

## ピン支持はりの高調波応答

著者	佐藤 秀紀, 沼田 憲
雑誌名	金沢大学工学部紀要 = Memoirs of the Faculty of Technology Kanazawa University
巻	8
号	2
ページ	89-96
発行年	1974-09-25
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/25530">http://hdl.handle.net/2297/25530</a>

# ピン支持はりの高調波応答

佐藤 秀紀\* 沼田 憲\*\*

## Higher-Harmonic Response of a Beam with Pinned Ends

by

Hidenori SATO and Ken NUMATA

### Abstract

Higher-harmonic response for large amplitude motion of a beam with pinned end under uniform periodic excitation is investigated. In the present investigation the rotatory inertia, the membrane tension and the correction of curvature are taken into consideration.

The governing partial differential equation is reduced to the nonlinear simultaneous algebraic equations by Galerkin's method and harmonic balance method. The simultaneous equations are solved numerically by Newton's method.

According to the above method, an approximate solution including the modes up to the third order and the higher-harmonics up to the fifth order is applied to a representative example.

As a result, the characteristics of the steady state response are shown in the following regions of the first mode: the second and third higher-harmonic resonances and the principal resonance.

### 1. 緒 言

最近、機械の高速化、高性能化などの傾向にともない、いわゆる軽構造が広く取り入れられるようになってきている。これらの構造物はいずれも、はり・板および殻を基本要素としているが、部材は一般に曲げ剛性が小さく、比較的小さな荷重のもとでも大きな変形を起しやすい。部材が大きく変形するときには、応力—ひずみ関係は弾性限内で線形的であっても、たわみ—ひずみ関係が非線形となる、いわゆる大たわみ（大変形）問題が生ずる。とくに、荷重が動的に働く場合、非線形系においては種々の共振が起り、不安定となりやすいため、これら部材の大たわみにおける動的特性を明らかにすることは工学上重要な課題である。

はりの大たわみ強制振動についてはいくつかの報告がなされているが<sup>1)2)3)</sup>、いずれも一次モードのみを考慮したいわゆる一自由度系としての解析か、いくつかのモードを考慮した多自由度系として扱っていても基本振動数のみによる応答解析である場合が多く、多自由度系で高調波応答を求めている例は板の場合<sup>4)</sup>をのぞいてほとんど見られないようである。

\*機械工学科 \*\*旧大学院生（現日本鋼管KK）

分布質量系としてのはりの非線形振動では、高次のモードの高調波共振、低次のモードの分数調波共振などが考えられるため、高次の自由度、調波を考慮した解析が必要である。

本研究では、はりの非線形振動について多自由度系としての高調波応答解析を目的とし、まず回転慣性、軸力、曲率の修正などを考慮した大たわみの運動方程式を *Eringen*<sup>5)</sup>、*吉村ら*<sup>6)</sup> の式を参考にしして導く。次にピン支持の境界条件を考慮して *Galerkin* 法を用い、連立の *Duffing* 形常微分方程式を得る。これに調和バランス法を適用して非線形の連立代数方程式を求める。求められた連立方程式を *Newton* 法を用いて三次までのモードと五次までの高調波を仮定して数値計算し、その周波数応答の特性を明らかにする。

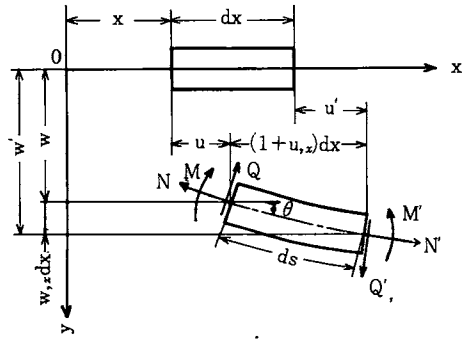
### 2. 運動方程式

せん断変形、減衰を無視した分布周期外力を受けるはりの大たわみ非線形振動については、第1図のように座標をとり、 $x, y$  方向の変位をそれぞれ  $u, w$  とすると、 $x$  方向、 $y$  方向および回転方向の力のつり合いより次式が求まる<sup>5)</sup>。

