)} + \sigma_{zz}^{(n)} + f_z^{(n)} = p \ddot{u}_z^{(n)} \quad , \\ \sigma_{z\beta}^{(0)} + \sigma_{zz}^{(0)} + f_z^0 &= p \ddot{u}_z^0 \quad . \end{aligned} \quad (28)$$

$\sigma_{\alpha z}^{(n)}$ は、 $\sigma_{\alpha z}^{(n)} = \int_{-1}^{+1} \sigma_{\alpha z} P_n(\xi) d\xi$ で定義される。また、幾何

学的関係式は式(18)と本質的には同等であるが、 σ_{z0} 、 $\sigma_{z(0)}$ が境界条件によって規定されていることから、これらに関する変分は実行されないため、それらの係数式が消失し、次式となる。

(幾何学的関係式) :

$$2\varepsilon_{\alpha z}^{(n)} = u_\alpha^{(n)} + u_{z,\alpha}^{(n)} \quad , \quad \varepsilon_{zz}^{(n)} = u_z^{(n)} \quad ; \quad (n \neq 0) \quad (29)$$

$u_\alpha^{(n)}$ は、 $u_\alpha^{(n)} = \int_{-1}^{+1} u_{\alpha z} P_n(\xi) d\xi$ で定義される。

なお、式(27)中の $\sigma_{z0}^{(n)}$ および $\sigma_{zz}^{(0)}$ は式(20)に示した値である。

その他の断面積分量についてもそれらの諸式に示された表示を用いることにより、支配方程式の具体形が次のように求められる。

$$\begin{aligned} & k_n \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 u_{\alpha(n)} + (1+\nu) e_{(n),\alpha} \right\} \\ & + \frac{\nu_z E}{(1-\nu) E_z} \left\{ 2\delta_{n0} \sigma_{z0,\alpha} + c^2 (\hat{\Gamma}_{n-1}^n \sigma_{z(n-1),\alpha} + \hat{\Gamma}_{n+1}^n \sigma_{z(n+1),\alpha}) \right\} \\ & + k_n \sigma_{\alpha(n)} + f_\alpha^{(n)} = k_n \rho \ddot{u}_{\alpha(n)} \quad , \\ & \frac{2}{3} \delta_{n1} \sigma_{z\beta 0,\beta} - c (\Gamma_{n-2}^n \sigma_{z\beta(n-2),\beta} + \Gamma_n^n \sigma_{z\beta(n),\beta} + \Gamma_{n+2}^n \sigma_{z\beta(n+2),\beta}) \\ & + c (\hat{\Gamma}_{n-1}^n \sigma_{z(n-1)} + \hat{\Gamma}_{n+1}^n \sigma_{z(n+1)}) - f_z^{(n)} \\ & = \frac{2}{3} \delta_{n1} \rho \ddot{u}_{z0} - c p (\Gamma_{n-2}^n \ddot{u}_{z(n-2)} + \Gamma_n^n \ddot{u}_{z(n)} + \Gamma_{n+2}^n \ddot{u}_{z(n+2)}) \quad , \\ & 2\sigma_{z\beta 0} - \frac{2}{3} c \sigma_{\beta(0),\beta} + 2c \sigma_{z(0)} + f_z^0 = 2\rho \ddot{u}_{z0} - \frac{2}{3} c \rho \ddot{u}_{z(0)} \quad . \end{aligned} \quad (30)$$

(幾何学的関係式) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{G_z} \left\{ -\frac{2}{3} \delta_{n1} \sigma_{\alpha 0} + c (\Gamma_{n-2}^n \sigma_{\alpha(n-2)} + \Gamma_n^n \sigma_{\alpha(n)} + \Gamma_{n+2}^n \sigma_{\alpha(n+2)}) \right\} \\ & = -\frac{1}{c} k_n u_{\alpha(n)} + \left\{ -\frac{2}{3} \delta_{n1} u_{z0,\alpha} + c (\Gamma_{n-2}^n u_{z(n-2),\alpha} + \Gamma_{n+2}^n u_{z(n+2),\alpha}) \right\} \quad ; \quad (n \neq 0) \quad , \\ & \frac{\nu_z E}{(1-\nu) E_z} (\hat{\Gamma}_{n-1}^n e_{(n-1)} + \hat{\Gamma}_{n+1}^n e_{(n+1)}) \\ & + \frac{(1-\nu) E_z - 2\nu \nu_z E}{(1-\nu) E_z^2} \left\{ -\frac{2}{3} \delta_{n1} \sigma_{z0} + c^2 (\Gamma_{n-2}^n \sigma_{z(n-2)} + \Gamma_n^n \sigma_{z(n)} + \Gamma_{n+2}^n \sigma_{z(n+2)}) \right\} \\ & = -(\hat{\Gamma}_{n-1}^n u_{z(n-1)} + \hat{\Gamma}_{n+1}^n u_{z(n+1)}) \quad ; \quad (n \neq 0) \end{aligned} \quad (31)$$

