

## 部分円筒殻の自由振動

岩田佳雄\* 小堀与一\*

### Free Vibration of Cylindrical Shell

by

Yoshio IWATA and Yoichi KOBORI

#### Abstract

Several vibrations of a thin cylindrical shell were analyzed by the finite element method. By the former reports it has been showed that both the stiffness matrix and the mass matrix of the cylindrical shell elements were the matrices which consisted of the complicated expressions. This paper showed that the stiffness matrix and the mass matrix were simply expressed and were easily evaluated. By using of the method based on this paper the natural frequencies and the natural modes of the cantilevered cylindrical shell, which are needed on the estimation of turbin blade vibrations in industry, were derived. These calculations properly agreed with the results of the experiments. The relations between the natural frequencies and the natural modes and the size of the cylindrical shell were studied, and the three characteristics of vibrations of the cylindrical shell were showed as follows :

- (1) Natural frequencies and natural modes of the cylindrical shell depend on the generating-line-ratio, the central-angle and the thickness-ratio.
- (2) Natural frequencies and natural modes of the cantilevered cylindrical shell remarkably differ from those of the plate.
- (3) In case of vibrations of the cantilevered cylindrical shell the node-lines tend to occur in the direction of the generating-line.

#### 1. 緒 論

殻構造物の振動解析において有限要素法は有効な手段であり多くの報告がなされている。その中で本研究は薄肉の部分円筒殻を対象として行われたものである。有限要素法により部分円筒殻の振動解析を行うには、アイソパラメトリック要素を使用する方法、および円筒座標による要素を使用する方法がある。前者により薄肉殻の振動解析を行うには誤差が過大になる危険性が生ずる。このことは文献1)で報告されている。また OLSON ら<sup>2)</sup>は後者により振動解析を行い剛性マトリクスおよび質量マトリクスを陽な形で示したが、それらは複雑な式を要素とする次数の大きな行列になっている。そこ

\* 機械工学科

で本研究では円筒座標による要素を使用し、かつ MASON<sup>3)</sup> が長方形平板の振動において行った方法により剛性マトリクスおよび質量マトリクスが比較的簡単に計算できることを示した。そしてこの方法により一端固定部分円筒殻の固有振動数および固有モードを求めて実験と比較検討した。なお工業上このような殻構造物の固有振動の解析は各種タービン翼の振動問題に関し必要とされるものである。

### 2. 部分円筒殻のひずみ—変位関係

部分円筒殻の肉厚は部分円筒殻の母線方向の長さ  $A$ 、円周方向の長さ  $B$ 、および曲率半径  $R$  に比較して十分小さいものとする。図1のように殻の中央面上に円筒座標系  $x, y, z$  および各方向の変位  $u, v, w$  を設定する。後に固有振動数を無次元化するために  $x, y, z$  に関して次の変換を行う。

$$\xi_x = \frac{x}{R} \quad \xi_y = \frac{y}{R} \quad \xi_z = \frac{z}{R} \tag{1}$$

ここで  $\xi_y$  は図1より中心角を表わしていることがわかる。式(1)の変換より部分円筒殻のひずみ—変位関係は次のように整理できる。

$$\epsilon_x = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_x} - \xi_z \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_x^2} \right) \tag{2a}$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi_y} + w - \xi_z \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_y^2} \right) \tag{2b}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_y} + \frac{\partial v}{\partial \xi_x} - 2\xi_z \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_x \partial \xi_y} \right) \tag{2c}$$