$$(N\cos\theta)_{,x} - (Q\sin\theta)_{,x} - \rho Au_{,tt} = 0, \tag{1}$$

$$(N\sin\theta)_{,x} + (Q\cos\theta)_{,x} - \rho Aw_{,tt} + p\cos\omega t = 0, \tag{2}$$

$$M_{,x} - Q[(1+u_{,x})\cos\theta + w_{,x}\sin\theta] + N[w_{,x}\cos\theta - (1+u_{,x})\sin\theta] + \rho I\theta_{,tt} = 0. \tag{3}$$



第1図 はり要素の変形  
( ' を付けた量は dx だけ離れた点の量を表わす)

ただし、 $\rho$  ははりの密度、 $A$  は断面積、 $I$  は断面の慣性モーメント、 $N$  は軸力、 $M$  はモーメント、 $Q$  はせん断力、 $p$  は分布外力振幅、 $\omega$  は外力の角振動数、 $t$  は時間である。また、 $(N\sin\theta)_{,x}$ 、 $w_{,tt}$  など はそれぞれ  $d(N\sin\theta)/dx$ 、 $d^2w/dt^2$  など を意味するものとする。

ここで、

$$\alpha = 1 + u_{,x} \quad , \quad \beta = w_{,x} \tag{4}$$

とおくと、はり中立軸上のひずみ  $\epsilon$  は

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = (1 + \epsilon)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \tag{5}$$

によって定義される。ここに  $ds$  は  $dx$  の変形後の長さとする。

また、 $\theta$  と  $\alpha, \beta$  の関係は次式のように表わされる。

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{1 + \epsilon} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\beta}{1 + \epsilon} \quad , \quad \tan\theta = \frac{\beta}{\alpha} \tag{6}$$

(4), (5), (6) 式の関係を用いて, (2), (3) 式より  $\theta$  を消去すると

$$\left(\frac{N\beta}{1+\varepsilon}\right)_{,x} + \left[-\frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^2} M_{,x}\right]_{,x} + \left[\rho I \frac{\alpha}{(1+\varepsilon)^2} \theta_{,tt}\right]_{,x} - \rho A w_{,tt} + p \cos \omega t = 0 \quad (7)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} N &= EA(\varepsilon_0 + \varepsilon) \quad , \quad M = -EI\kappa \quad , \\ \kappa &= \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} (\alpha \beta_{,x} - \beta \alpha_{,x}) \quad , \\ \theta_{,tt} &= -\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} (\alpha \beta_{,tt} - \beta \alpha_{,tt}) - \frac{2}{(1+\varepsilon)^3} (\alpha \beta_{,t} - \beta \alpha_{,t}) \varepsilon_{,t} . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

の関係が成り立つ<sup>6)</sup>。ここに,  $\varepsilon_0$  は初期ひずみ,  $\kappa$  は曲率,  $E$  はヤング率である。

(5), (8) 式を用いて (7) 式を変形すると (7) 式は  $\beta$  すなわち  $w_{,x}$  のみで表わされ, はりの横方向に対する大たわみ運動方程式が得られる。

### 3. 両端ピン支持はりの運動方程式とその解法

長さ  $l$ , 厚さ  $h$  の両端がピン支持されたはりを考える。簡単化のため  $\varepsilon_{,x} = 0$  とする。すなわちひずみは長さ方向の平均ひずみを用いるものとする<sup>7)</sup>。

$$\varepsilon = \frac{1}{2l} \int_0^l (w_{,x})^2 dx \quad (9)$$

また, 無次元化のために, 次のパラメーターを用いる。

$$\left. \begin{aligned} W &= w/h, \quad X = \pi x/l, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{(EI/\rho A)(\pi/l)^4}, \\ \lambda^2 &= (\pi/l)^2 (I/A), \quad \zeta = h \sqrt{A/I}, \quad P = (p/EIh)(l/\pi)^4, \quad \Omega = \omega/\omega_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで,  $\omega_0$  は両端単純支持はり, すなわち線形系の一次の固有角振動数,  $\lambda$  は無次元の細長比であるが  $\lambda^2$  は両端単純支持はりの座屈荷重に相当する軸力が働いたときのひずみ量でもあり,  $h/l = 1/10$  のく形断面はりでは 0.0082 ほどの値をとる微小量である。

