

分岐噴流の方向制御のための側壁の効果 : 第2部

著者	岸岡 英太郎
雑誌名	金沢大学工学部紀要 = Memoirs of the Faculty of Technology Kanazawa University
巻	8
号	2
ページ	59-71
発行年	1974-09-25
URL	http://hdl.handle.net/2297/25527

分岐噴流の方向制御のための 側壁の効果 第2部

岸 岡 英太郎*

Effect of the Side-Wall to Govern the Direction of the Branch Jet Part 2

by

Eitaro KISHIOKA

Abstract

The preliminary analysis developed in the last paper 2 proved effectiveness of the side-wall to suppress the deflection of the branch jet caused by impingement of a free jet on the edge of the blade. But, it was restricted to the special case that the blade surface was set perpendicularly to the initial direction of the free jet.

The present paper deduces the ultimate results applicable to the practical use from the analysis of the extended case. Conclusively the side-wall which ends at a point just opposite to the impinging edge serves to suppress the deflection of the branch jet down to 20 degrees, though unless the side-wall be present the deflection might amount to over 100 degrees.

The efflux from the static tank through the orifice with asymmetric walls, which has a great resemblance to the deflection of the branch jet as already discussed in Part 1, is the subject of Section 2. Except for coincidence in the limiting case that quantity of the branch jet occupies a very small fraction of the whole, the aspect of the efflux from the static tank deviates from that of the branch jet, as proved from final comparison between the two phenomena.

Appendix 2 gives the coefficient of contraction of the efflux from the orifice calculated over the full range of orifice angle.

1. 緒 言

自由噴流がこれに対して斜に置かれたくさびのエッジに当たるとき分岐噴流の転向角を抑制するため原噴流の片側に側壁を設けることの有効性を確める目的の理論解析を、前編²⁾に述べた。その際解析を簡単にするため、噴流に対してくさび面が垂直の場合に限定したので、くさび面が噴流となす角

*機械工学第2学科

がもっと小さく 20° ないし 30° という実際の値のとき轉向角の低減効果を適格に把握するには解析の条件がきびし過ぎたと考えられる。今回はこの点につき最終的な結論を得るための解析結果を述べる。

側壁のある分岐噴流の轉向は静圧タンクからの流出と類似しており、極限において両者は一致する関係にあることはすでに述べたが、問題は極限の手前で起こる相違の程度であるから、それぞれの数量的知識が前提になる。しかし、それに必要な算式を与える解析の記録がこれまで欠けていた。まず次節2においては、静圧タンクから非対称オリフィスを持つオリフィスを通じて流出が起こるときの流形を求めて、つぎに3ではこれと同形のオリフィスに噴流を当てた場合を解析して、側壁の効果を解明するとともに、静圧噴き出しと噴流分岐の比較を行なう。

終りに、前編で引用したが紙面の都合により発表を繰り延べた、静圧タンクから対称オリフィスを通じて流出が起こるときの理論縮流係数とオリフィス角の関係を示す線図を付録2に掲げる。

2. 静圧タンクから非対称オリフィスによる噴流 片側の側壁長さの影響

Fig. 1a の半無限長壁 IA, IA' はタンクの底壁を表わし、非対称オリフィス AA' から噴流がBの方向に噴出するものとする。オリフィス壁のエッジAとA'の相互位置によって噴流の傾き β (以下、流出角と呼ぶ) がいかに左右されるかを量的に調べるのが本節の目的である。

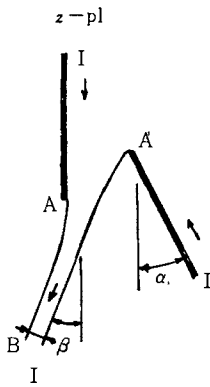


Fig. 1a

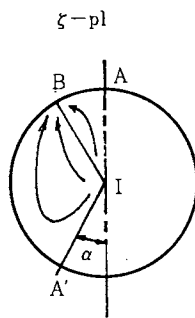


Fig. 1b

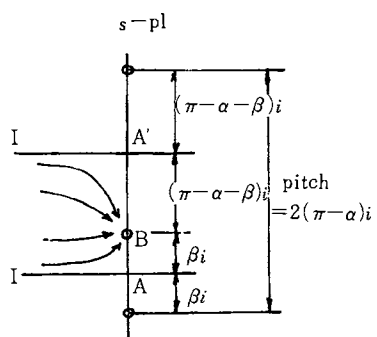


Fig. 1c

いま、この図に対応する複素ホドグラフと面は Fig. 1b のとおりで、流れの場は図の扇形域 AIA' で表わされる。これを

$$s = \ln \zeta \quad (2 \cdot 1)$$

の変換式により s 面 (Fig. 1c) の虚軸の左側にある半無限帯状域 AIIA' に移し、その境界が流線になるように複素ポテンシャル W を決めることは極めて容易である。 W は Fig. 1c に示すように、周期が $2(\pi - \alpha)i$ の 2 組の無限数吸いこみ列

$$-\frac{1}{\pi} \ln \left\{ s - \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right) i - 2m(\pi - \alpha) i \right\} \quad \text{および} \quad -\frac{1}{\pi} \ln \left\{ s - \left(-\beta + \frac{\pi}{2} \right) i - 2m(\pi - \alpha) i \right\} \quad (m \text{ は整数})$$

から構成される。すなわち

$$\frac{dW}{ds} = -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} \left\{ \coth \frac{\pi(s-\beta i-\pi i/2)}{2(\pi-\alpha)} + \coth \frac{\pi(s+\beta i-\pi i/2)}{2(\pi-\alpha)} \right\} \quad (2 \cdot 2)$$

と面がホドグラフ面であるから

$$\zeta = dW/dz \quad (2 \cdot 3)$$

が成立する。(2・1), (2・2), (2・3) の3式より

$$dz/ds = -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} e^{-s} \left\{ \coth \frac{\pi(s-\beta i-\pi i/2)}{2(\pi-\alpha)} + \coth \frac{\pi(s+\beta i-\pi i/2)}{2(\pi-\alpha)} \right\}$$

s面の虚軸上で $s-\pi i/2-\beta i=yi$ (y は実軸), $\pi/2(\pi-\alpha)=K$ と置けば

$$\begin{aligned} dz &= -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} e^{-\beta i-yi} \{ \coth(Kyi) + \coth(Kyi+2K\beta i) \} dy \\ &= -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} e^{-(\beta+\pi/2)i} \{ \cot(Ky) + \cot(Ky+2K\beta) \} e^{-yi} dy \end{aligned}$$

