

全塑性モーメントにおよぼすせん断力の影響に関する実験的考察

著者	吉田 博, 中村 昭英, 喜内 敏
雑誌名	金沢大学工学部紀要 = Memoirs of the Faculty of Technology Kanazawa University
巻	8
号	2
ページ	49-58
発行年	1974-09-25
URL	http://hdl.handle.net/2297/25526

全塑性モーメントにおよぼすせん断力の影響に関する実験的考察

吉田 博* 中村 昭英** 喜内 敏*

Experimental Study of the Effect of Shear on the Full Plastic Moment

by

Hiroshi YOSHIDA, Akie NAKAMURA and Bin KINAI

Abstract

The effect of the shear force on the full plastic moment is experimentally investigated. The validity of the formula generally used on the full plastic moment considering the reduction due to shear force will be discussed. The formula is based on the beam theory that the longitudinal dimension of a beam is sufficiently large comparing with the cross sectional dimensions. However, the beams, of which the effect of shear force must be considered may be with short spans. The uniform and the tapered cantilever beams with a rectangular cross section are tested for various span lengths and the results are compared with the elastic-plastic finite element method and the beam theory.

The obtained results are as follows :

- (1) The plastic hinge forms at a point close to the fixed support for the cantilever with a uniform cross section. The bending moment at the fixed support is beyond the full plastic moment.
- (2) The plastic hinge of the cantilevers with a tapered cross section forms at the midspan as it is predicted by the beam theory. The beam theory can be applicable even for such the cantilever with a high degree of the taper that the plastic hinge forms in the span.
- (3) If the location of the plastic hinge is predicted for the beam with a uniform cross section, the reduced full plastic moment due to the beam theory will give a good approximation.

1. 緒 論

構造物に作用する荷重が一定の割合で弾性限度を越えて増加するとき、塑性解析における単純塑性理論は、塑性ヒンジ点ではその部材断面での全塑性モーメントを一定に保ちながら、塑性ヒンジの回転をともなって曲げモーメントの再配分が生ずるという概念に立脚している。軸方向力およびせん断力が無視できる部材の断面が、大きい塑性変形をともなって伝達することができる全塑性曲げモーメントは、材料の降伏応力と断面の塑性断面係数の積で表わされる。しかし、一般に塑性ヒンジ形成位

* 土木工学科 **石川工業高等専門学校

置では、軸方向力およびせん断力が存在し、全塑性モーメントにおよぼすこれらの影響は無視できない場合が多いと思われる。

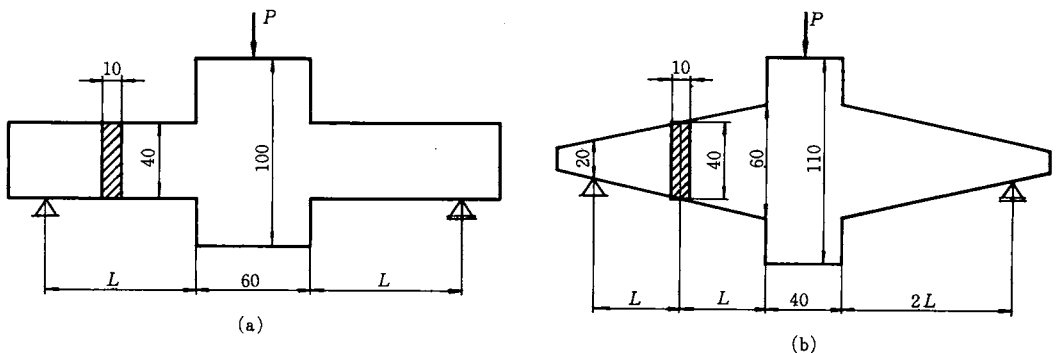
全塑性モーメントにおよぼすせん断力の影響に関する理論的研究は数多くなされている。Horne¹⁾ および Neal²⁾ は長方形断面および I 形断面についてせん断力による全塑性モーメントの低下についての検討を行い、また、Drucker³⁾ は長方形断面について曲げモーメントとせん断力の近似相関曲線を提案している。Hodge⁴⁾ はせん断力のあらゆる範囲にわたって、長方形断面と I 形断面について適用可能な一般的な相関関係式を導びき、現在広く用いられている。⁵⁾