3. 項打ち切りの実施および諸理論との関係

本理論は、変位と面外応力をそれぞれ独立に無限次数まで考慮できる形に定式化されているため、これらに適切な項打ち切りを実施することによって、低次から高次に到る各種の理論式を容易に得ることができる。ここではそのうちの典型的な項採用法を用いた。

すなわち、表面の応力境界条件(以下 SBC と略記する)を満足させた場合を SBC OK と略記し、SBC を満足しない場合を SBC NO と略記することとし、これらの各理論の次数 N と各々の変位・応力の成分の採用次数、ならびに項数を示せば次の通りである。

(SBC NO) N 次理論: (全項数は $12N$ 項)

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \sum_{n=0}^{2N-1} u_{\alpha(n)} P_n(\xi) & : (2N) , \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha 0} + c \sum_{n=0}^{2(N-1)} \sigma_{\alpha\alpha(n)} R_n(\xi) & : (2N) , \\ u_z &= u_{z0} + c \sum_{n=0}^{2(N-1)} u_{z(n)} R_n(\xi) & : (2N) , \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{zz0} + c^2 \sum_{n=0}^{2(N-1)} \sigma_{zz(n)} R_n(\xi) & : (2N) . \end{aligned} \quad (32)$$

(SBC OK) N 次理論: (全項数は $12N + 6$ 項)

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \sum_{n=0}^{2N-1} u_{\alpha(n)} P_n(\xi) & : (2N) , \\ \sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha 0} + c \sum_{n=0}^{2N} \sigma_{\alpha\alpha(n)} R_n(\xi) & : (2N+2) , \\ u_z &= u_{z0} + c \sum_{n=0}^{2(N-1)} u_{z(n)} R_n(\xi) & : (2N) , \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{zz0} + c^2 \sum_{n=0}^{2N} \sigma_{zz(n)} R_n(\xi) & : (2N+2) . \end{aligned} \quad (33)$$

このように両理論系での採用項数は、断面積分量型の支配式より求められる未知数の数 (すなわち支配方程式の数) と等しくなるように $12N$ (曲げ $6N +$ 伸縮 $6N$) にとっている。この結果、SBC OKの方が、SBC を用いて低次の 6 個の面外応力の係数を決定するため、面外応力について 1 ランク高次の成分まで考慮することになり 6 個だけ多い項数の採用となっている。次に、本理論の 1 次理論と従来のいくつかの理論との関係を示すと次のようである。

まず、静的理論については、SBC NO の 1 次理論を面外直応力を $\sigma_{zz} = 0$ と置いて定式化したものは Hencky の理論²⁶⁾に一致し、SBC OK の 1 次理論において $\sigma_{z(0)} = p/2$ 、 $\sigma_{z(2)} = -p/2$ と置き、さらに面内直応力の幾何構成関係式を 1 次の重み付き積分表示した形で用い、これより曲げ応力を求めると Reissner 理論¹⁸⁾に到達する。動的理論については、やはり SBC OK の 1 次理論において、 $\sigma_{zz} = 0$ と置いて定式化したものは Mindlin 理論²⁷⁾におけるせん断補正係数を $k^2 = 5/6$ と置いたものに帰着する。

次に、本理論は補足ひずみエネルギーに基づく混合型の変分原理である Hellinger-Reissner 原理に立脚した理論と対比すべき位置を占める理論であり、結果的には Murakami らの層状板の静的解析理論¹³⁾⁻¹⁵⁾を、均質板に限定したうえで完全に一般化した動的解析理論に拡張したものとなっている。

