

## アーチ構造物の自由振動

著者	喜内 敏, 吉田 博, 西田 進
雑誌名	金沢大学工学部紀要 = Memoirs of the Faculty of Technology Kanazawa University
巻	8
号	1
ページ	1-10
発行年	1974-03-25
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/25231">http://hdl.handle.net/2297/25231</a>

# アーチ構造物の自由振動

喜内 敏\* 吉田 博\* 西田 進\*

## Natural Vibration of Arch Structures

by

Bin KINAI, Hiroshi YOSHIDA and Susumu NISHIDA

### Abstract

A study of free vibration of elastic parabolic and circular arches is presented using the transfer matrix method. The arch will be replaced with polygonal structure consisting of lumped masses and straight bars. The masses are connected with massless bars with only rigidity. Using the transfer matrix method, the frequency equation is obtained and then the eigenfunction is determined.

The relationship among slenderness ratios, natural frequencies and modes will be studied for fixed, 1-hinged, 2-hinged and 3-hinged arches. The results also include tables of natural frequencies for parabolic and circular arches.

### 1. ま え が き

はりの曲げ振動解析の一方法として、E. C. Pestel and F. A. Leckieの著書<sup>1)</sup>に、はりの質量を質点に集中させて解析する方法が述べられている。慣性力は質点にのみ集中させ、はりの部分は剛性のみをもって、質点を結んでいるとして解析を行なうこの方法は、電子計算機を利用することにより、構造物の固有周期と、固有関数（モード）を簡単に、しかも比較的短時間に求めることができる。この集中質量法を用いた伝達マトリックス法によって山田、小堀<sup>2)</sup>らは変断面、多スパン連続ばり、途中にヒンジを持つ場合、固定端の場合などいずれにも適用可能な、けた橋の固有振動周期とその固有関数を求めるプログラムを作成し、解析例を紹介している。吉田、喜内<sup>3)</sup>はこの伝達マトリックス法をアーチに応用して、固定および2ヒンジアーチの解析を行なった。アーチの振動解法は他に、山崎、崎山<sup>4)</sup>による、3ヒンジ円弧アーチの振動に関する微分方程式を直接解く方法、あるいはJoseph A. Volf<sup>5)</sup>による、固定および2ヒンジ円弧アーチを有限個の要素に分割し、剛性法を応用して解く方法などがある。

著者らは文献3)の方法をさらに発展させて、任意のアーチ形状、変断面、任意の境界条件、中間ヒンジを持つ場合など、いずれにも適用できる、アーチの固有振動周期とモードを求めるプログラムを作成した。本論文はこのプログラムを用いて比較的解析例の少ない2次放物線アーチと解析例の多い円弧アーチの固有振動周期を各種境界条件のもとで解き、両者の比較検討を行なったものである。なお数値計算の結果は表にして示した。

\*土木工学科

## 2. アーチの自由振動解析

伝達マトリックス法によるアーチの自由振動解析法は文献3) に詳細に述べたので、ここではその概要を簡単に述べる。第1図に示すように、アーチを  $n$  分割し、各分割点間では長さや剛性のみを有する直線はり要素と、各分割点で質量を集中させた質点とにモデル化を行なう。

質点  $i$  の左側の状態量ベクトルを  $Z_i^L = \{\bar{u} \quad \bar{w} \quad \bar{\phi} \quad \bar{M} \quad \bar{Q} \quad \bar{N}\}_i^T$ 、右側の状態量ベクトルを  $Z_i^R$  とすると、 $Z_i^L$  と  $Z_{i-1}^R$  の間には、

$$Z_i^L = F_i Z_{i-1}^R \quad (1)$$

の関係がある。ここに  $\bar{u}$ 、 $\bar{w}$ 、 $\bar{\phi}$ 、 $\bar{M}$ 、 $\bar{Q}$ 、 $\bar{N}$  はそれぞれ無次元化した、接線方向変位、法線方向変位、たわみ角、曲げモーメント、せん断力、軸力を表わし、 $F_i$  は格間伝達マトリックスである。また質点  $i$  の右側と左側の状態量ベクトル、 $Z_i^R$  と  $Z_i^L$  の間には