$\epsilon_x, \epsilon_y$  は  $x, y$  方向の縦ひずみ成分、 $\gamma_{xy}$  はせん断ひずみ成分である。

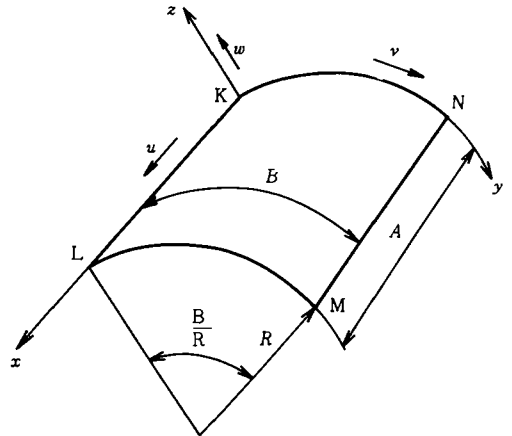


図1 部分円筒殻

### 3. 変位関係

本研究では図2に示す部分円筒殻要素によって部分円筒殻の振動の数値計算を行った。 $a, b, h$  をそれぞれ要素の母線方向の長さ、円周方向の長さ、肉厚とすると  $(\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  上における要素の寸法は式(1)より

$$a_R = \frac{a}{R} \quad b_R = \frac{b}{R} \quad h_R = \frac{h}{R} \tag{3}$$

となる。MASON<sup>3)</sup> が長方形平板の振動に使用した変位関数を  $\xi_z$  方向の変位  $w$  に適用すると次のようになる。

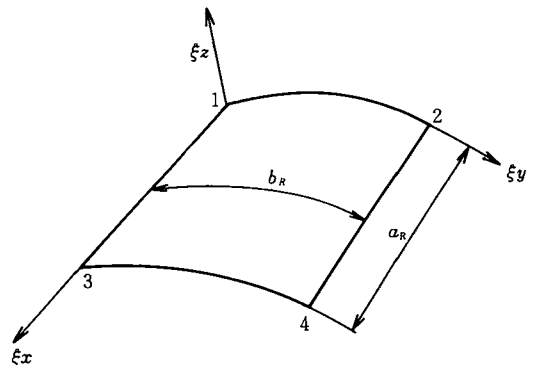


図2 部分円筒殻要素

$$\begin{aligned}
 w(\xi_x, \xi_y) = & w_1 f_1(X) f_1(Y) + a_R \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_x} \right)_1 f_2(X) f_1(Y) + b_R \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_y} \right)_1 f_1(X) f_2(Y) \\
 & + w_2 f_1(X) f_3(Y) + a_R \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_x} \right)_2 f_2(X) f_3(Y) + b_R \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_y} \right)_2 f_1(X) f_4(Y) \\
 & + w_3 f_3(X) f_1(Y) + a_R \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_x} \right)_3 f_4(X) f_1(Y) + b_R \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_y} \right)_3 f_3(X) f_2(Y) \\
 & + w_4 f_3(X) f_3(Y) + a_R \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_x} \right)_4 f_4(X) f_3(Y) + b_R \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_y} \right)_4 f_3(X) f_4(Y)
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$X = \frac{\xi_x}{a_R} \quad Y = \frac{\xi_y}{b_R} \quad (5)$$

$$f_1(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1 \quad (6a)$$

$$f_2(X) = X^3 - 2X^2 + X \quad (6b)$$

$$f_3(X) = -2X^3 + 3X^2 \quad (6c)$$

$$f_4(X) = X^3 - X^2 \quad (6d)$$

式(4)は次のように関数ベクトル式(8)と変位ベクトル式(9)のスカラー積で表わせる。

$$w = \{f_X f_Y\}^T w_e \quad (7)$$

$$\{f_X f_Y\} = [f_1(X) f_1(Y), a_R f_2(X) f_1(Y), b_R f_1(X) f_2(Y), \dots, b_R f_3(X) f_4(Y)]^T \quad (8)$$

$$w_e = [w_1 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_x} \right)_1 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_y} \right)_1, w_2 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_x} \right)_2, \dots, w_4 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_x} \right)_4 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi_y} \right)_4]^T \quad (9)$$