(8), (9), (10) 式の関係を用いて (7) 式の無次元化をおこない,  $\varepsilon$  について展開したのち  $\lambda$  について四次以上の項を無視すると, 運動方程式として次式が求まる。

$$\begin{aligned} (1 - 3\zeta^2 \lambda^2 \eta) W_{,XXXX} + \zeta^2 \lambda^2 (W_{,X} W_{,XX})_{,X} - \frac{\varepsilon_0}{\lambda^2} (1 - \zeta^2 \lambda^2 \eta + \zeta^4 \lambda^4 \eta^2) W_{,XX} \\ - (\zeta^2 \eta - \zeta^4 \lambda^2 \eta^2) W_{,XX} - \lambda^2 W_{,XX\tau\tau} + W_{,\tau\tau} - P \cos \Omega \tau = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここに

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi W, X^2 dx \quad (12)$$

(11) 式にて、第1項、第2項はモーメントによる項、第3項は初期軸力による項、第4項は軸力による項、第5項は回転慣性による項、第6項は横慣性、第7項は外力による項である。

境界の条件は

$$M = -\frac{EI}{(1+\epsilon)\alpha} w, xx \quad (13)$$

であることを考慮すると、 $X=0$ 、 $X=\pi$ にて

$$W = W, XX = 0 \quad (14)$$

(11) 式の解を境界条件 (14) 式を満足する線形解のモード関数と時間の関数との積で次式のように表わす。

$$W = \sum_{i=1}^m \sin ix \Phi_i(\tau) \quad (15)$$

(15) 式を用いて (11) 式に *Galerkin* 法を適用すると、 $\Phi_i(\tau)$  に関して次式を得る。

$$g_{i0} \Phi_i, \tau\tau + g_{i1} \Phi_i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=j}^m \sum_{l=k}^m g_{ijkl} \Phi_j \Phi_k \Phi_l - F_i(\tau) = 0 \quad (16)$$

$i = 1, 2, \dots, m$

ここに

$$g_{i0} = 1 + \lambda^2 i^2, \quad g_{i1} = i^4 + (\epsilon_0/\lambda^2) i^2$$

$$F_i(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi P \cos \Omega \tau \sin ix dx \quad (17)$$

(16) 式は *Duffing* 形の  $m$  元連立非線形常微分方程式である。

(16) 式の解として

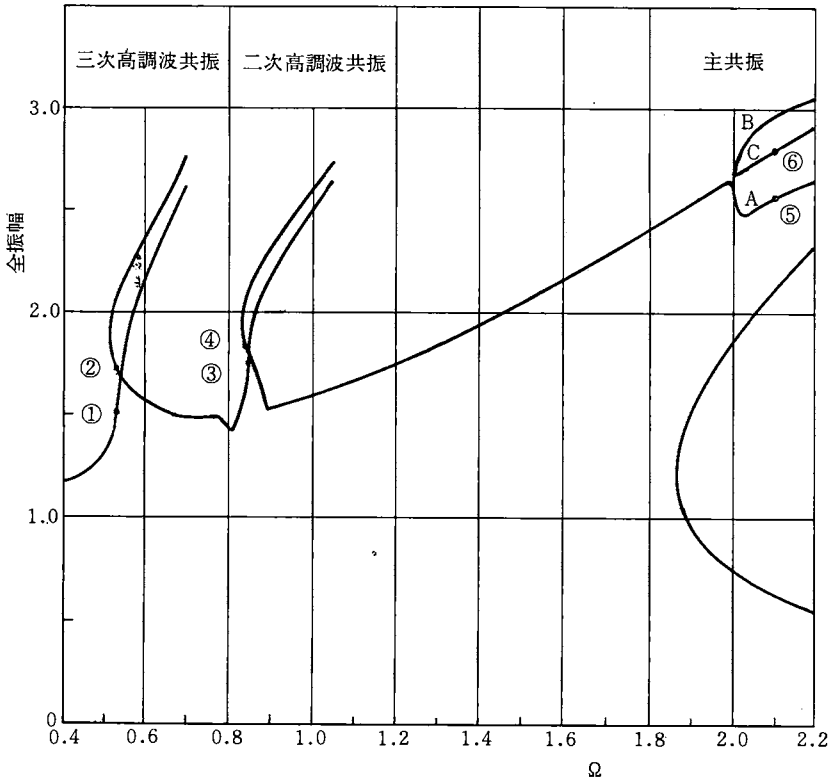
$$\Phi_i(\tau) = a_{i0} + \sum_{r=1}^n a_{ir} \cos r \Omega \tau + b_{ir} \sin r \Omega \tau \quad (18)$$