これより

$$X = \operatorname{Re} \{ z e^{(\beta+\pi/2)i} \} = -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} \int_{-\beta}^{\pi-\alpha-\beta} \cos y \{ \cot(Ky) + \cot(Ky+2K\beta) \} dy \quad (2 \cdot 4)$$

$$Y = \operatorname{Im} \{ z e^{(\beta+\pi/2)i} \} = \frac{1}{2(\pi-\alpha)} \int_{-\beta}^{\pi-\alpha-\beta} \sin y \{ \cot(Ky) + \cot(Ky+2K\beta) \} dy \quad (2 \cdot 5)$$

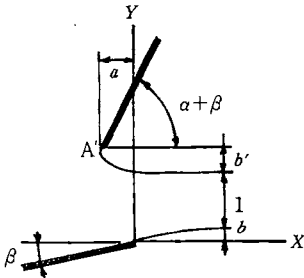


Fig. 2

ここで, X, Y は, Fig. 2 に示すように, Fig. 1a の座標面を A 点のまわりに $\pi/2+\beta$ だけ反時計方向に回転したときの座標を表わし, この場合に噴流端 B では噴流が X 軸に平行である。また, 式中 $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ はそれぞれ実軸, 虚部を表わす記号である。Fig. 2 において噴流の収縮を求めるには, (2・5) 式の積分を $\int_{-\beta}^0$ と $\int_0^{\pi-\alpha-\beta}$ に二分してそれぞれを図の b, b' とすればよい。(2・5) 式の方は問題もないが, (2・4) 式の方は $y=0$ で不連続と

なる仮性積分の Cauchy の主値であるので数値計算上誤差を伴いやすい。幸い, この積分は K が有理数の場合に初等積分可能であることを利用し, 実用上の α の範囲を考慮すると, $\alpha=30^\circ$ すなわち $K=3/5$ にとるのが好都合である。(2・5) 式を項別に分けて

$$I_1 = \int \sin y \cot \frac{3}{5} y dy, \quad I_2 = \int \sin y \cot \left(\frac{3}{5} y + \frac{6}{5} \beta \right) dy$$

に $\eta=3y/5, \eta=3y/5+6\beta/5$ の置換をすれば

$$I_1 = \sin\left(\frac{5}{3}\eta\right) + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \frac{\sqrt{3}\tan(\eta/6)+1}{\sqrt{3}\tan(\eta/6)-1} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \frac{\tan(\eta/6)+\sqrt{3}}{\tan(\eta/6)-\sqrt{3}}$$

$$I_2 = \cos 2\beta \left\{ \sin\left(\frac{5}{3}\eta\right) + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \frac{\sqrt{3}\tan(\eta/6)+1}{\sqrt{3}\tan(\eta/6)-1} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \frac{\tan(\eta/6)+\sqrt{3}}{-\tan(\eta/6)+\sqrt{3}} \right\}$$

$$-\sin 2\beta \left\{ \cos\left(\frac{5}{3}\eta\right) + \frac{5}{3} \ln \tan(\eta/6) + \frac{5}{6} \ln \frac{\tan^2(\eta/6) + \sqrt{3}}{\tan^2(\eta/6) - \sqrt{3}} \right\}$$

同様に (2・4) 式の積分を項別に分けて

$$J_1 = \int \cos y \cot(3y/5) dy, \quad J_2 = \int \cos y \cot(3y/5) dy$$

とすれば

$$J_1 = \cos\left(\frac{5}{3}\eta\right) + \frac{5}{3} \ln \tan(\eta/6) + \frac{5}{6} \ln \frac{\tan^2(\eta/6) - 1/3}{\tan^2(\eta/6) - 3}$$

$$J_2 = \cos 2\beta \left\{ \cos(5\eta/3) + \frac{5}{3} \ln \tan(\eta/6) + \frac{5}{6} \ln \frac{\tan^2(\eta/6) - 1/3}{\tan^2(\eta/6) - 3} \right\}$$

$$+ \sin 2\beta \left\{ \sin(5\eta/3) + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \frac{\sqrt{3}\tan(\eta/6) + 1}{\sqrt{3}\tan(\eta/6) - 1} + \frac{5\sqrt{3}}{6} \ln \frac{\tan(\eta/6) + \sqrt{3}}{\tan(\eta/6) - \sqrt{3}} \right\}$$

(2・4), (2・5) 式より

$$b = \frac{3}{5\pi} (I_1 \Big|_{-3\beta/5}^0 + I_2 \Big|_{3\beta/5}^{6\beta/5}), \quad b' = -\frac{3}{5\pi} (I_1 \Big|_0^{\pi/2 - 3\beta/5} + I_2 \Big|_{6\beta/5}^{\pi/2 + 3\beta/5}), \quad a = -(J_1 \Big|_{-3\beta/5}^{\pi/2 - 3\beta/5} +$$

$$J_2 \Big|_{3\beta/5}^{\pi/2 + 3\beta/5})$$

であるから

$$b = \frac{6}{5\pi} \sin \beta + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{3}\sec^2(\beta/10) - 4\tan(\beta/10)}{\sqrt{3}\sec^2(\beta/10) - 4\tan(\beta/10)} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cos 2\beta \ln \left\{ \frac{\sqrt{3}\sec^2(\beta/5) + 4\tan(\beta/5)}{\sqrt{3}\sec^2(\beta/5) - 4\tan(\beta/5)} \right\}$$

$$\left\{ \frac{\sqrt{3}\sec^2(\beta/10) + 4\tan(\beta/10)}{\sqrt{3}\sec^2(\beta/10) + 4\tan(\beta/10)} \right\} - \frac{1}{\pi} \sin 2\beta \left[\ln \frac{\tan(\beta/5)}{\tan(\beta/10)} + \frac{1}{2} \ln \frac{\{1/3 - \tan^2(\beta/5)\} \{3 - \tan^2(\beta/10)\}}{\{3 - \tan^2(\beta/5)\} \{1/3 - \tan^2(\beta/10)\}} \right]$$