式(2a)～式(2c)で示したひずみ—変位関係より  $u$  および  $v$  の変位を考慮しなければならない。ここでは変位  $u, v$  を式(7)で示した変位  $w$  と同様の形式にする。

$$u = \{f_X f_Y\}^T u_e \quad (10)$$

$$u_e = [u_1 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_x} \right)_1 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_y} \right)_1, u_2 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_x} \right)_2, \dots, u_4 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_x} \right)_4 \left( \frac{\partial u}{\partial \xi_y} \right)_4]^T \quad (11)$$

$$v = \{f_X f_Y\}^T v_e \quad (12)$$

$$v_e = [v_1 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi_x} \right)_1 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi_y} \right)_1, v_2 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi_x} \right)_2, \dots, v_4 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi_x} \right)_4 \left( \frac{\partial v}{\partial \xi_y} \right)_4]^T \quad (13)$$

#### 4. ひずみエネルギー

肉厚の薄い部分円筒殻では次の応力—ひずみ関係が成立する。

$$\sigma = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \epsilon \quad (14)$$

$$\sigma = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (15)$$

$$\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (16)$$

$\sigma$  は応力成分のベクトル、 $\epsilon$  はひずみ成分のベクトル、 $E$  はヤング率、 $\nu$  はポアソン比である。これよ

り要素のひずみエネルギー  $U_e$  は次のようになる。

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon dV$$

$$= \frac{1}{2} \delta_e^T k_e \delta_e \quad (17)$$

$$\delta_e = [u_e^T v_e^T w_e^T]^T \quad (18)$$

$V$  は要素の体積を示す。ここに要素剛性マトリクス  $k_e$  は  $36 \times 36$  の対称行列であるが、 $12 \times 12$  の 6 種類の部分行列によって表わされる。 $h/R$  が 1 に比較して十分小さいことを考慮すると  $k_e$  は次のようになる。

$$k_e = abh \frac{E}{(1-\nu^2)R^2} \begin{bmatrix} k_{11} & \text{対称} & & & & \\ k_{21} & k_{22} & & & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & & & \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$k_{11} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \{f'_X f'_Y\} \{f'_X f'_Y\}^T + \frac{1-\nu}{2} \{f_X f'_Y\} \{f_X f'_Y\}^T \right] dXdY \quad (20a)$$

$$k_{21} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \nu \{f_X f'_Y\} \{f'_X f_Y\}^T + \frac{1-\nu}{2} \{f'_X f_Y\} \{f_X f'_Y\}^T \right] dXdY \quad (20b)$$

$$k_{31} = \int_0^1 \int_0^1 \nu \{f_X f_Y\} \{f'_X f_Y\}^T dXdY \quad (20c)$$

$$k_{22} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \frac{1-\nu}{2} \{f'_X f_Y\} \{f'_X f_Y\}^T + \{f_X f'_Y\} \{f_X f'_Y\}^T \right] dXdY \quad (20d)$$

$$k_{32} = \int_0^1 \int_0^1 \{f_X f_Y\} \{f_X f'_Y\}^T dXdY \quad (20e)$$

$$k_{33} = \int_0^1 \int_0^1 \left[ \{f_X f_Y\} \{f_X f_Y\}^T + \frac{1-\nu^2}{6} h_R^2 \{f'_X f'_Y\} \{f'_X f'_Y\}^T \right. \\ \left. + \frac{h_R^2}{12} (\{f''_X f_Y\} \{f''_X f_Y\}^T + \{f_X f''_Y\} \{f_X f''_Y\}^T) \right. \\ \left. + \frac{\nu h_R^2}{12} (\{f_X f''_Y\} \{f''_X f_Y\}^T + \{f''_X f_Y\} \{f_X f''_Y\}^T) \right] dXdY \quad (20f)$$