$$Z_i^R = P_i Z_i^L \quad (2)$$

の関係がある。ここに  $P_i$  は格点伝達マトリックスである。著者らは文献3) で状態量ベクトル、格間

伝達マトリックス、および格点伝達マトリックスを無次元化表示して表わした。ここで用いる記号は全て無次元化表示した文献3) の記号を用いるものとする。

途中に不連続量の入ってくる中間ヒンジのない場合、式(1)および式(2)のマトリックス演算を  $i=0$  から  $i=n$  まで行ない、振動に関する左端および右端の境界マトリックス<sup>6)</sup>  $R$  および  $R'$  をかけることによって次の方程式を得る。

$$R' F_n P_{n-1} F_{n-1} \cdots P_1 F_1 R A_R = D(\omega) A_R = 0 \quad (3)$$

ここに  $F_1, F_2, \dots, F_n$  は格間 1, 2,  $\dots, n$  の格間伝達マトリックス、 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  は質点 1, 2,  $\dots, n-1$  の格点伝達マトリックスである。式(3)の  $\text{Det } D(\omega) = 0$  が振動数行列式であり、 $A_R$  は左端のゼロでない3個の未知数からなる状態量ベクトルである。 $\text{Det } D(\omega) = 0$  を満足する  $\omega$  が求める固有円振動数であり、この  $\omega$  を式(3)に代入して解くと固有ベクトルが求まる。このようにして得られた固有ベクトルより、初期状態量ベクトル  $Z_0$  が求められ、式(1)および式(2)の計算を  $i=1$  より  $i=n$  まで順次行ない、各質点の接線方向変位  $\bar{u}$ 、および法線方向変位  $\bar{w}$  を求めてゆけば振動モードが得られる。

## 3. 中間ヒンジを有する場合

中間ヒンジが質点  $i$  にある場合、中間ヒンジ点で曲げモーメント  $\bar{M}_i^R$  はゼロとなり、ヒンジの左右両端でたわみ角が不連続となる。この2つの条件を用いて初期状態量ベクトルのせん断力  $\bar{Q}_0^R$  を消去し、新たにたわみ角の不連続量  $\bar{\theta}$  を導入する。初期状態量ベクトルを  $Z_0^R$ 、中間ヒンジ点左側の状態量ベ

クトルを  $Z_i^L$  とすると  $Z_0^R$  と  $Z_i^L$  の間には、式(1)および式(2)のマトリックス演算より

$$Z_i^L = [b_{ij}] Z_0^R \quad (4)$$

なる関係がある。ここに、 $[b_{ij}]$  は 6 行 6 列のマトリックスである。ここで  $\bar{M}_i^L = 0$  より

$$\begin{aligned} \bar{Q}_0^R = & -\bar{u}_0^R b_{41}/b_{45} - (-\bar{w}_0^L) b_{42}/b_{45} - \bar{\varphi}_0^R b_{43}/b_{45} \\ & - \bar{M}_0^R b_{44}/b_{45} - \bar{N}_0^R b_{46}/b_{45} \end{aligned} \quad (5)$$

なる関係式が得られ、これを式(4)に代入して整理すると

$$Z_i^L = [b_{ij} - c_{ij}] Z_0^R \quad (6)$$

の形に表わされる。ここに、 $c_{ij} = b_{i5} b_{4j} / b_{45}$  を表わす。中間ヒンジ点の格点伝達マトリックスを掛け合せて  $Z_i^R$  を求めるときは、 $\bar{\varphi}_i^R = \bar{\varphi}_i^L + \phi$  なる関係を用いて、たわみ角の不連続量  $\phi$  を導入する。式(6)の変換を行なった後、マトリックス演算を右端まで行なえば、式(3)より固有振動数が得られる。また固有ベクトルは  $\phi$  を含んだ形で得られるが、式(5)より消去した  $\bar{Q}_0^R$  が求まるので振動モードは 2. と同様にして得られる。

#### 4. 数 値 計 算

(1) 細長比  $\lambda$ 、および無次元化した固有値  $K$

数値計算は等断面アーチについて行なうものとし、基準断面としてこのアーチ断面を用いると、定数値とならない無次元化した格間伝達マトリックスの  $f_{16}$  要素、格点マトリックスの  $p_{51}$ 、 $p_{52}$ 、 $p_{61}$ 、 $p_{62}$  要素について変形を行ない細長比  $\lambda$ 、および無次元化した固有値  $K$  を導入する。文献(3)より、格間伝達マトリックスの  $f_{16}$  要素は次のように変形できる。

$$f_{16} = -\frac{l_i' I_s}{A_i l_s^2} = -\frac{l_i' I_s}{A_i' A_s l_s^2} = -\frac{l_i' r_s^2}{A_i' l_s^2} = -\frac{l_i'}{A_i'} \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{L}{l_s}\right)^2 = -\frac{l_i'}{A_i'} \frac{1}{\lambda^2} \quad (7)$$