4. 数値計算例

第 2 章で定式化した理論式に、第 3 章で示した規則に従った項打ち切りを実施し、これらを用いて厳密解の存在する平板の静的ならびに動的問題を解析し、各次数のレベルにおける理論の解析精度について検証する。また、SBC OK と SBC NO との比較を通じ、平板の上下表面の境界(荷重)条件の考慮の有無が解析精度に及ぼす影響について検討する。

[A] 静的解析例: 正弦分布荷重を受ける周辺単純支持矩形板

周辺単純支持正方形板 $a \times b \times 2c$ ($a = b$, $2c/a = 0.7$, $\nu = 0.25$) の上面に $p = p_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ なる正弦分布荷重が静的に作用した問題を、前節で定式化した 2 種類の場合、すなわち SBC OK と SBC NO

の各々について 1 次理論から 3 次理論までの各理論式を用いて解析した結果を、厳密解 (Exact) とともに次頁の図-2(a)から図-4(b)に示す。これらは平板の各点における変位・応力成分の板厚方向分布を表したものである。

図-2(a)と図-2(b)の面外方向変位 u_z の解析結果では、SBC OK と SBC NO には大差なく、低次の理論においてごくわずかに SBC OK の方がよい精度の解となっている程度であり、ともに理論の高次化に伴う厳密解への収束性も良好で高精度な解となっている。

図-3(a)と図-3(b)の面外せん断応力 $\sigma_{\alpha z}$ の解析結果では、他の力学量に対する解析精度に比して、多少劣る結果を与えることになるが、高次理論における誤差は小さく、ほぼ他の力学量同様 3 次理論 (3rd) で容認し得る精度の解が得られると言える。また、SBC OK と SBC NO の両者の相対的比較においては、前者の方が低次理論を中心に多少高精度の結果を与えており、SBC を満足させた効果が直接あらわれていることを示している。

図-4(a)と図-4(b)の複合型の量として得られる曲げ応力 σ_{xx} の解析結果では、SBC OK と SBC NO の両者とも 3 次理論でほぼ厳密解に収束した値を与えており、高次理論の精密さを示している。

これらの結果から、静的解析に関しては上下表面の応力境界条件を満足させ、変分原理に従って定式化された理論式をそのまま用いたもの (SBC OK) の方が良好な解を与えていると言えよう。

[B] 動的解析例: 無限板中を伝播する平面調和波の分散解析

動的解析例として、曲げ波動ならびに伸縮波動の双方に関する分散関係を、SBC OK と SBC NO とで各々 3 次理論を用いて解析した結果を次頁の図 5 から図 7 に示す。

図 5 は、曲げ波動の第 1 次から第 5 次のモードについて 2 種類の近似理論を用いて解析した結果を、厳密な解析結果²⁸⁾と比較したものである。なお、ここでの波動および後述の振動における各板厚モードに対し、曲げと伸縮の第 i 番目の固有値に対応する波動および振動をそれぞれ A_i 、 S_i と略記する。図の横軸は、波動の波数 k を無次元化した波数パラメータ ξ であり、ここでは $\xi = 0 \sim 3.0$ の範囲に対するものを示している。また、図の縦軸は振動数 ω を無次元化した振動数パラメータを表しており、次のような傾向が読みとれる。

- (1) A_1 、 A_2 は、SBC の両近似理論とも厳密解に一致した分散曲線を与える。 A_3 は、近似理論による解に誤差が生じ各理論による分散曲線に多少の差異があらわれはじめる。
- (2) A_4 は、両近似理論ともに ξ の値の増加に伴い厳密解より大きめの値をとりながらその差を増大させるが、両近似理論の比較では SBC OK の方が厳密解により近い値を示している。
- (3) A_5 は、3 者の間に大きな差異が生じており、本モードならびにより高次のモードの解析には、さらに高次の理論式を用いた解析が必要であることが分かる。

なお、本モードにおいても SBC OK の値は SBC NO のものよりも小さめで、より厳密解に近い分散曲線を与えており、SBC を考慮した効果があらわれている。