これらの研究においてはいずれも、曲げモーメントによって生じた塑性域内ではせん断応力は存在せず、断面の降伏していない部分のみでせん断応力を受けつものものと仮定し、そのせん断応力の最大値が Von Mises の降伏条件より得られるせん断応力に達したとき、断面が終局状態に達するものとして、曲げモーメントとせん断力の相関々係式が得られている。この理論における曲げモーメントによって生ずる降伏領域および弾性域内でのせん断応力分布を求める際に、はりのスパンが部材断面に比して充分大きいとするはり理論に立脚している。しかし、せん断力の影響を無視できないような構造は、部材断面がスパンの数分の 1 程度であり、はり理論を適用するのに矛盾があるように思われる。また、これまでの研究においては、実験的にせん断力の影響を検討したものはほとんどないようであり、さらに、通常の構造物では、隅角部の塑性ヒンジ点近傍は、ハンチを付けて補強されており、このような変断面部材での全塑性モーメントとせん断力の関係も検討がなされていない。

本研究においては、はり理論に立脚して求めた全塑性モーメントにおよぼすせん断力の影響の妥当性の検討を、等断面および変断面部材について行おうとするものである。種々のスパン長と断面の高さの比を有する長方形等断面および変断面片持ばりの先端に集中荷重を作用させ、反射形光弾性皮膜法を用いて塑性領域の拡がりを観察し⁶⁾、弾塑性有限要素法⁷⁾を用いて求めた塑性領域の拡がりとの比較を行い、はり理論の妥当性について検討を行う。

2. 実 験 方 法

片持ばりの載荷試験を容易に行うことができ、先端に集中荷重が作用する片持ばりと載荷条件およ



第1図 等断面および変断面十字型試験片

び支持条件が同じとなるように、第1図に示すような長方形等断面および変断面の十字形ばりを単純支持し、中央に集中荷重を作用させることにした。十字形試験片の中央部分は等断面ばりで幅60mm高さ100mm、変断面ばりで幅40mm高さ110mmと大きくとり、曲げおよびせん断に対する剛性を大きくして、はりの変形におよぼす影響を無視できるようにした。

等断面試験片のはりの断面は、幅10mm、高さ40mmとし、片持部の長さ L を80mm、60mm、40mmおよび32mmの4種類とし、断面の高さに対する比（以後等断面ばりのシャースパン比という）を2.0、1.5、1.0および0.8とした。また、変断面試験片に関しては、はりの片持部の中央での断面を等断面ばりの断面と等しい幅10mmとし、せん断力を無視したときに片持部中央で塑性ヒンジが形成するように、片持ばりの載荷端（第1図の単純支持点）および固定端の断面を決定した。この場合、試験片の幅を一定とすると、片持部の長さに関係なく断面の高さは載荷端で20mm、固定端で60mmとなる。変断面ばりでも塑性ヒンジ形成点片持部中央での断面の高さに対する載荷端からの距離 L の比（以後変断面ばりのシャースパン比という）を等断面と同様2.0、1.5、1.0、および0.8の4種類とした。

試験片は厚さ11mmのSM50鋼板よりガス切断で切り出し、機械切削および研磨の後、600°Cで2時間の応力焼鈍を行った。実験に先だち次のような予備実験を行った。

(1) 予備実験

a) 引張試験

等断面長方形ばりおよび変断面長方形ばりに使用するSM50鋼材より1号引張試験片を各々2本ずつ製作して、引張試験を行った結果、第1表に示すような材料の力学的性質を得た。

b) 光弾性皮膜の感度

反射形光弾性皮膜法に用いる材料としてエピコート、チオコールおよびヂエチレントリアミンを100:30:10の重量比で配合したエポキシサルファイド系共重合体（エポキシラバー）の厚さ3mmのものを試験片に接着することにした。この皮膜材料の光学的性質を知るために、引張試験片を製作し透過形光弾性装置により、ひずみと縞次数（色）の関係を調べた。また、鋼材の引張試験より得られた応力—ひずみの関係より、鋼材の降伏ひずみに対する反射形光弾性より得られる縞の色は1次の紫色であることがわかった。