ここに  $A_i'$  は  $i$  部材要素の断面積  $A_i$  を基準断面積  $A_s$  で割った値を示し  $l_i'$  は  $i$  部材要素の長さ  $l_i$  を基準長さ  $l_s$  で割った値を示す。 $L$  はアーチのスパン長であり、基準長さ  $l_s$  として  $L$  をとった。 $r_s$  は基準断面の断面二次半径であり、 $\lambda$  は  $\lambda = l_s / r_s$  を表わす細長比である。次に、格点伝達マトリックスの慣性力の項の変形を行なう。

$$\begin{aligned} m_i' \omega^2 \alpha = m_i \omega^2 \frac{l_s^3}{EI_s} = \frac{\gamma}{g} A_i \left(\frac{l_i}{2} + \frac{l_{i+1}}{2}\right) \omega^2 \frac{l_s^3}{EI_s} = \frac{1}{2} A_i' \left(\frac{l_i}{l_s} + \frac{l_{i+1}}{l_s}\right) \\ \frac{l_s^4 \gamma A_s \omega^2}{EI_s g} = \frac{1}{2} V_i' K^4 \end{aligned} \quad (8)$$

ここに  $\gamma$  はアーチ材の単位体積重量を、 $g$  は重力加速度を表わす。また  $V_i'$  は  $V_i' = A_i' (l_i' + l_{i+1}')$  なる無次元化した体積を、 $K$  は  $K = (\gamma A_s \omega^2 / EI_s g)^{1/4} l_s$  として、円振動数  $\omega$  を含む無次元化した固有値を表わす。したがって格点伝達マトリックスの  $p_{51}$ 、 $p_{52}$ 、 $p_{61}$ 、 $p_{62}$  要素は

$$p_{51} = -p_{62} = \frac{1}{2} V_i' K^2 \sin \psi_i, \quad p_{52} = p_{61} = \frac{1}{2} V_i' K^2 \cos \psi_i \quad (9)$$

となる。ここに $\psi_i$ は部材要素 $i$ と $i+1$ とのなす角である。

以上のようにして、アーチの振動数行列式は $\lambda$ と $K$ のみで表わされる。またアーチの無次元化した固有値 $K$ は、はりの自由振動問題に用いられる無次元化した固有値 $\beta l = (\tau A \omega^2 / EI g)^{1/2} L$ と同じ式になるようにとった。

### (2) 分割数と精度

集中質量法によるアーチの振動解析では質量を質点に集中させるので、分割数とその計算精度に大きく影響をおよぼすが、一般に分割数を多くとればその誤差は解消される。文献6)によれば、求める固有値の振動モードの正弦波、半波長の数の質点を振動モードの凹凸部に配置すれば良い結果を示めすが、単純ばりを例に数値計算結果を用いて示されている。本研究では、工学上意味のある低次の振動である1次および2次の対称振動、逆対称振動について解析を行なうので6分割以上の分割数をとれば良い。

2 ヒンジ円弧アーチについて10, 20, 40の各分割数について $K$ の値を求めたところ、40分割に比して、10分割では、2次の振動で約1%程度小さく、1次の振動で約0.1%程度大きくなり、20分割では上記の約半分値となった。以下の解析結果は分割数として、すべて40分割のものを示す。