$$b' = \frac{6}{5\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \beta\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{3}\sec^2(\pi/12 - \beta/10) + 4\tan(\pi/12 - \beta/10)}{\sqrt{3}\sec^2(\pi/12 - \beta/10) - 4\tan(\pi/12 - \beta/10)}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cos 2\beta \ln \left\{ \frac{\sqrt{3}\sec^2(\pi/12 + \beta/10) + 4\tan(\pi/12 + \beta/10)}{\sqrt{3}\sec^2(\pi/12 + \beta/10) - 4\tan(\pi/12 + \beta/10)} \frac{\sqrt{3}\sec^2(\beta/5) - 4\tan(\beta/5)}{\sqrt{3}\sec^2(\beta/5) + 4\tan(\beta/5)} \right\}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sin 2\beta \left[\ln \frac{\tan(\pi/12 + \beta/10)}{\tan(\beta/5)} + \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\tan^2(\pi/12 + \beta/10) - 1/3}{\tan^2(\pi/12 + \beta/10) - 3} \right\} \frac{\{ \tan^2(\beta/5) - 3 \}}{\{ \tan^2(\beta/5) - 1/3 \}} \right]$$

$$a = -\frac{6}{5\pi} \cos(\pi/6 + \beta) - \frac{6}{5\pi} \cos 2\beta + \frac{1}{\pi} (1 + \cos 2\beta) \ln \frac{\tan(\pi/12 - \beta/10)}{\tan \beta/10}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} (1 + \cos 2\beta) \ln \left\{ \frac{\tan^2(\pi/12 - \beta/10) - 1/3}{\tan^2(\pi/12 - \beta/10) - 3} \right\} \frac{\{-\tan^2 \beta/10 + 3\}}{\{-\tan^2 \beta/10 + 1/3\}}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \sin 2\beta \ln \left\{ \frac{\sqrt{3}\sec^2(\pi/12 - \beta/10) + 4\tan(\pi/12 - \beta/10)}{\sqrt{3}\sec^2(\pi/12 - \beta/10) - 4\tan(\pi/12 - \beta/10)} \right\} \frac{\{\sqrt{3}\sec^2(\beta/10) - 4\tan(\beta/10)\}}{\{\sqrt{3}\sec^2(\beta/10) + 4\tan(\beta/10)\}}$$

縮流係数 C_c は $C_c = 1/(1 + Y) = 1/(1 + b + b')$ によって定義する。これら C_c , b , b' , a を計算して

Fig. 3 に示した。つぎに上と α の値を変えたときの影響を調べるために、 $\pi/4$ のときの算式を同様に求めて

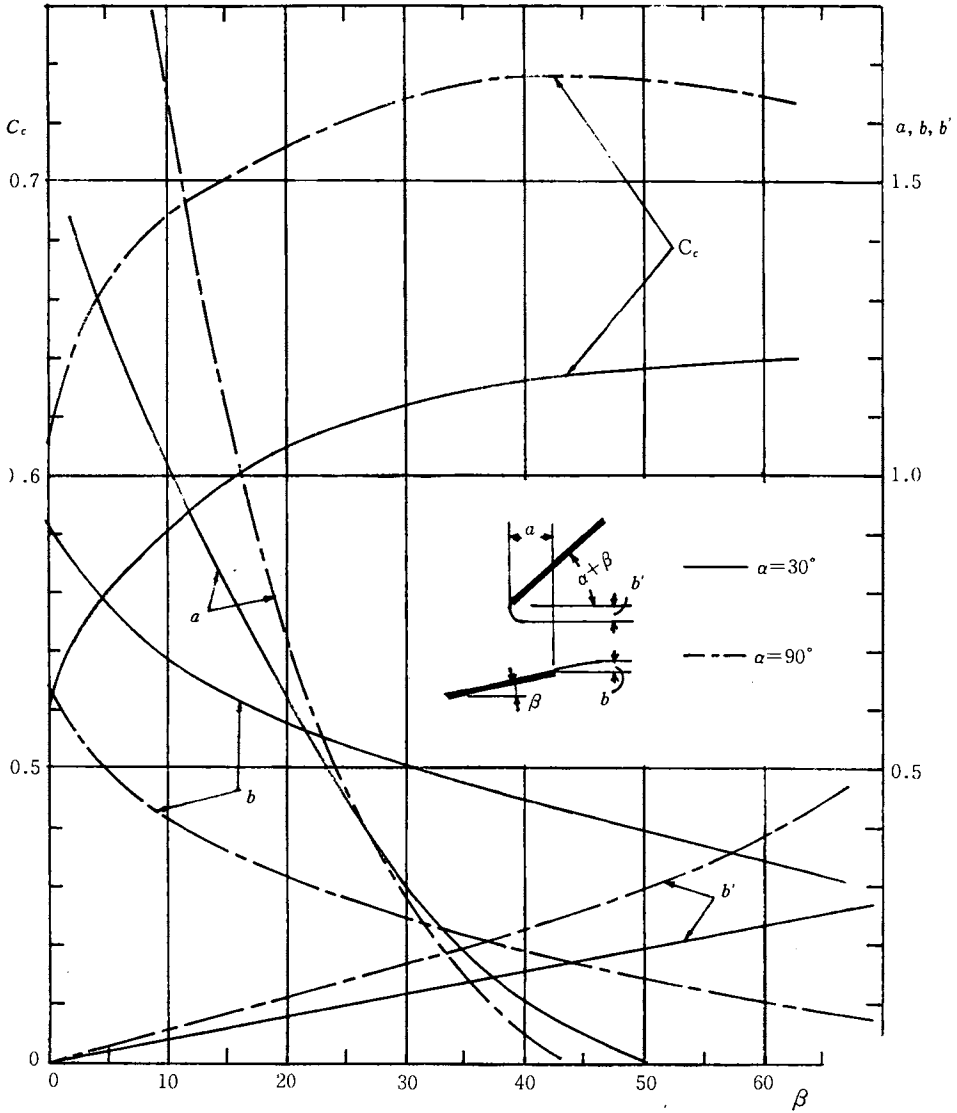


Fig. 3

$$a = \frac{2}{\pi} \{ \sin\beta - \cos\beta + \cos 2\beta \ln \cot(\beta/2) \}$$

$$b = \frac{1}{\pi} \{ 2\sin\beta - \sin 2\beta \ln \frac{\tan \beta}{\tan(\beta/2)} \}$$

$$b' = \frac{1}{\pi} \{ 2\cos\beta - \sin 2\beta \ln \frac{\tan(\pi/4 + \beta/2)}{\tan \beta} \}$$