図6は、伸縮波の第1次から第5次のモードについて2種類の近似理論を用いて解析した結果であり、次のような指摘ができる。

- (1) S_1 のみが、3者とも解が全て一致し、同一の曲線となっている。
- (2) S_2, S_3 は、 ξ の値が小さい範囲では3者の値は等しく同一曲線上にあるが、両近似理論の解は互いに近い値を示しつつ共に厳密解を上回っており、特に S_2 に関して両者は同一曲線と与えられる。
- (3) S_4 は、3者が $\xi=0$ で異なった値から出発し、2種類の近似解析結果は全領域にわたり厳密解に比べて誤差を含んだ値を示している。
- (4) S_5 は、SBC NO の解は $\xi=0$ 付近で厳密解より大きな値から出発し、 ξ の増加に伴い過大な誤差が増大していく性質を示している。

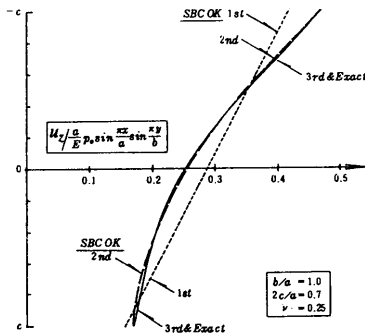


図 2(a)鉛直変位の板厚方向分布:SBC OK

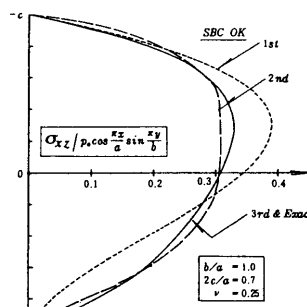


図 3(a)面外せん断力の板厚方向分布:SBC OK

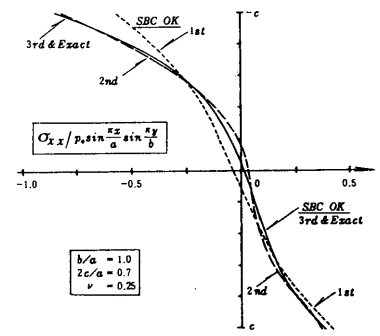


図 4(a)曲げ応力の板厚方向分布:SBC OK

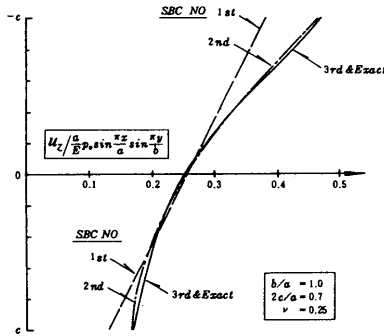


図 2(b)鉛直変位の板厚方向分布:SBC NO

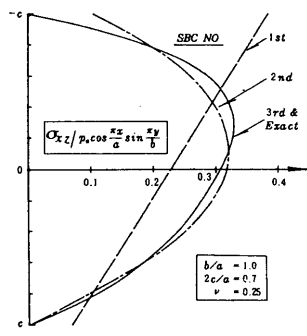


図 3(b)面外せん断力の板厚方向分布:SBC NO

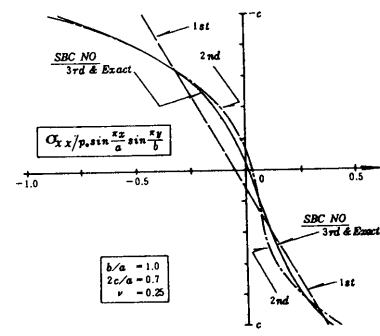


図 4(b)曲げ応力の板厚方向分布:SBC NO

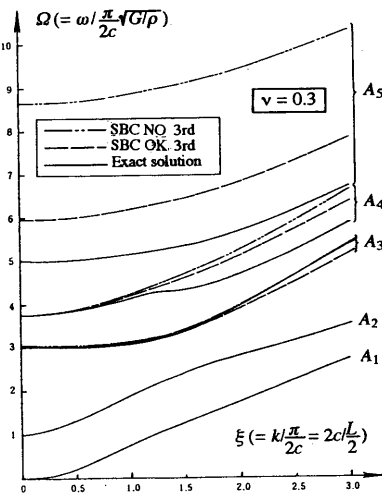


図 5 自由表面を持つ等方性無限板の分散関係
: 上下対象板厚 $2c$

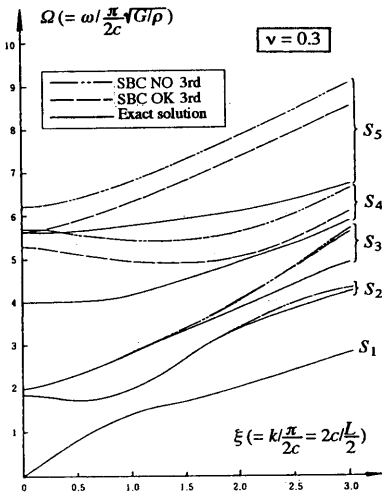


図 6 自由表面を持つ等方性無限板の分散関係