### (3) 各種境界条件と無次元化した固有値 $K$ の関係

解析は中心角 $\theta = 60^\circ$ の円弧アーチ、および前者とライズ比( $f = 0.134$ )の等しい2次放物線アー

第1表 各種境界条件を有する円弧アーチのK値

$\theta = 60^\circ$

B. C.		$\lambda$	40	120	200	300	500
No-Hinge	1	6.180 FS	7.328 FA	7.330 FA	7.330 FA	7.330 FA	7.330 FA
	2	7.302 FA	9.216 FS	9.787 FS	9.902 FS	9.933 FS	9.933 FS
	3	10.470 SS	11.356 SS	13.387 SA	13.370 SA	13.391 SA	13.391 SA
	4	11.112 SA	13.375 SA	13.572 SS	15.506 SS	15.966 SS	15.966 SS
1-Hinge	1	5.718 FS	7.328 FA	7.330 FA	7.330 FA	7.330 FA	7.330 FA
	2	7.302 FA	7.974 FS	8.221 FS	8.283 FS	8.303 FS	8.303 FS
	3	9.027 SS	10.794 SS	13.131 SS	13.390 SA	13.391 SA	13.391 SA
	4	11.112 SA	13.375 SA	13.387 SA	14.283 SS	14.479 SS	14.479 SS
2-Hinge	1	5.784 FA	5.798 FA	5.799 FA	5.799 FA	5.799 FA	5.799 FA
	2	6.031 FS	8.494 FS	8.621 FS	8.649 FS	8.657 FS	8.657 FS
	3	8.966 SS	10.860 SS	11.897 SA	11.899 SA	11.899 SA	11.899 SA
	4	11.074 SA	11.892 SA	13.571 SS	14.651 SS	14.750 SS	14.750 SS
3-Hinge	1	5.784 FA	5.798 FA	5.799 FA	5.799 FA	5.799 FA	5.799 FA
	2	5.799 FS	7.032 FS	7.089 FS	7.104 FS	7.104 FS	7.104 FS
	3	7.634 SS	10.664 SS	11.897 SA	11.899 SA	11.899 SA	11.899 SA
	4	11.074 SA	11.892 SA	12.843 SS	13.172 SS	13.218 SS	13.218 SS

FS : 1st Symmetric  
 FA : 1st Antisymmetric  
 SS : 2nd Symmetric  
 SA : 2nd Antisymmetric

第2表 各種境界条件を有する2次放物線アーチのK値

Rise Ratio=0.134

B. C.		$\lambda$		40		120		200		300		400	
		1	2	FS	FA	FS	FA	FS	FA	FS	FA	FS	FA
No-Hinge	1	6.213	FS	7.342	FA	7.344	FA	7.345	FA	7.345	FA	7.345	FA
	2	7.316	FA	9.423	FS	9.986	FS	10.079	FS	10.104	FS	10.104	FS
	3	10.466	SS	11.183	SS	13.427	SA	13.429	SA	13.429	SA	13.429	SA
	4	11.117	SA	13.418	SA	13.446	SS	15.629	SS	16.123	SS	16.123	SS
1-Hinge	1	5.782	FS	7.342	FA	7.342	FA	7.345	FA	7.345	FA	7.345	FA
	2	7.316	FA	8.161	FS	8.382	FS	8.440	FS	8.456	FS	8.456	FS
	3	9.010	SS	11.931	SS	13.162	SS	13.429	SA	13.429	SA	13.429	SA
	4	11.117	SA	13.418	SA	13.427	SA	14.441	SS	14.642	SS	14.642	SS
2-Hinge	1	5.806	FA	5.819	FA	5.820	FA	5.820	FA	5.820	FA	5.820	FA
	2	6.020	FS	8.669	FS	8.761	FS	8.779	FS	8.784	FS	8.784	FS
	3	8.949	SS	10.628	SS	11.934	SA	11.934	SA	11.935	SA	11.935	SA
	4	11.103	SA	11.931	SA	13.449	SS	14.766	SS	14.848	SS	14.848	SS
3-Hinge	1	5.806	FA	5.819	FA	5.820	FA	5.820	FA	5.820	FA	5.820	FA
	2	5.819	FS	7.169	FS	7.213	FS	7.224	FS	7.228	FS	7.228	FS
	3	7.574	SS	10.516	SS	11.934	SA	11.934	SA	11.935	SS	11.935	SS
	4	11.103	SA	11.931	SA	12.964	SS	13.294	SS	13.325	SS	13.325	SS

FS : 1st Symmetric  
 FA : 1st Antisymmetric  
 SS : 2nd Symmetric  
 SA : 2nd Antisymmetric

第3表 2ヒンジ円弧アーチのK値(中心角変化)

$\theta$		$\lambda$		40		120		200		300		400	
		1	2	FS	FA	FS	FA	FS	FA	FS	FA	FS	FA
30°	1	4.572	FS	6.158	FA	6.158	FA	6.158	FA	6.158	FA	6.158	FA
	2	6.153	FA	7.390	FS	8.681	FS	8.947	FS	9.001	FS	9.001	FS
	3	9.303	SS	9.467	SS	10.343	SS	12.228	SS	12.396	SA	12.396	SA
	4	11.187	SA	12.394	SA	12.396	SA	12.396	SA	13.876	SS	13.876	SS
90°	1	5.225	FA	5.245	FA	5.247	FA	5.247	FA	5.247	FA	5.247	FA
	2	6.918	FS	8.008	FS	8.037	FS	8.047	FS	8.050	FS	8.050	FS
	3	8.540	SS	11.097	SA	11.104	SA	11.107	SA	11.107	SA	11.107	SA
	4	10.680	SA	12.538	SS	13.775	SS	13.858	SS	13.876	SS	13.876	SS
120°	1	4.537	FA	4.557	FA	4.557	FA	4.559	FA	4.557	FA	4.557	FA
	2	6.923	FS	7.227	FS	7.241	FS	7.245	FS	7.247	FS	7.247	FS
	3	8.449	SS	10.056	SA	10.064	SA	10.064	SA	10.067	SA	10.067	SA
	4	9.842	SA	12.485	SS	12.636	SS	12.658	SS	12.665	SS	12.665	SS