これを同図に鎖線で示した。

これよりつぎのことが明らかになった。

- (1) β の増加による a, b, b', C_c の変化は $\alpha = \pi/6, \pi/2$ と同傾向を示し、また C_c が α の増とともに増加することは対称オリフィスの場合 (付録 1) と同傾向である。
- (2) β の小さい場合に、 a の値は α の減少によって減少するから、Fig. 2 から分るように、静圧タンクからの流出角 β を一定にたもつための側壁の突出量は α の小さいほど小さい。ただし、 a の曲線は交差するので、 β が大きいとき逆転関係になるが、そのちがいは僅少に過ぎない。
- (3) α が同じ $\pi/2$ という値について、静圧タンクと噴流とで比較するには、前論文 2) Fig. 11 に示した $\mu = 0.8$ の噴流の線図が役立つ。現在の Fig. 2 の値は流量 1 に対するものであるから、 $\mu = 0.8$ の噴流の値と比較する際、Fig. 2 の C_c を除くたて軸の諸量を 0.2 倍して考えるのが妥当である。これより得られる結論は

- a. 同じ β を与える a の値は、静圧タンクの方が噴流のそれと比べて大きく、この場合は約 2 倍に達している。
- b. C_c は静圧タンクの方が噴流より数%低い。

この a, b 両項は α が $\pi/2$ 以外の値においても同様になることを暗示しているものと考えられる。そこで、 α が $\pi/2$ 以外の場合における噴流の計算結果を次節に述べる。

3. 側壁による分岐噴流の転向を抑制する場合の解析

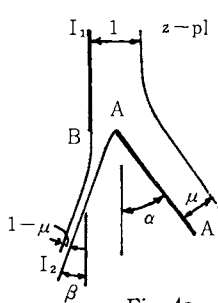


Fig. 4a

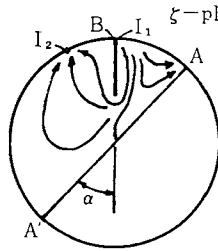


Fig. 4b

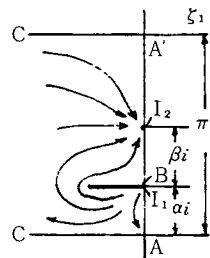


Fig. 4c



Fig. 4d

3.1. 基本式 Fig. 4a の z 面は物理面、同 b の ζ 面は hodograph 面、同 c の補助面 ζ_1 面を経て同 d の t 面を用いる解析法はまえに* $\alpha = \pi/2$ の特殊な場合に述べた手法の一般化である。静止タンクからの流出を扱ったとき ** と同様に t 面実軸上左から $A, I_1, I' B, I_2, A'$ の各点における t の値を順に $0, a, b, c, d, 1$ と置く。Fig. 4c の ζ_1 と Fig. 4b ζ の関係は $\zeta_1 = \ln \zeta - (\pi/2)i$ であり、 ζ_1 と t の関係はまえと同様*** に

$$d\zeta_1 = x(t-b)dt / \sqrt{t(t-a)(t-c)(t-d)} \quad (3 \cdot 1)$$

まえと同様に

$$a = (1-\mu)d \quad (3 \cdot 2)$$

* 文献 2), 4, Fig. 8 ** 文献), Fig. 14b.

*** 文献 1) の (6.2) 式に対して、都合によりここでは b と c の文字を入れ替えた用法とする。また、まえの k は x とし、 $\sqrt{\quad}$ の式は複素関数論的に用い、根号外に i を書かない。

複素速度 $dW/dt=(1/\pi) \{1/(t-a)-\mu/t-(1-\mu)/(t-a/(1-\mu))\}$ を用いて、また、側壁末端 B 点を原点に選ぶと、

$$z=(1/\pi) \int_c^t \exp\left[-\int_c^t \frac{x(t-b)dt}{\sqrt{t(t-a)(t-c)(t-1)}}\right] \left(\frac{1}{t-a}-\frac{\mu}{t}-\frac{1-\mu}{t-a/(1-\mu)}\right) dt \quad (3 \cdot 3)$$

物理面上の角 α を決めるには、試行によって a, c の2個を選び、つぎの条件式 (3・4 a,b,c) によって μ, b および α を決定する方法以外にない。物理面上の角 β は、その後に μ を指定してから決め、それから (3・3) 式により流形が決まる手順である。

$$\int_a^c \varphi(t) dt = 0 \quad (3 \cdot 4a) \quad \int_0^1 \varphi(t) dt = \pi i \quad (3 \cdot 4b) \quad \int_0^a \varphi(t) dt = \alpha i \quad (3 \cdot 4c)$$

$$\int_0^a \varphi(t) dt = (\alpha + \beta) i \quad (3 \cdot 4d) \quad \text{ここで } \varphi(t) = 1/\sqrt{t(t-a)(t-c)(t-1)}$$

前記 $\exp[]$ を計算するためには、つぎの8個の実積分を求める必要がある。

$$J_1 = \int_0^a \frac{dt}{\sqrt{t(a-t)(c-t)(1-t)}} \quad (3 \cdot 5a) \quad J_2 = \int_0^a \frac{tdt}{\sqrt{t(a-t)(c-t)(1-t)}}$$

$$J_3 = \int_a^c \frac{dt}{\sqrt{t(t-a)(c-t)(1-t)}} \quad (3 \cdot 6a) \quad J_4 = \int_a^c \frac{tdt}{\sqrt{t(t-a)(c-t)(1-t)}} \quad (3 \cdot 6b)$$

$$J_5 = \int_c^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t-a)(t-c)(1-t)}} \quad (3 \cdot 7a) \quad J_6 = \int_c^1 \frac{tdt}{\sqrt{t(t-a)(t-c)(1-t)}} \quad (3 \cdot 7b)$$

$$J_7 = \int_c^{a/(1-\mu)} \frac{dt}{\sqrt{t(t-a)(t-c)(1-t)}} \quad (3 \cdot 8a) \quad J_8 = \int_c^{a/(1-\mu)} \frac{tdt}{\sqrt{t(t-a)(t-c)(1-t)}} \quad (3 \cdot 8b)$$