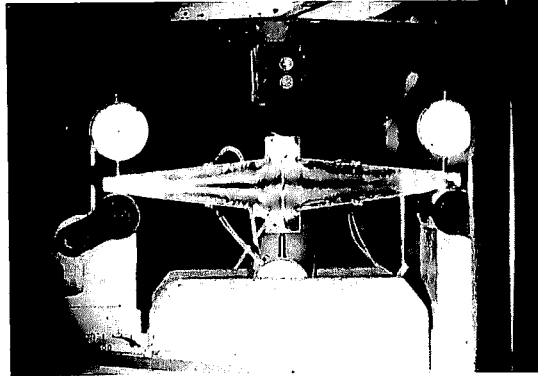
(2) 等断面ばりの実験

4種類のシャースパン比を持つはりに対して、厚さ3mmの光弾性皮膜をほぼ試験片の全域にわたって貼付けた。接着剤はエポキシラバーと同系統のアラルナイトDとハードナー951を100:8の重量比で配合したものをを用い、接着後、常温で加圧、硬化させた。2日間養生後載荷試験を行った。載荷試験では光弾性皮膜法より求めたひずみと比較する目的で東京測機KK製塑性域ストレインゲージYL-5を固定端から5mmの位置に上下2ヶ所、2断面に接着した。また、荷重点下のたわみを測定するために1/1000mm精度のダイヤルゲージを荷重点下と左右の支点上に設置した。反射形光弾性装置は理研計器KK製のPA-7型を使用し、荷重は島津製作所製万能試験機（容量50t）を用いて載荷した。

荷重は最初0から100kgずつ増加させ、各荷重段階ごとにストレインゲージによるひずみの測定とダイヤルゲージによるたわみの測定を行った。ストレインゲージと反射形光弾性装置より断面の1部に塑性域が発生したことが確認されたのちは、ダイヤルゲージによるたわみを一定ずつ増加させるように荷重を調節し、ストレインゲージによるひずみの測定と光弾性写真をカラーズライドフィルムで撮影した。第2図は得られたカラーズライドフィルムより、1次の縞が弾塑性境界を示すようにフィ

第1表 用いた鋼材の力学的性質

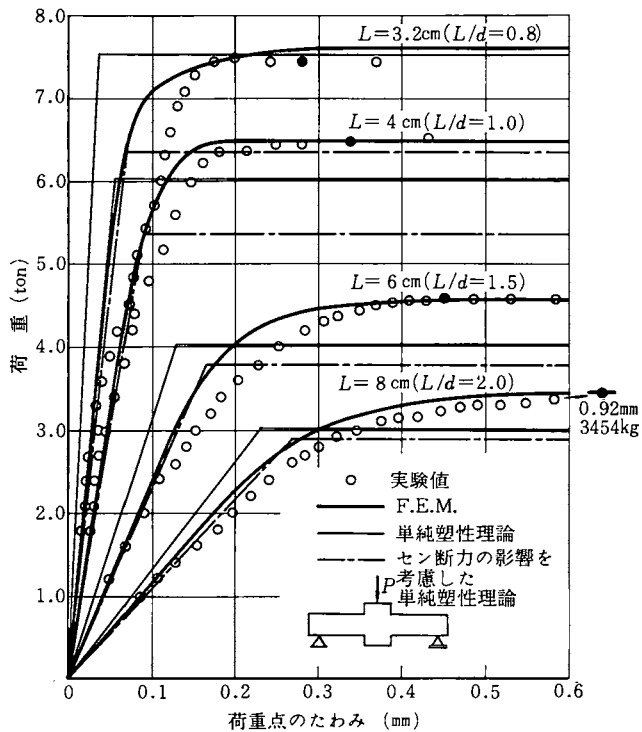
	降伏応力 σ_y (kg/cm ²)	弾性係数 E (kg/cm ²)	ポアソン比 ν
等断面試験片	3014	2.18×10^6	0.33
変断面試験片	3430	2.16×10^6	0.31



第2図 反射型光弾性による弾塑性境界 (変断面 $L/d=2.0$, $P=3335\text{kg}$)