: 上下対象板厚 $2c$

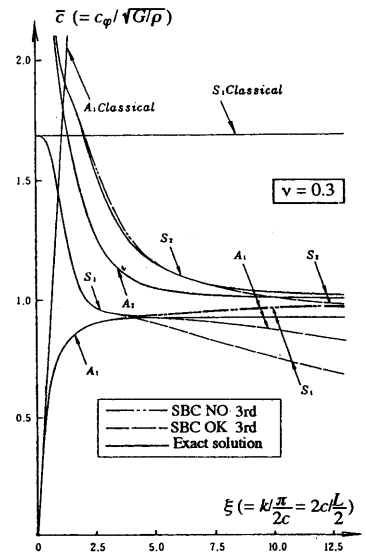


図 7 自由表面を持つ等方性無限板の分散関係
(位相速度~波数の関係): 上下対象板厚 $2c$

5. まとめ

本論文は、Hu-Washizu の原理を特殊化した混合型の動的変分原理を用い、面外応力成分と変位成分の板厚方向分布を仮定する一般化高次平板理論を構築し、静的・動的解析例を提示して混合仮定型平板理論の精度特性を、上下表面の応力境界条件 (SBC) を満足する場合 (SBC OK) と満足しない場合 (SBC NO) とを比較し検証したもので、結果を要約すれば次のようになる。

- (1) 定式化に用いた変分原理を含め、ひずみエネルギー関数に基づく混合型の変分原理は、動的平板理論を定式化する場合に無理がなく、それに適した原理である。
- (2) 本理論ならびに他の幾つかの理論^{13) -15), 22), 31), 32)}で見受けられるように、面外応力と変位成分を独立未知量とする考え方は、各種の境界条件の問題に柔軟に対応でき、混合仮定であるために生ずる理論の従属変数の増加もある程度抑えられる点等を考慮すると、効率の良い平板理論の構築に適したものである。
- (3) 低次の理論式を用いた解析では、SBC OK と SBC NO とで多少差が生じ、前者の方が全般にわたり高精度の解を与えている。一方、高次の理論式による解析では、SBC OK と SBC NO の場合ともに良好な精度の解を与えており、2 次理論でかなり満足のいく結果を与え、3 次理論ではほぼ厳密解に一致した値を与えている。
- (4) 動的問題における高周波の波動解析結果は、SBC OK のものは応力法型の理論⁶⁾の特性に近い性状を示して、厳密な値に比べ過小な値を与え、SBC NO のものより精度が劣っている。これに対し、SBC NO のものは変位法型の理論²⁾の特性に近い性状を示し、変位仮定型の高次理論¹⁾による値と同一で、厳密解より幾分過大な値を与え、広い範囲にわたり良好な精度の解を与えている。