(3・4 a) ~ (3・4 d) 式を用いて

$$b = J_4/J_3 \quad (3 \cdot 9a)$$

$$\alpha = (bJ_1 - J_2)\pi / \{(J_6 - J_2) - b(J_5 - J_1)\} \quad (3 \cdot 9b)^*$$

$$\beta = (J_8 - bJ_7)\pi / \{(J_6 - J_2) - b(J_5 - J_1)\} \quad (3 \cdot 9c)$$

$$x = \pi / \{(J_6 - J_2) - b(J_5 - J_1)\} \quad (3 \cdot 9d)$$

3.2. だ円積分表示

前記 (3・5a) 式から (3・8b) 式まで8個の積分の左列を仮りに第1形式、右列を第2形式と呼ぶならば、第1形式はいわゆる第1種だ円積分、第2形式は第3種だ円積分である。(3・9a) 式から (3・9d) 式までの計算をいくぶんでも簡単にするため、だ円関数を導入した計算を行なう。 $s=1/t-(1+1/a+1/c)/3$ の変換を用いて第1形式を Weierstrass の標準形に書き換えると

* $\int_a^c \varphi(t) dt$ は \int_0^a と \int_c^1 とでは偏角に π のちがいががあるので、逆符号にして導かれた。

$$\int_0^t \varphi(t) dt = (p/i) \int_0^s [1/\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}] ds \quad (3 \cdot 10)$$

ここで $p=2/\sqrt{ac}$, $e_1=(2/a-1/c-1)/3$, $e_2=(-1/a+2/c-1)/3$, $e_3=(-1/a-1/c+2)/3$,
($e_1 > e_2 > e_3$)

e_1, e_2, e_3 は $t=a, c, I$ における s の値である。以下, 特に断らないで用いる記号は一般のだ円関数の慣用記号法に従う。 $s = f(u)$ と置けば, (3・10) 式によって

$$\int_0^t \varphi(t) dt = pu/i$$

$$\text{これより } J_1 = p\omega_1 \quad (3 \cdot 11)$$

$$J_5 = p(\omega_3 - \omega_2) = p\omega_1^*$$

$$\therefore J_1 = J_5 \quad (3 \cdot 12)$$

$$\text{また } J_3 = p\omega_3/i \quad (3 \cdot 13)$$

$a \leq t \leq c$ では $u = \omega_3 + w$ ($w \leq \omega_1$ 実数) であるから, $t = a/(1-\mu)$ に相当する u の値を $\omega_3 + w_d$ と表わすことにすれば

$$J_7 = p(\omega_1 - w_d) \quad (3 \cdot 14)$$

つぎに第2形式を前記と同じ変換によって

$$\int_t \varphi(t) dt = (p/i) \int [1/\{(s+1+e_1+e_2)\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}\}] ds$$

$s = f(u)$ の変換により

$$\int_t \varphi(t) dt = (p/i) \int \frac{du}{f(u)+1+e_1+e_2} \quad (3 \cdot 15)**$$

これをさらに変形すれば (付録2)

$$\int_t \varphi(t) dt = -2\pi(u\sqrt{e_1-e_3}, u_1) = -\ln \frac{\Theta(u\sqrt{e_1-e_3}-u_1)}{\Theta(u\sqrt{e_1-e_3}+u_1)} - 2u\sqrt{e_1-e_3}Z(u) \quad (3 \cdot 15')$$

ここで u_1 は $\text{sn}u_1 = \sqrt{-1/(e_2-e_3)}$ を充す虚定数, $\Theta(u) \equiv \vartheta_4(u, \vartheta_3^{-2} | \tau)$ と $Z(u) \equiv \Theta'(u)/\Theta(u)$ はそれぞれ Yakobi の Theta 関数および Zeta 関数である*。(3・15') 式を用いて

$$J_4 = -\pi i/K - K' iZ(u_1) \quad (3 \cdot 16)$$

$$J_2 = (2K/i)Z(u_1) \quad (3 \cdot 17)$$

$$J_6 = J_2 + \pi \quad (3 \cdot 18)$$

* $f(\omega_1) = e_1$, $f(\omega_2) = e_2$, $f(\omega_3) = e_3$, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$

** (3・15) 式から (3・18) 式までについては付録2参照

(3・9d) 式から $\kappa=1^*$ (3・19)

(3・9c), (3・9d) 式から

$$\alpha = (J_4/J_3)J_1 - J_2 = \pi u_1 / (K'i) \quad (3 \cdot 20)$$

$$\beta = J_8 - (J_4/J_3)J_7 \quad (3 \cdot 21)$$

$$J_8 = \pi(1 - W_d/\omega_1) + 2amp \left\{ \mathcal{P}_4 \left(\frac{w_d K/\omega_1 + u_1 - K'i}{\mathcal{P}_3^2} \right) \right\} + (2/i)(1 - w_d/\omega_1)KZ(u_1) \quad (3 \cdot 22)$$

いま, $J_{7s} = \int_c^t \{1/\sqrt{t(t-a)(t-c)(1-t)}\} dt$, $J_{8s} = \int_c^t \{t/\sqrt{t(t-a)(t-c)(1-t)}\} dt$

と置けば, J_{7s}, J_{8s} はそれぞれ前出 J_7, J_8 の表示式における w_d を w に書き換えた形で表現される。

3.3. 流形の表示式

Fig. 4a の分岐流の流形を計算するには, z 面を側壁端 B点のまわりに反時計方向に $\pi/2 + \beta$ だけ回転した座標面 z_1 面 (Fig. 5) の上で

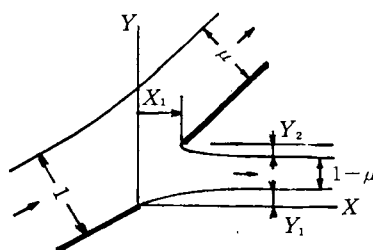


Fig. 5

$$z_1 = \frac{1}{\pi} \int_c^t \exp[(\beta + bJ_{8s} - J_{7s})i] \frac{-\mu a^2/(1-\mu)}{(t-a)t(t-a)/(1-\mu)} dt \quad (3 \cdot 23)$$