ルターをかけて焼付けられた白黒写真の1例である。

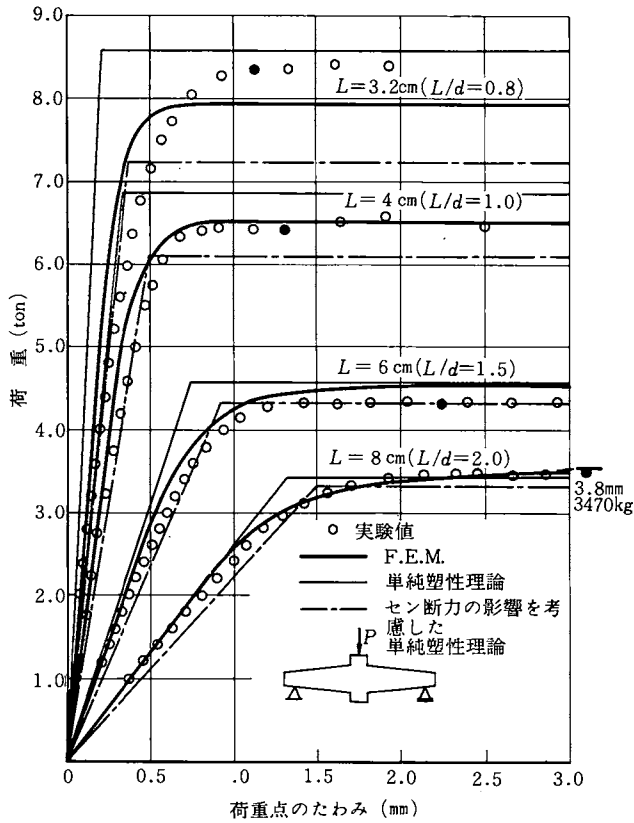
第3図は実験より得られた荷重—たわみ関係を示すもので、縦軸に荷重を横軸にたわみをとって示したもので、白丸は実験値を黒丸は塑性域が貫通し、塑性ヒンジが形成されたと認められる点を示している。



第3図 荷重—たわみ関係 (等断面)

(3) 変断面ばりの実験

実験方法は等断面ばりのものと同様に行った。第4図は実験より得られた荷重—たわみ関係を示すもので、第3図と同様に示されている。

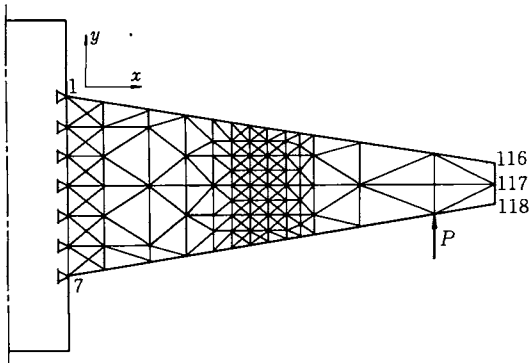


第4図 荷重—たわみ関係(変断面)

3. 実験結果と考察

(1) 荷重—たわみ曲線

等断面ばり、および変断面ばりの実験より得られた荷重に対するたわみは、それぞれ第3図および第4図に白丸で示してある。弾塑性有限要素法を適用するため、第1図に示すはりの片持部を三角形の有限要素に分割した。第5図は変断面ばりの分割を示すもので、固定部および変断面の中央部の比較的塑性域の拡がり易い領域を細かく分割した。計算は弾性限界からはじめ、以後1要素ずつ降伏させ、塑性域が断面を貫通した後、荷重の増加がほとんどなしに、たわみのみが急激に増加するまで継続した。第3図および第4図の太い実線は、弾塑性有限要素法より得られた結果を各シャースパン比に対して示したものである。また、細い実線はせん断力の影響を無視した単純塑性理論によるものであり、細い一点鎖線ははり理論にもとずき、曲げモーメントによって生じた降伏領域ではせん断応力は存在せず、断面の降伏していない部分のみでせん断応力を受けもつものと仮定し、そのせん断応力の最大値が Von



第5図 三角形有限要素(変断面)

Mises の降伏条件より得られるせん断応力に達したとき、断面が終局状態に達するとして導びかれた次式より得られた値⁹⁾を示している。

$$\frac{M_{ps}}{M_p} = \frac{8}{9} \frac{bL^2}{Z} \left(\sqrt{1 + \frac{9}{4} \frac{Z}{bL^2}} - 1 \right) \quad (1)$$