$f_X$  についている ' は  $\xi_x$  での偏微分、 $f_Y$  についている ' は  $\xi_y$  での偏微分を示す。このように要素剛性マトリクス  $k_e$  は比較的簡単に表現できる。またこれらの数値を求める方法は文献 3) に示されており、その方法を応用すれば比較的簡単に要素剛性マトリクスが計算できる。式(20f)から部分円筒殻の厚さ  $h_R$  は  $k_{33}$  にのみ影響することがわかる。 $k_e$  から部分円筒殻全体の剛性マトリクス  $K$  を構成すると部分円筒殻全体のひずみエネルギー  $U$  が求まる。

$$U = \frac{1}{2} \delta^T K \delta \quad (21)$$

$\delta$  は部分円筒殻全体の節点変位を表わすベクトルである。

## 5. 運動エネルギー

回転慣性を無視すると要素の運動エネルギー  $T_e$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} \int_V (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \dot{\delta}_e^T m_e \dot{\delta}_e \end{aligned} \quad (22)$$

$\gamma$  は比重量,  $g$  は重力加速度,  $\cdot$  は時間での微分を示す。 $m_e$  は要素質量マトリクスであり  $36 \times 36$  の対称行列であるが,  $12 \times 12$  の部分行列によって表わすことができる。

$$m_e = abh \frac{\gamma}{g} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$m = \int_0^1 \int_0^1 \{f_X f_Y\} \{f_X f_Y\}^T dX dY \quad (24)$$

要素質量マトリクス  $m_e$  も比較的簡単に表現でき, 要素剛性マトリクス  $k_e$  と同様の方法で計算できる。 $m_e$  から部分円筒殻全体の質量マトリクス  $M$  を構成すると部分円筒殻全体の運動エネルギー  $T$  が求まる。

$$T = \frac{1}{2} \dot{\delta}^T M \dot{\delta} \quad (25)$$

## 6. 自由振動の運動方程式

エネルギー保存則から次の運動方程式が導かれる。

$$M \ddot{\delta} + K \delta = 0 \quad (26)$$

系全体の節点が同位相で運動するとすれば

$$\delta = \delta_0 \sin \omega t \quad (27)$$

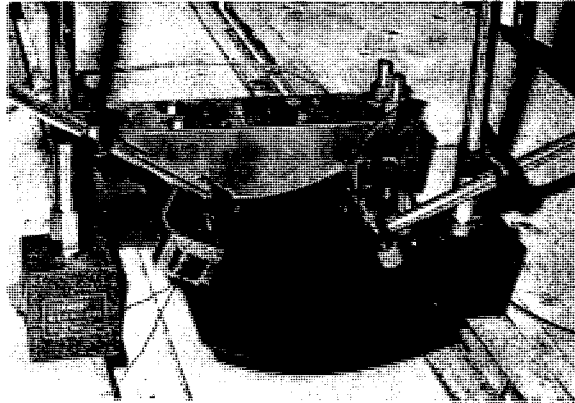
$\delta_0$  は各節点の振幅を表わすベクトルである。式(27)を式(26)に代入すると次の固有値問題が得られ, これより固有振動数と固有モードが求まる。

$$[K - \omega^2 M] \delta_0 = 0 \quad (28)$$

本研究では図1で円周方向の一辺  $\overline{KN}$  を固定した一端固定部分円筒殻について数値計算を行いその固有振動数と固有モードを求めた。実際の数値計算は一端固定部分円筒殻の幾何学的対称性により, その半分に関し対称モードと非対称モードの2つの場合について行われた。

## 7. 結 果

計算結果と実験結果の比較を行った。実験では一端固定部分円筒殻を電磁石で加振し, その応答を非接触型変位計で測定して固有振動数を求めた。この実験の主要部分の外観を図3に示す。軽く接触



電磁石, 一端固定部分円筒殻, 非接型変位計

図3 実験の主要部分

して振動の節の部分を求めることにより固有モードの形を測定した。すべての計算結果は母線方向および円周方向を等分に6分割して求めた。これより実験値と計算値の差は約5%以内となる。ヤング率, ポアソン比, 比重量には次の値を使用した。

$$E=2.00 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \quad \nu=0.3 \quad \gamma=7.77 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3 \quad (29)$$