を仮定する。(18) 式を(16)式に代入し、調和バランス法を適用すると、 $a_{ir}$ 、 $b_{ir}$  に関して  $(2n+1) \times m$  元の非線形連立代数方程式を得る。これを解けば  $m$  次までの振動モードと  $n$  次までの高調波振動を考慮した解が求まることになる。連立代数方程式を解くためには *Newton* 法を用いた。

#### 4. 数値計算結果と考察

数値計算例として、 $\zeta = \sqrt{12}$ 、 $\lambda = 0.02$ 、 $\epsilon_0 = 0$ 、 $P = \pi/4$  の値を用いた。これらの値より、く形断面はりでは  $h/l = 0.022$ 、静止時の中央点でのたわみは  $w = 0.996h \approx h$  すなわち厚さ程度たわむことになる。また、荷重の対称性よりモードの形は奇数次モードのみとなることがわかる。

モード関数の項数  $m$  については、線形系としての単純支持の場合の予備計算より  $m = 5$  までの奇



第2図 全振幅応答曲線

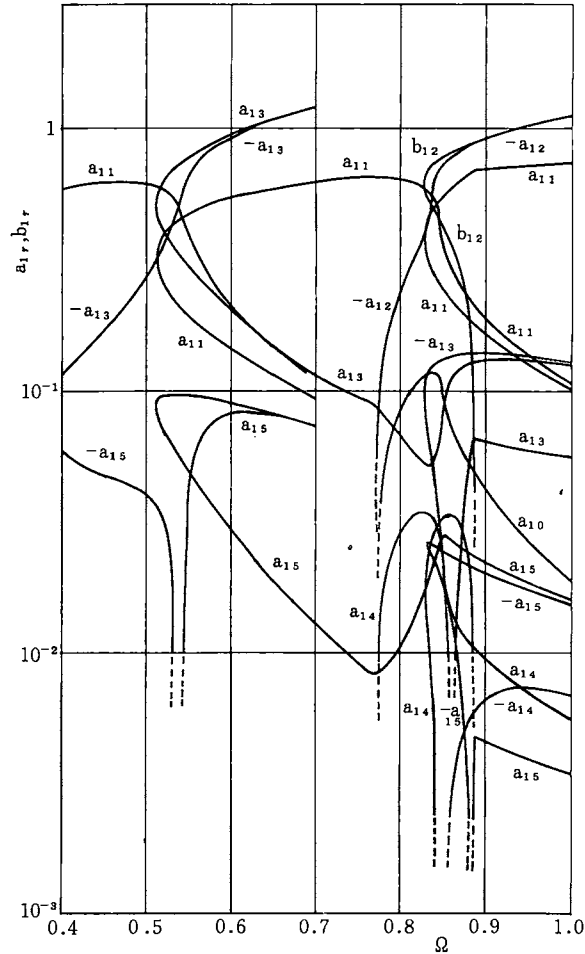
(番号は応答波形計算位置を示す。第4図～第7図の番号に対応する)