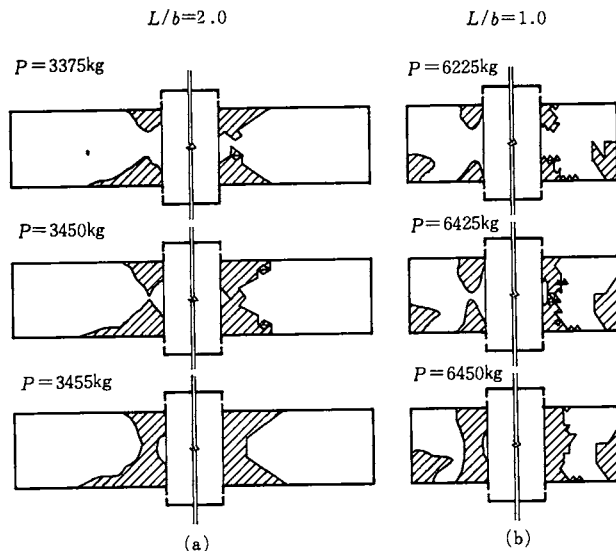
ここに、 M_{ps} はせん断力の影響を考慮した全塑性モーメントであり、 M_p はせん断力を無視した全塑性モーメントである。また、 L は第1図に示す長さ、 b は長方形断面の幅であり、 Z は長方形断面の塑性断面係数である。

第3図に示す等断面ばりの荷重—たわみ曲線において各シャースパン比とも、弾性域でははり理論によるもの、有限要素法によるものおよび実験より得られた荷重—たわみ関係は良く一致しているが、断面の1部が降伏した状態では、実験より得られたたわみは有限要素法によるものより大きくでている。この傾向はシャースパンが小さい場合ほど著しい。この理由としては、有限要素法においてははりの片持部のみを分割し、はりの中央部の断面の拡大されている部分は剛体であると仮定して弾塑性挙動を計算したが、実際にはこの部分にも塑性域が拡がり、完全固定の条件が満足されなかったものと考えられる。終局強度は有限要素法によるものと実験結果はきわめてよく一致したが、はり理論によるせん断力の影響を考慮した値およびせん断力を無視した値とはかなりの相違が認められる。この理由については後ほど検討を行う。

第4図に示す変断面ばりの荷重—たわみ曲線においては、 $L/b=0.8$ の場合を除いて各シャースパン比の弾性域および非弾性域とも、有限要素法によるものと実験より得られた荷重—たわみ関係は比較的よく一致した。これは、変断面ばりにおいては塑性域が片持部の中央に拡がり、はり中央部の断面の拡大されている部分には塑性域が発生しないことによっている。しかし、 $L/b=0.8$ においては、片持部の中央およびはり中央部にも塑性域が拡がることにより、有限要素法と実験値の間に相違が生じたものと考えられる。変断面ばりの場合にも終局強度は有限要素法によるものと実験結果は $L/b=0.8$ の場合を除いてよく一致した。しかし、はり理論による計算値とは相違が認められる。