と書き, (2・), (2・5) 式を得たように実部と虚部に分けて計算すればよい。しかし, $\exp[]$ 内部は前記のように変数 u の関数として求められるが, そのまま (3・23) 式を計算するには, 積分変数を u にするか t にするか問題である。残念ながら u について解析的に求積を行なうことは困難であるので, だ円関数を利用することは (3・21) 式までの定数計算に限定し, J_{7s}, J_{8s} は (3・14), (3・22) 式によるよりは $\sin^{-1}[(t-(1+c)/2)/((1-c)/2)]$ を積分変数にとって図式積分による求めた方が (3・23) 式の積分を実行するとき好都合である**。以下, Fig. 5 の z_1 面上で X_1, Y_1, Y_2 と記した長さから $C_c = (1-\mu)/(1-\mu+Y_1+Y_2)$ による縮流係数を計算する。

3・4 数値計算

$a=0.02, c=0.085$ の場合, つぎの β までの諸定数はだ円関数の計算法から求められる。

$$p=48.56, e_1=29.08, e_2=-9.160, e_3=-19.915, k=0.4688, q=0.01546, K=1.670, K'=2.213, \omega_1=0.2317, \omega_3=0.3160i, u_1=0.3396i, Z(u_1)=0.0357i$$

$$J_1=11.57, J_2=0.1192, b=0.0478, J_3=15.32, J_4=0.718, J_5=11.57, J_6=3.261$$

$$J_7=2.170, J_8=0.261, \alpha=23.25^\circ, \beta=8.38^\circ,$$

$$\mu=0.8 \text{ では } X_1=0.0448 \quad Y_1=0.0073, Y_2=0.0190$$

一般に a, c を固定して変え得る μ の値は $d=a/(1-\mu) \leq c$ によって決まる下限に拘束され, μ の値を決めると β の値が決まり, X_1, Y_1 等が得られる。その結果が Fig. 6 の実線の曲線で示されている。

* 文献1) の2において $k=1$ としたことが証明された。

**最少限の労力という見地からは, (3・23) 式の b だけを求めておけばよいが, 他の定数も楕円関数を用いて一括高精度で計算しておけば, 要所要所の監査上好都合である。

***偏角, \arg と同義

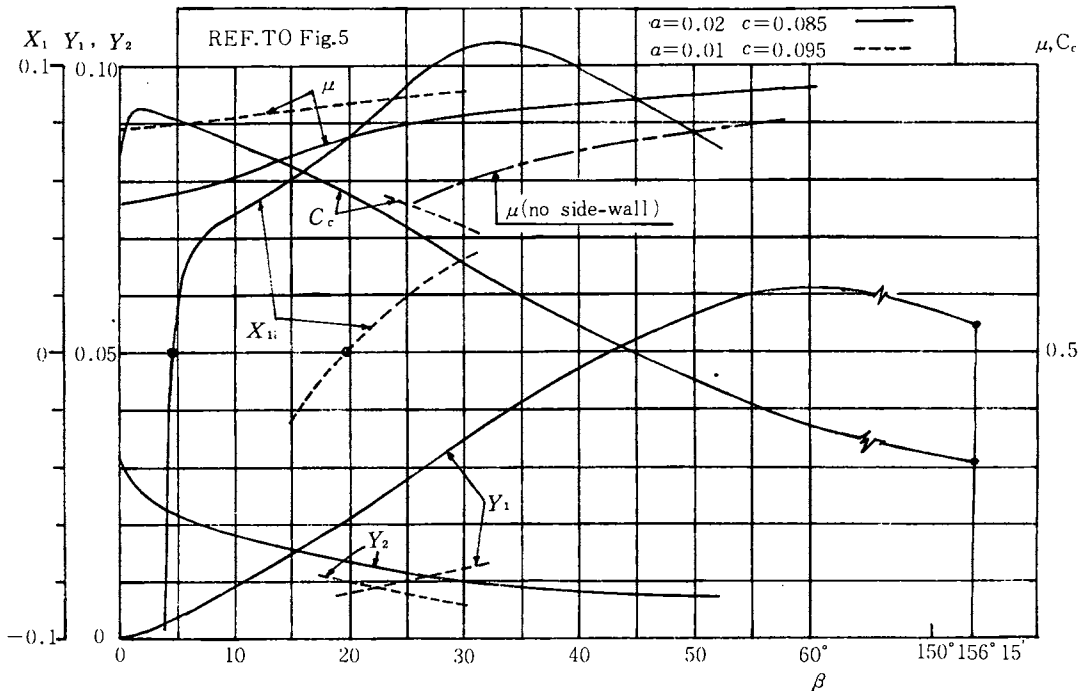


Fig. 6

この図は横軸を β にとつて書かれているので、まえに $\alpha = \pi/2$ の場合に得た線図** と似ているはずであるが、異なる点は Fig. 6 ではパラメータ a, c を固定しているので μ は一定ではなく図にある μ の曲線のように右上りに変化していることである。 X_1 線が線上の小円より右側で正であることはおよそ $\beta > 5^\circ$ の広範囲にわたって側壁端が向う側のエッジより突き出していないことを意味しており、上記の $\alpha = \pi/2$ の場合に β の全域で突き出していたのと比べて目立つた相違である。これは $\alpha = 23.25^\circ$ の場合には $\alpha = 90^\circ$ ほどには側壁を突出させずにすむことを立証したことになる。なお、図中、鎖線の曲線は、側壁がなければ与えられた μ の値において β が増加するため μ 曲線が横すべりして来る位置* を示したもので、この水平移動量は μ の大きさによって異なり、例えば $\mu = 0.8$ の高さでは約 23° も β が増えることを表わす。いわば側壁の有効度が横すべり量で表現されており、 $\alpha = 23.25^\circ$ では期待どおりになっているといえる。