式(28)で  $K$  は  $A/R, B/R, h/R, \nu$  によって決定され,  $M$  は  $A/R, B/R$  によって決定される。よって式(28)の固有値は  $\nu$  を一定とすると  $A/R, B/R, h/R$  によって決まることがわかる。ここで次の無次元振動パラメータ  $\lambda$  を導入する。

$$\lambda = R \sqrt{\frac{\gamma(1-\nu^2)}{Eg}} \omega \times 10^2 \quad (30)$$

$\lambda$  は  $A/R, B/R, h/R$  の関数として示すことができる。

$$\lambda = F\left(\frac{A}{R}, \frac{B}{R}, \frac{h}{R}\right) \quad (31)$$

以後  $A/R$  を母線比,  $B/R$  を中心角,  $h/R$  を肉厚比とする。本研究では母線比 1.00, 中心角 0.75, 肉厚比  $5.00 \times 10^{-3}$  の部分円筒殻を中心とし, 中心角, 肉厚比が一定で母線比が変化した場合, および母線比, 肉厚比が一定で中心角が変化した場合について計算結果と実験結果の比較を行った。そして固有振動数および固有モードの変化を示した。

表1は中心角 0.75, 肉厚比  $5.00 \times 10^{-3}$  で母線比を 0.75, 1.00, 1.50 にしたときの計算結果と実験結果で, 実験結果は ( ) 内と破線で示してある。実験結果において部分円筒殻の不備な点や実験誤差などを考慮すると計算結果と実験結果はよく一致しているといえる。母線方向と円周方向の節線が交わるようなモードは部分円筒殻試験片が完全な部分円筒殻でなく非対称性をもつため, 交わずに双曲線のような形になる場合がある。表2は母線比 1.00, 肉厚比  $5.00 \times 10^{-3}$  で中心角を 0.50, 0.75, 1.00 にした場合を示してあるが, この場合も計算結果と実験結果はよく一致しているといえる。表1および表2では平板の振動と比較して1次, 2次のモードが逆に現われ, 他のモードも平板の固有モードと著しく異なる傾向がある。また部分円筒殻の寸法の変化に対し固有モードが著しく変化する場合がある。表3に母線比と中心角の値が等しい部分円筒殻に関し, それを展開して正方形平板に

表1 A/Rによる無次元振動パラメータと固有モードの変化 B/R=0.75, h/R=5.00×10<sup>-3</sup>, ( )内と破線は実験結果

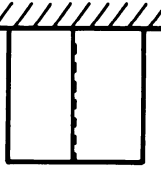
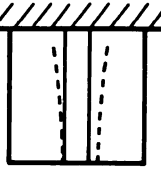
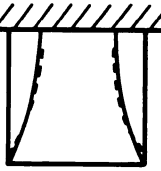
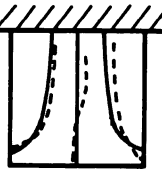
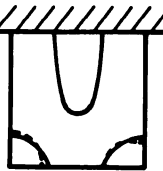
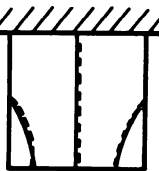
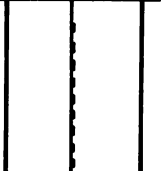
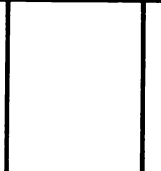
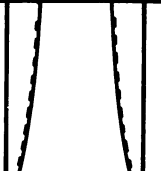
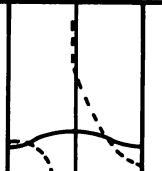
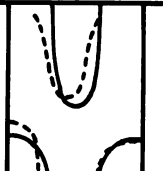
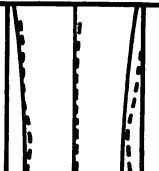
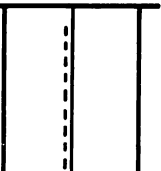
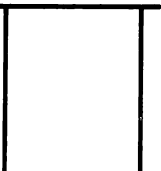
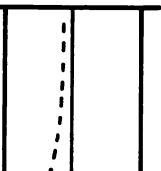
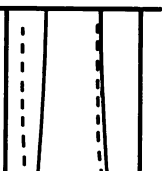
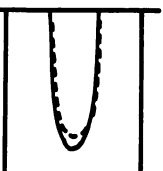
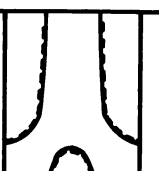
A/R	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	6 次
0.75	 4.254 (4.124)	 6.041 (6.191)	 12.65 (11.74)	 15.96 (15.18)	 15.95 (15.84)	 18.07 (17.93)
1.00	 2.843 (2.556)	 4.886 (4.750)	 8.555 (8.118)	 11.56 (10.32)	 11.56 (11.16)	 16.68 (16.73)
1.50	 1.784 (1.420)	 2.957 (2.766)	 6.911 (5.969)	 6.413 (6.397)	 8.184 (7.444)	 13.76 (12.23)