(2) 塑性領域の拡がり

反射型光弾性実験の等色線図より弾塑性境界を知ることができる⁶⁾。鋼材が Tresca の降伏条件に

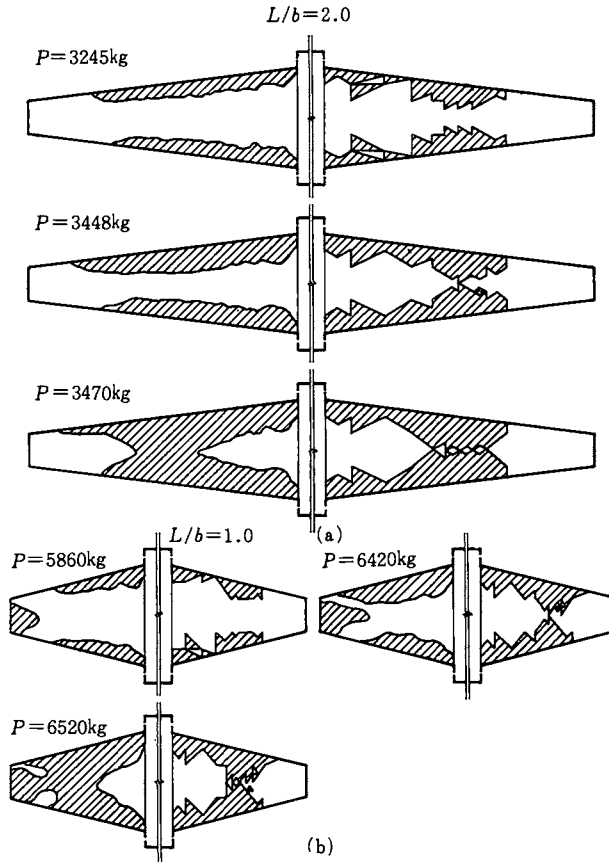


第6図 反射型光弾性(左)と弾塑性有限要素法(右)による塑性域の拡がりの比較(等断面)

従うときは、部材のある点で降伏が生ずるのは最大せん断応力がある一定値に達した時で、

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2}\sigma_Y \quad \sigma_1 > \sigma_2 \quad (2)$$

にて与えられる。ここに、 σ_1 および σ_2 は最大および最小主応力であり、 σ_Y は鋼材の引張試験より得られた1次の紫色が弾塑性境界を示すことになる。第2図は $L/b=2.0$ の変断面ばりの荷重 $P=3335\text{kg}$ のときの等色線写真を示すもので、1次の縞でかこまれた領域が塑性域を示している。



第7図 反射型光弾性(左)と弾塑性有限要素法(右)による塑性域の拡がりの比較(変断面)

第6図および第7図のはりの左側半分は $L/b=2.0$ と $L/b=1.0$ の等断面ばりおよび変断面ばりの反射型光弾性実験より得られた塑性域の拡がりを塑性ヒンジ形成前後の3つの荷重段階で示したものである。また、右側半分はほぼ同一の荷重に対する弾塑性有限要素法より得られた塑性域の拡がりを示している。弾塑性有限要素法においては Von Mises の降伏条件式

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (3)$$

を用いているが、Tresca の降伏条件との差は最大約15%であり、降伏条件による塑性域の拡がりには大差はないものと考えられる。これらの図より各荷重段階で実験より得られた塑性域の拡がり

塑性有限要素法によるものとはよく一致することが認められる。

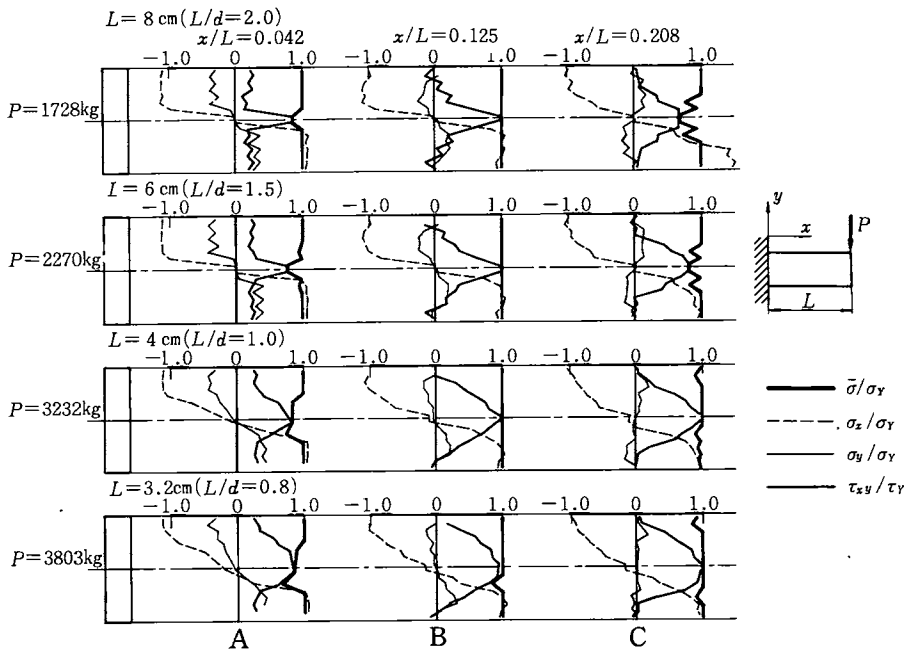
第6図および第7図より、等断面ばりにおいては塑性領域が断面を貫通するのはシャースパン比に関係なく片持部固定端よりほぼ $0.125L$ 離れた点であり、変断面ばりでは片持部のほぼ中央で、はり理論で予想した点と一致している。