パラメータ a, c の選択を変えても $a + c$ が一定ならば α はあまり動かないものであって例えば $a = 0.015, c = 0.09$ にするとき (同図破線の曲線), $\alpha = 22.50^\circ$ となって前記の 23.25° とほぼ等しい。この場合は、破線の μ 曲線は実線の μ 曲線より高位にあり、 X_1 線は実線より破線が右よりとなって、側壁の突出限界の小円も右にずれる。しかし、 $\mu = 0.93$ において $\beta = 20^\circ$ であるから、側壁のないとき $\beta = 100^\circ$ にもなるのと比べて格段に改善されることは明白である。

4. 結 論

第1部、第2部を総括した結論をつぎに挙げる。(ほかの事項は文献2)の結論参照)

**文献1) Fig. 11

*文献1) (2・7) 式による計算した。

1. 噴流をほぼ 23° の傾きをなす羽根のエッジに当たった場合に、噴流の片側に設けた側壁の末端を羽根より外方に突出させずにほぼ同一線上に揃えた程度でも、流量比 $\mu=0.8$ における転向角を 10° 弱に、 $\mu=0.93$ においては、もし側壁がなければ 100° 以上になるはずのところ、 20° までに低減できることが計算の結果確かめられた。衝動型水タービンにデフレクタと一体の側壁を設けるならば、転向角 35° 以上の部分を削減できるから、逸失損失の大幅低減が見込まれる。
2. 分岐噴流を起す羽根の原噴流に対する傾き角と、静圧タンクから非対称壁のオリフィスを通じて吐出する流れに対するオリフィス角は、その影響の仕方が類似している。
3. 流量比 μ が1に近づくにつれて、分岐噴流の転向角は、静圧タンクからの流出角に向かって増加し、極限で一致するが、極端に μ が1に近くならない限り、噴流の転向角の方が後者より相当小さい。
4. 静圧タンクから非対称オリフィスを通じて起こる流出の縮流係数と流出角の関係を計算した。その結果、前者は後者ととも増加することが分った。
5. 対称オリフィスの流量係数の理論値をオリフィス角 $0 \sim 180^\circ$ の範囲にわたって発表した（付録2）

文 献

- 1) 岸岡, 金大工紀要7巻2号, P. 95
- 2) 同上, 同上 8巻1号, P. 73

付 録

1. 対称形オリフィスの縮流係数

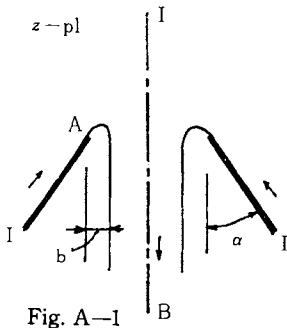


Fig. A-1

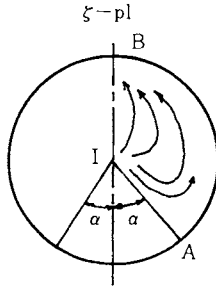


Fig. A-2

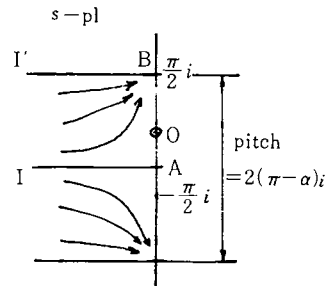


Fig. A-3

本計算の基礎となる複素関数面を Fig. A1, A2, A3 に示す。それぞれ物理面、 hodograph 面、補助面を表わす。この図の α が 0° のとき、Borda's mouthpiece, $\alpha=\pi$ では平面壁のオリフィスに相当し、収縮係数は周知である。補助面の s と複素速度 ζ の関係は

$$s = \ln \zeta \quad (A-1)$$

で与える。 s 面上で複素ポテンシャルは、虚軸上に点 B を含むピッチ $2(\pi-\alpha)i$ の無限数吸いこみ点列から構成されることは、面中の帯状域 $AII'B$ が流れの場に対応するという条件から明らかである。

$$\frac{dW}{ds} = -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} \coth \frac{\pi(s-\pi i/2)}{2(\pi-\alpha)}$$

ζ で表現して,

$$\frac{dW}{ds} = -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} \coth \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-\alpha)} \left(\ln \zeta - \frac{\pi}{2} i \right) \right\} \quad (\text{A-2})$$

$dz/d\zeta = (dz/dw)(dw/ds)(ds/d\zeta)$ と $\zeta = dW/dz$, さらに (A-1), (A-2) によって

$$dz/d\zeta = (1/\zeta^2) \left\{ i/2(\pi \ln \zeta / 2(\pi-\alpha)) - \pi^2/4(\pi-\alpha) \right\}$$

ここで $\zeta = e^{i\theta}$ と置けば

$$dz/d\zeta = -\frac{e^{-2i\theta}}{2i(\pi-\alpha)} \cot \left\{ \frac{\pi\theta}{2(\pi-\alpha)} - \frac{\pi^2}{4(\pi-\alpha)} \right\}$$

すなわち,

$$dz/d\theta = -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} \cot \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-\alpha)} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\} (\cos\theta - \sin\theta i) \quad (\text{A-3})$$

Fig. A-1 から

$$b = \text{Re} \left\{ \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} (dz/d\theta) d\theta \right\}$$

A-3 を代入して

$$b = -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} \int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} \cot \left\{ \frac{\pi}{2(\pi-\alpha)} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\} \cos\theta \cdot d\theta \quad (\text{A-4})$$

$\theta = \pi/2 - 2(\pi-\alpha)\tau/\pi$ の置換をして

$$b = -\frac{1}{2(\pi-\alpha)} \sin\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\sin \frac{\pi-2\alpha}{\pi} \tau / \sin\tau \right) d\tau \quad (\text{A-5})$$

この式は α が π の有理数倍のとき解析的に積分ができるので α の 0 から π までの区間でできるだけ多数の点で b を計算し, これより $C_c = 0.5/(0.5+b)$ による C_c を求めたものを Fig. A4 に示す。

2. だ円関数に関する計算式 (3・2) 式の誘導

$$(3 \cdot 15) \text{ 式} \quad \int t \varrho(t) dt = (p/i) \int \frac{du}{\wp(u)+1+e_1+e_2}$$