参考文献

- 1) 平島健一・根岸嘉和：板厚方向の成分を考慮した代表的な 2 次元化平板理論の精度に関する考察、土木学会論文報告集、第 330 号、pp.1-14、1983。
- 2) 平島健一・根岸嘉和：数種の平板理論の動特性 (自由振動と分散特性) に関する研究、土木学会論文集、No.333、pp.21-34、1983。
- 3) 平島健一・根岸嘉和：板厚方向にフーリエ級数展開した高次平板理論、土木学会論文報告集、No.341、pp.163-172、1984。
- 4) 平島健一・根岸嘉和：Legendre 多項式展開による平板理論の定式化と動的問題への適用、土木学会論文集、No.356/T-3、pp.313-322、1985。
- 5) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : A high order theory of plate deformation, Jour. Appl. Mech., pp.663-676、1977。
- 6) Crandall, S.H. : Complimentary extremum principles for dynamics, Proc. Int. Congr. Appl. Mech., Vol.5, pp. 80-87、1957。
- 7) 平島健一・根岸嘉和：応力および変位仮定に基づく平板の一般化高次近似理論の定式化、土木学会論文集、No.350/T-2、pp.351-354、1984。
- 8) Lo, K.H., R.M. Christensen and E.M. Wu : Stress solution determination for high order plate theory, Int. J. Solids Struct. Vol.14, pp.655-662、1978。
- 9) Mengi, Y : A new approach for developing dynamic theories for structural elements part 1, Int. J. Solids Struct., VOL.16, pp.1155-1168、1980。
- 10) Reissner, E. : A twelfth order theory of transverse bending of transversely isotropic plates, ZAMM, Vol.63, pp.285-289、1983。
- 11) 古賀達蔵・遠藤修司：弾性平板の高次理論への試み、日本機械学会論文集 (A 編)、Vol.48, No.430, pp.818-826、1982。
- 12) 古賀達蔵：平板曲げに関する高次理論の定式、日本機械学会論文集 (A 編)、Vol.48, No.433, pp.1151-1159、1982。
- 13) Murakami, H. : Laminated composite plate theory with improved inplane responses, J. Appl. Mech., Vol.53, pp.661-666、1986。
- 14) Toledano A. and Murakami, H. : A composite plate theory for arbitrary laminated configurations, J. Appl. Mech., Vol.54, pp.181-189、1987。

- 15) Toledano A. and Murakami, H. : A high order laminated plate theory with improved in plane responses, Int. J. Solids Struct., Vol.23, pp.113-131、1987。
- 16) Washizu, K. : *Variational Methods in Elasticity & Plasticity* - Third edition, Pergamon Press, pp.411-417。
- 17) Alblas, J.B. : Theories van de drie-dimensionale spanningstoestand in een doorboorde plaat, Dilsertation Amsterdam, 1957。
- 18) Reissner, E. : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., pp.A69-A77、1945。
- 19) Reissner, E. : On transverse bending of plates including the effect of transverse shear defomatbn Int. J. Solids Struct., Vol.11, pp.569-573、1975。
- 20) Reissner, E. : On the theory of transverse bending of elastic plates, Int. J. Solids Struct., Vol.12, pp.545-554、1976。
- 21) Pagano, N.J. : Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, J. Comp. Mat., Vol.4, pp.20-34、1970。
- 22) Vlasov, V.Z. : The method of initial function in problems of theory of thick plates and shells, Proc. 9th Int. Congr. Appl. Mech., Vol.6, pp.321-330、1956。
- 23) Lechnitsukii, S.G. : *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body* (Eng. Trans.), Holden-Day, pp.283-298、1963。
- 24) Tabarrok, B. : Complementary variational principles in elastodynamics, Computer Struct., Vol.19, No.1-2, pp.239-246、1984。
- 25) Reissner, E. : On a certain mixed variational theorem and proposed application, Int. J. Numer. Mech. Engng., Vol.20, pp.1366-1368、1984。
- 26) Hencky, H. : Über die Berücksichtigung der schubverzerrung in ebenen platten, Ing. Arch., Vol.16, pp.72-76、1947。
- 27) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory Inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, J. Appl. Mech., Vol.18, pp.31-38、1951。
- 28) Mindlin, R.D. : An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates, U.S. Army Signal Corps. Eng. Lab., Fort Monmouth, 1955。
- 29) Dong, S.B. and Nelson, R.B. : On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates, J. Appl. Mech., Vol.39, pp.739-745、1972。
- 30) Lee, Y.C. and Reismann, H.D. : Dynamics of rectangular plates, Int. J. Engng. Sci., Vol.7, pp.93-113、1969。
- 31) 根岸嘉和・平島健一：各種の変分原理に基づく高次はり理論、福島工業高等専門学校紀要、Vol.21, pp.20-32、1985。
- 32) 根岸嘉和・平島健一：各種成分の級数展開による平板理論の 3 次元弾性論からの定式化、福島工業高等専門学校紀要、Vol.22, pp.25-40、1986。

(2000年11月9日原稿受理、2001年4月18日採用決定)