(3) 非弾性応力分布

第8図は等断面ばりの各シャースパン比に対し塑性領域が断面を貫通したときの、固定端より $0.042L$, $0.125L$ および $0.208L$ 離れた断面 (断面 A, B, C) での応力分布を示している。鎖線は x 方向の直応力 σ_x の、細い実線は y 方向の直応力 σ_y の、実線はせん断応力 τ_{xy} の弾塑性有限要素法より得られた分布を σ_x および σ_y は σ_y で、 τ_{xy} はせん断降伏応力 $\tau_Y = \sigma_Y / \sqrt{3}$ で無次元化した値を示している。また、太い実線は相当応力

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (4)$$

を降伏応力 σ_Y で無次元化した値を示し、この値が 1.0 より小さい範囲は弾性域であり、 1.0 に等しい範囲で降伏していることを意味している。



第8図 等断面ばりの塑性ヒンジ近傍の応力分布

第8図に示された応力分布より以下のことが云える。

a) 各シャースパン比ともはり理論で無視されているはりの高さ方向の直応力 σ_y が存在する。固定端に近い断面 A では、 σ_x と同符号であり、断面の上下縁近傍まで約 $0.35\sigma_Y$ で中立軸に近い弾性域で急激に小さい値となる台形分布となっている。しかし、塑性域が貫通し、塑性ヒンジを形成している断面 B では、中立軸から次第に応力は増加し、 $0.2 \sim 0.25\sigma_Y$ に達した後、次第に減少する三角形分布となっている。断面 C の σ_y は σ_x と異符号で断面 B と相似の分布となっている。

b) はり理論においては、塑性域内ではせん断応力は存在しないとしているが、断面 A においては塑性域において $0.25\tau_Y$ のほぼ一定値を示し、弾性域で急激に大きい値となっている。断面 B および C

では中立軸で最大となる三角形分布となる。

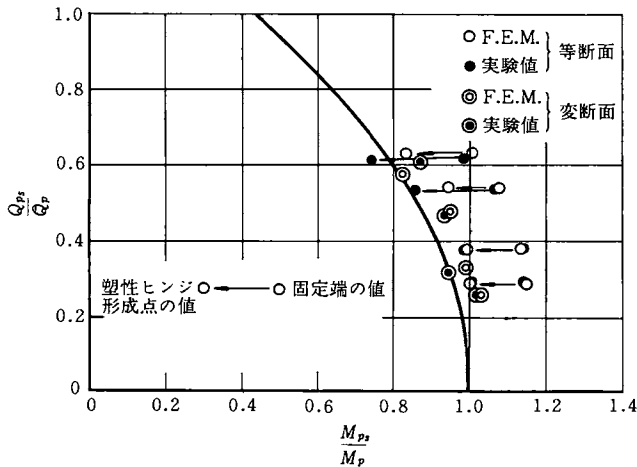
c) はりの長さ方向の直応力 σ_x は断面Aで σ_y と同符号で塑性域では無視することができない大きさの σ_y が存在するため、降伏応力 σ_Y より大きい値の σ_x の存在が可能であり、中立軸の近傍を除いて、 σ_x の値は約 $1.1\sigma_Y$ に達している。このことは塑性ヒンジの形成なしに断面Aでは全塑性モーメントより大きい曲げモーメントに耐えられることを意味している。断面Bにおいても σ_y は σ_x と同符号であるが σ_x が降伏応力 σ_Y を超えるのは断面のごく1部であり、曲げモーメントにおよぼす影響はごくわずかと考えられる。断面Cでは σ_y は σ_x と異符号であり、 σ_y および τ_{xy} の存在により σ_x は降伏応力 σ_Y を超えることができず、曲げモーメントは全塑性モーメントより小さくなる。