において, $\wp(u) = e_3 + (e_1 - e_3)/\text{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3})$ を代入すると, 被積分関数は

$$\frac{1}{\wp(u)+1+e_1+e_2} = -\frac{\text{sn}u_1}{\text{cn}u_1 \text{dn}u_1} \frac{k^2 \text{sn}u_1 \text{dn}u_1 \text{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3})}{1 - k^2 \text{sn}^2 \text{sn}^2(u\sqrt{e_1 - e_3})}$$

ここで, 本文に示したように $\text{sn}u_1 = \sqrt{-1/(e_2 - e_3)}$, したがって $\text{cn}u_1 = \sqrt{(e_2 - e_3 + 1)/(e_2 - e_3)}$,

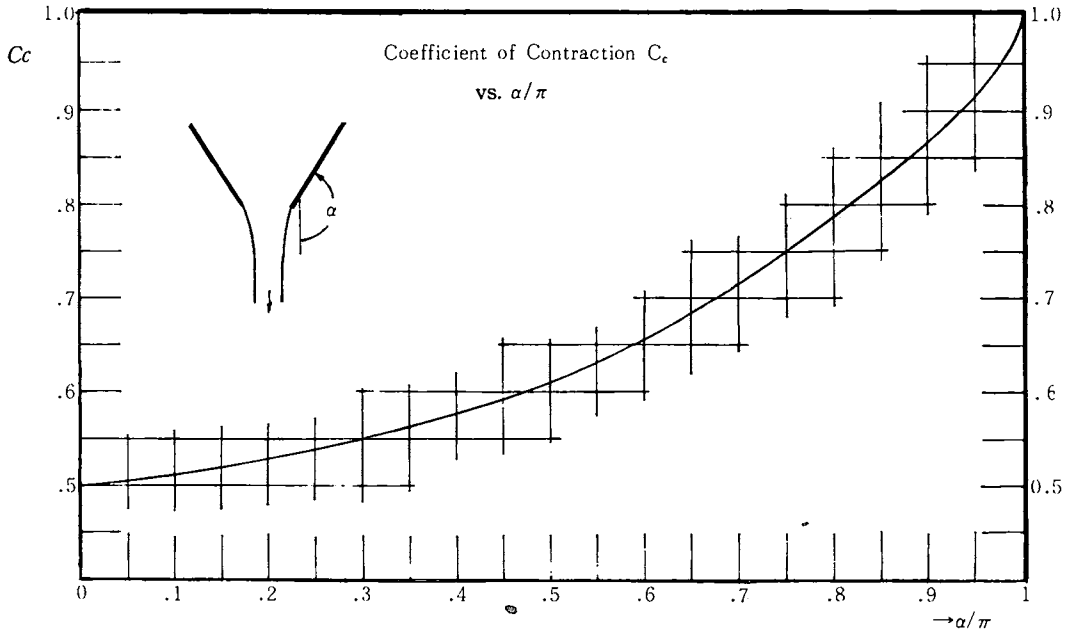


Fig. 6

$dn u_1 = \sqrt{(e_1 - e_3 + 1)/(e_1 - e_3)}$ の関係を用いた。これより

$$\int t \alpha(t) dt = -p \frac{1}{\sqrt{(e_1 - e_3 + 1)(e_2 - e_3 + 1)}} \int \frac{k^2 \text{sn} \alpha \text{nd} \alpha \text{na} \text{sn}^2(u \sqrt{e_1 - e_3})}{1 - k^2 \text{sn}^2 \alpha \text{sn}^2(u \sqrt{e_1 - e_3})} d(u \sqrt{e_1 - e_3}) \quad (\text{A-6})$$

この最後の積分は $\Pi(u \sqrt{e_1 - e_3}, u_1) = \frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(u \sqrt{e_1 - e_3} - u_1)}{\Theta(u \sqrt{e_1 - e_3} + u_1)} + u \sqrt{e_1 - e_3} Z(u_1)$ で表わされ、積分の前の係数は本文 (3・10)

式の後に記した定数の関係から容易に -1 となることが分る。こうして (3・15') 式が得られた。

(3・6b) 式と (3・15') 式から

$$J_4 = 2 \ln \frac{\Theta(K - u_1)}{\Theta(K + u_1)} \frac{\Theta(K + K'i + u_1)}{\Theta(K + K'i - u_1)} - 2\omega_3 \sqrt{e_1 - e_3} Z(u_1) \quad (\text{A-7})$$

(A-7) 式に $K/\vartheta_3^2 = \pi/2$, $K'/\vartheta_3^2 = \pi/2$, $\vartheta(z + \pi\tau, q) = -q^{-1} e^{2iz} \vartheta(z, q)$, $\vartheta(z + \pi, q) = \vartheta(z, q)$ の関係を用いると同式等 1 項は \ln の内部が $e^{-2u_1 i/\vartheta_3^2}$ であるから、(3・16) 式が得られる。また、(3・5b) 式から

$$J_2 = \ln \frac{\Theta(\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3} - u_1)}{\Theta(\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3} + u_1)} + \frac{2\omega_1}{i} \sqrt{e_1 - e_3} Z(u_1)$$

右辺 \ln 内は $\vartheta_4(\pi/2 - u'_1)/\vartheta_4(\pi/2 + u'_1)$ ($u'_1 = u_1 \vartheta_3^{-2} \sqrt{e_1 - e_3}$) である。なぜなら、 $\vartheta_4(\omega_1 \vartheta_3^{-2} \sqrt{e_1 - e_3} - a \vartheta_3^{-2} \sqrt{e_2 - e_3})$ で $\vartheta_3^{-2} = \pi/(2K)$, $\omega_1 = K/\sqrt{e_1 - e_3}$ を代入し、 u'_1 という定数を導入するとこの形になる。ここで ϑ_4 は周期 π の周期関数でかつ偶関数であることに注意すれば、前記の \ln 内部は 1 となつて J_2 は第 2 項だけが残る、直ちに (3・17) 式が得られる。つぎに、 $J_6 - J_2$ に $\omega_1 \sqrt{e_1 - e_3} = K$, $\omega_3 \sqrt{e_1 - e_3} = K'i$, $K/\vartheta_3^2 = \pi/2$, $\vartheta_4(z + \pi/2) = \vartheta_3(z)$ を用いて計算すると、容易に (3・18) 式が導かれる。

(昭和49年5月9日受理)