表2 B/Rによる無次元振動パラメータλと固有モードの変化 A/R=1.00, h/R=5.00×10<sup>-2</sup>, ( )内と破線は実験結果

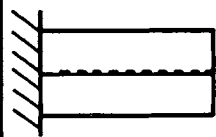
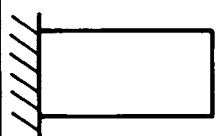
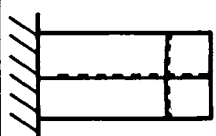

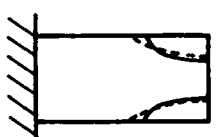
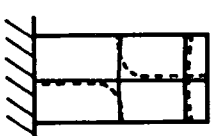


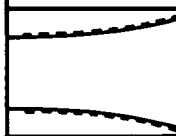
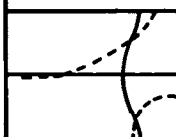

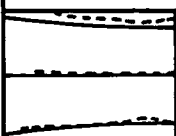

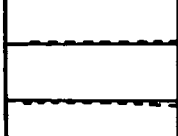
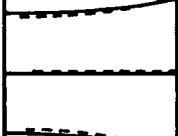



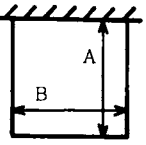
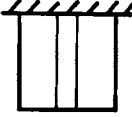
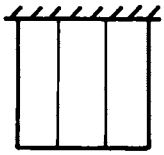
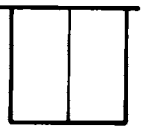
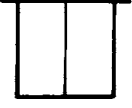
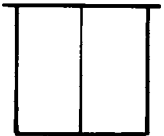
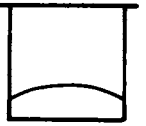
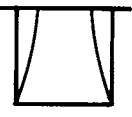
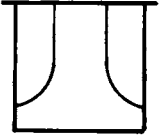
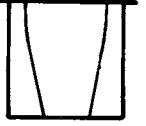
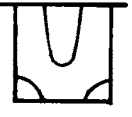
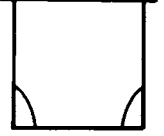
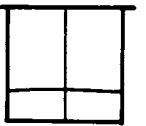
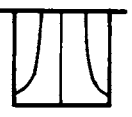
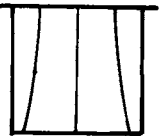
B/R	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	6 次
0.501	 2.820 (2.580)	 3.166 (3.000)	 9.899 (8.965)	 12.97 (12.36)	 14.55 (12.36)	 20.64 (18.88)
0.75	 2.843 (2.556)	 4.886 (4.750)	 8.555 (8.118)	 11.56 (10.32)	 11.56 (11.16)	 16.68 (16.73)
1.00	 3.640 (3.458)	 3.926 (3.797)	 10.07 (9.896)	 11.05 (10.50)	 12.17 (11.61)	 12.40 (12.55)