(4) 曲げモーメントとせん断力の相関関係

式(1)において $M_{ps} = PL = Q_{ps}L$ の関係を用いて L を消去すると、曲げモーメントとせん断力の相関関係式が得られる。

$$\frac{M_{ps}}{M_p} = 1 - \frac{9}{16} \left(\frac{Q_{ps}}{Q_p} \right)^2 \quad (5)$$

ここに、 Q_{ps} は作用せん断力である、 Q_p は幅 b 、高さ d の長方形断面が受け持つことのできる全せん断力、 $Q_p = \tau_Y bd$ である。



第9図 曲げモーメントとせん断力の相関関係

第9図はこの相関関係を縦軸に Q_{ps}/Q_p を横軸に M_{ps}/M_p をとって図示したもので、実線は式(5)の値を示している。白丸および白の二重丸はそれぞれ等断面および変断面ばりの弾塑性有限要素法より得られた値を、黒丸および黒の二重丸はそれぞれの実験値を示している。等断面ばりの弾塑性有限要素法から得られた値および実験値は、片持ばり固定端に塑性ヒンジが形成するとするはり理論においては、式(5)の相関曲線のかかなり外側に位置するが、実際に生じた塑性ヒンジ形成点の値を用いると矢印で示された点まで移動する。

塑性ヒンジの位置を考慮すると、等断面および変断面ばりの弾塑性有限要素法および実験結果は各シャースパン比とも、はり理論より得られた式(5)の相関曲線の外側に近接して分布することがわかる。

4. 結 論

本研究においては、全塑性モーメントにおよぼすせん断力の影響が比較的大きいと考えられる短いスパンの長方形等断面および変断面片持ばりの載荷実験を行い、得られた結果と弾塑性有限要素法およびはり理論との比較を行った。この結果以下の結論を得た。

(1) 等断面片持ばりにおいては塑性ヒンジは固定端には形成されず、固定端よりわずかに離れた断面で塑性ヒンジが形成され、固定端では全塑性モーメントより大きい曲げモーメントに耐えることができる。

(2) スパンの中間に塑性ヒンジが形成される変断面片持ばりにおいては、塑性ヒンジ形成点は、はり理論による形成点に一致し、テーパの急な変断面ばりにもはり理論が適用できる。

(3) 全塑性モーメントにおよぼすせん断力の影響の検討に当り、等断面片持ばりでは塑性ヒンジ形成位置を考慮すべきである。等断面および変断面片持ばり共に、せん断力による全塑性モーメントの低下が認められる。その大きさは、曲げモーメントによって生じた塑性域内ではせん断力が存在しないとして導びかれたはり理論によるものより小さい。したがって、塑性ヒンジ形成位置を考慮すれば、等断面ばりおよび変断面ばり共に全塑性モーメントにおよぼすせん断力の影響は、はり理論によるもので十分に安全である。

参 考 文 献

- 1) Horne, M.R., "The Plastic Theory of Bending of Mild Steel Beams with Particular Reference to the Effect of Shear Forces", *Proc. of the Royal Society*, London, Vol. 207, p. 216.
- 2) Neal, B.G., "Effect of Shear Force on the Full Plastic Moment of an I-Beam", *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 3, 1961, p. 258.
- 3) Drucker, D.C., "The Effect of Shear on the Full Plastic Moment of Beams", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 23, No. 4, Dec., 1956, pp. 509~514.
- 4) Hodge, D.G., "Interaction Curves for Shear and Bending of Plastic Beams", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 24, No. 3, Sept., 1957, pp. 453~456.
- 5) Prager, W., and Hodge, D.G., Jr., "*Theory of Perfectly Plastic Solids*", John Wiley Book Co., London, 1951, p. 51.
- 6) 宇佐美, 川本, 福本, "光弾性皮膜法による鋼部材の弾塑性域の拡がりに関する研究", 土木学会論文集, 第152号, 1968年4月, pp. 16~25
- 7) 山田嘉昭 "塑性・粘弾性、コンピューターによる構造工学講座II-2-A, 日本鋼構造協会編, 培風館, 昭和47年
- 8) ASCE "*Plastic Design in Steel, A Guide and Commentary*" Manuals and Reports on Engineering Practice, No. 41, 1971.

(昭和49年5月7日受理)