数次3項をとった。また、高調波の項数  $n$  については一自由度系の例<sup>9)</sup>より  $n=5$  とした。

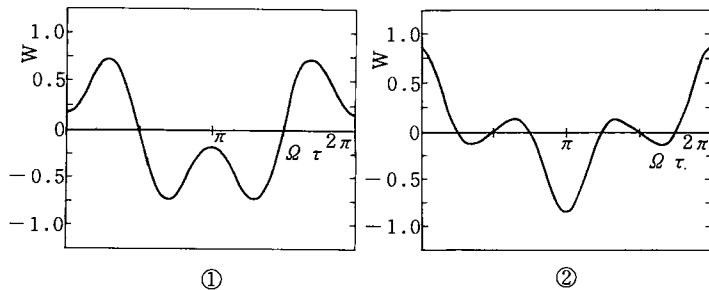
第2図にはり中央点での全振幅 (peak to peak) 応答曲線の計算結果を示す。この周波数範囲ではり中央点が最大の全振幅を示す点でもある。図では一次モードの三次、二次の高調波共振、主共振が現われているが、主共振付近には三次モードの五次高調波共振の影響も現われているため応答曲線は複雑になっている。主共振付近についてみれば、各高調波成分の応答曲線を調べることで、A およびBの部分が三次モードの高調波共振によるものであり、このうちBの部分は不安定領域であることがいえる。<sup>(4)(8)</sup> ただし、これらの部分は減衰の影響を受けると、とくに共振領域が狭いため、ほとんどAの曲線は存在せず、周波数を上げていくと  $\Omega=2.0$  付近でわずかに下がる程度でC曲線につながるものと思われる。

第3図にはり一次モードの二次および三次高調波共振領域における各高調波成分の値を一次モードのもののみについて示した。この図から明らかのように、三次の高調波共振領域では偶数次成分は存在しない。ある周波数 (約  $\Omega=0.77$ ) より偶数次成分が現われ始め、その中の二次成分が大きく成長して二次高調波共振曲線をつくり、共振後位相が  $\pi/2$  だけ変化してある周波数 (約  $\Omega=0.89$ ) で消えることがわかる。減衰があれば、共振振幅はある一定値に抑えられるから結局、偶数次成分はこの範囲では二次高調波共振付近のみで存在することになる。このことは一自由度系の例<sup>9)</sup>からみて二次のみでなく他の偶数次の高調波共振でも成りたつと考えられる。

図では省略したが  $\Omega=2.0$  付近までの範囲では高次のモードの成分は二次モードが  $3 \times 10^{-4}$ 、三次モードが  $10^{-5}$  程度の値であり、高次モードの五次以上の高調波の影響を考慮しなければほとんど一次



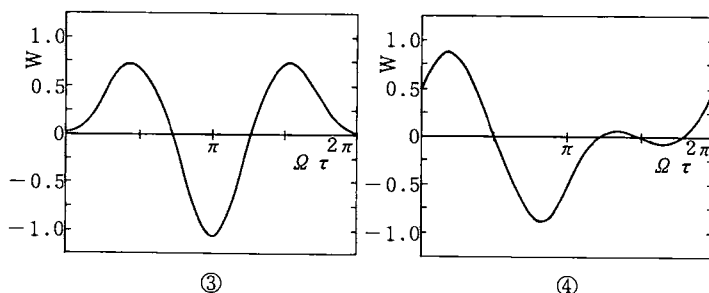
第3図 高調波成分応答曲線



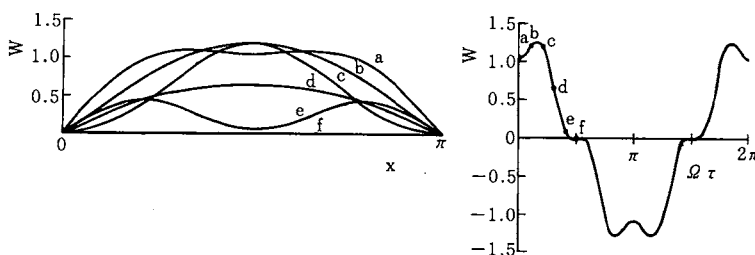
第4図 三次高調波共振付近の応答波形 ( $\Omega=0.53$ )  
(番号は第2図参照)