表3 母線方向と円周方向の長さの等しい部分円筒殻の振動とそれを展開した正方形平板の振動の比較  
 ( $h=0.1\text{cm}$ ,  $R=20\text{cm}$ )  
 ( ) 内は正方形平板の場合の固有振動数

平板の固有モード	部分円筒殻の固有振動数と固有モード	
	$A = B = 15\text{cm}$	$A = B = 20\text{cm}$
 1 次	 253.1Hz ( 37.6Hz)	 164.5Hz ( 21.1Hz)
 2 次	 178.2Hz ( 91.9Hz)	 152.5Hz ( 51.7Hz)
 3 次	 530.0Hz (230.5Hz)	 463.0Hz (129.7Hz)
 4 次	 668.3Hz (295.2Hz)	 519.5Hz (166.1Hz)
 5 次	 668.7Hz (335.1Hz)	 421.9Hz (188.5Hz)

したときの固有振動数と固有モードを計算値と比較してある。この場合、無次元振動パラメータの値では比較できないので振動数で比較してある。板厚が 0.1cm, 曲率半径が 20cm で辺の長さが 15cm, 20cm の 2 つの場合について比較を行ったが, 正方形平板の計算値は文献 4) によった。この表では正方形平板の固有モードと部分円筒殻の固有モードが対応するように整理してある。つまり正方形平板に次第に曲率を与えると正方形平板の固有モードが次第に変化し, 結局曲率半径が 20cm になったときには表で示してある部分円筒殻の固有モードになることを表わしている。この表から一端固定部分円筒殻の振動では母線方向の節線が生じ易くなり, 平板の固有モードと比較して著しく異なることがわかる。表 1, 表 2 において母線比が中心角に比較して小さくなったときにも同様の傾向を示す。また固有振動数は平板の場合に比較して部分円筒殻の方が著しく高くなることがわかる。

## 8. 結 論

薄肉部分円筒殻の自由振動を有限要素法により解析した。その過程において要素剛性マトリクスおよび要素質量マトリクスが従来の方法に比較して簡単に表現でき, かつ容易にそれらの数値を求めることができることを示した。この方法により一端固定部分円筒殻の固有振動数と固有モードを求め, 実験と比較した。数値計算は母線方向および円周方向を等分に 6 分割して行われた。そして計算結果と実験結果がよく一致することを示した。また計算結果より以下のことが示された。

- (1) 部分円筒殻の固有振動数および固有モードは母線比  $A/R$ , 中心角  $B/R$ , 肉厚比  $h/R$  によって支配される。
- (2) 本研究で求めた一端固定部分円筒殻の固有振動数および固有モードは平板の場合と比較して著しく異なる。
- (3) 一端固定部分円筒殻の振動では母線方向の節線が生ずる傾向がある。

最後に本研究にあたり, 適切な助言と激励をいただきました本学部佐藤秀紀講師に深く感謝の意を表します。また実験装置の製作において協力を得ました本学部小川孝吉技官に御礼申し上げます。

## 参 考 文 献

- 1) S. AHMAD, R. G. ANDERSON, and O. C. ZIENKIEWICZ, "Vibration of thick curved shells, with particular reference to turbine blades", *J. Strain Analysis*, 5, 200-206, 1970
- 2) OLSON, M. D. and LINDBERG G. M., "Vibration analysis of cantilevered curved plates using a new cylindrical shell finite element", *Proc. 2nd Conf. Matrix Meth Struct. Mech.* 1968
- 3) V. MASON "Rectangular finite elements for analysis of plate vibrations", *J. Sound Vib.* 7, 437-448, 1968
- 4) M. V. BARTON, AUSTIN and TEXAS, "Vibration of rectangular and skew cantilever plates", *J. Appl. Mech.* 18, 129-134, 1951

(昭和53年10月31日受理)