モードの近似で十分である。

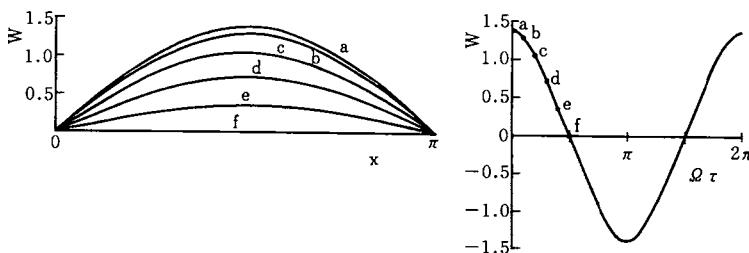
第4図, 第5図には, はり中央点における三次および二次高調波共振付近の応答波形の例を示した。三次の場合は奇数次成分のみからなるため対称波形であるが, 二次の場合は偶数次成分も含まれるため非対称波形となることがわかる。なお図中の番号は第2図の番号と対応し, 応答曲線上の位置を示



第5図 二次高調波共振付近の応答波形 ( $\Omega=0.85$ )  
(番号は第2図参照)



第6図 一次モード共振付近の振動形と応答波形 ( $\Omega=2.1$ ) ⑤  
(番号は第2図参照)



第7図 一次モード共振付近の振動形と応答波形 ( $\Omega=2.1$ ) ⑥  
(番号は第2図参照)

す。

第6図、第7図には主共振付近の $\Omega=2.1$ におけるはりの振動形と応答波形を示した。第6図では三次モードの五次高調波振動の影響が明らかに表われているのがみられる。

なお、 $\lambda$ の影響を調べるため $\lambda=0$ の場合を計算してみたが、応答振幅の結果は1%以内で一致した。このことから本計算で用いたパラメータ範囲では $\lambda$ の影響、すなわち、回転慣性、曲率の修正の影響は認められず、したがって非線形性は主として軸力によることが明らかである。

## 5. 結 言

以上、本研究を要約すると

(1)回転慣性、軸力、曲率の修正を考慮したはりの大たわみの運動方程式を $\epsilon_x=0$ の仮定のもとに無次



元細長比  $\lambda$  について整理した形で求めた。

- (2) 均一分布周期外力を受ける両端ピン支持の場合について、運動方程式を *Galerkin* 法および調和バランス法を用いて解き、三自由度・五次高調波まで近似した数値計算をおこなって、一次モードの三次、二次高調波共振および主共振付近の応答特性を明らかにした。  
おわりに、本論文の図面作製に協力された本学技官小川孝吉氏に感謝の意を表します。

#### 参 考 文 献

- (1) J.A. Bennett, A Multiple Degree-of-Freedom Approach to Nonlinear Beam Vibrations, AIAAJ., 8—4(1970), 734.
- (2) W.Y. Tseng and J. Dugundji, Nonlinear Vibrations of a Beam Under Harmonic Excitation, Trans. ASME, Ser. E, 37—2(1970), 292.
- (3) H.R. Busby and V.I. Weingarten, Nonlinear Response fo a Beam to Periodic Loading, Int.J. Non-Linear Mech., 7—3(1972), 289.
- (4) 八巻, 周期的な集中荷重を受ける短形板の非線形振動, 日本機械学会シンポジウム講演論文集, No. 700—10(昭45), 85.
- (5) A.C. Eringen, On the Nonlinear Vibration of Elastic Bars, Quart. Appl. Math., 9—4(1952), 361.
- (6) 吉村・植村, 棒の横振動に於ける振幅の影響, 東大理工研報告, 2—3, 4 (昭23), 57.
- (7) 佐藤 (喜一), 両端固定はりおよび一端固定, 他端単純支持はりの非線形自由振動, 日本機械学会論文集, 34—259(昭43), 418.
- (8) 佐藤 (秀紀), 一自由度非線形系の高次近似解とその安定性について, 日本機械学会論文集, 39—318(昭48), 610.

(昭和49年5月9日受理)