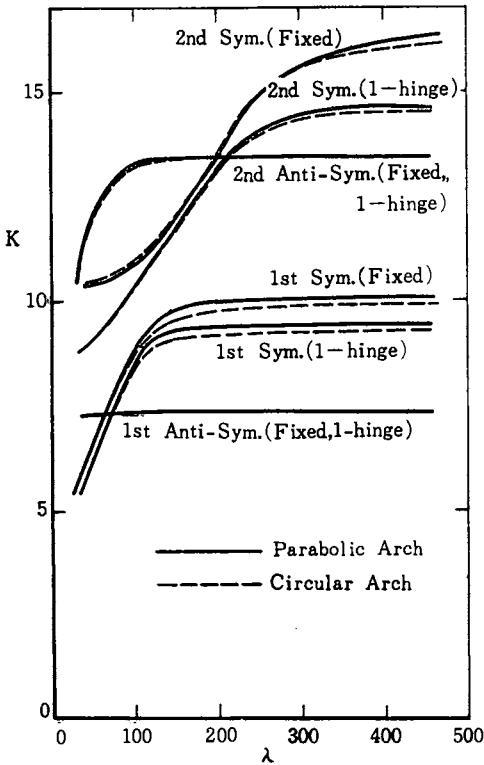
FS : 1st Sym.      FA : 1st Antisym.  
 SS : 2nd Sym.      SA : 2nd Antisym.

第4表 2ヒンジ2次放物線アーチのK値(ライズ比変化)

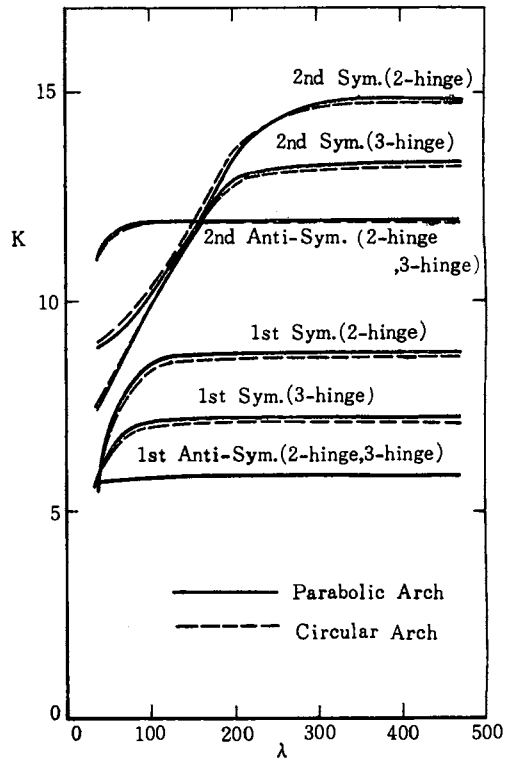
$f \backslash \lambda$		40	120	200	300	400
0.066	1	4.569 FS	6.159 FA	6.159 FA	6.160 FA	6.160 FA
	2	6.155 FA	7.401 FS	8.731 FS	8.989 FS	9.039 FS
	3	9.303 SS	9.444 SS	10.276 SS	12.170 SS	12.399 SA
	4	11.188 SA	12.397 SA	12.398 SA	12.399 SA	13.839 SS
0.207	1	5.313 FA	5.332 FA	5.333 FA	5.334 FA	5.334 FA
	2	7.027 FS	8.287 FS	8.298 FS	8.301 FS	8.302 FS
	3	8.401 SS	11.237 SA	11.240 SA	11.241 SA	11.241 SA
	4	10.903 SA	12.247 SS	14.013 SS	14.064 SS	14.073 SS
0.289	1	4.747 FA	4.767 FA	4.769 FA	4.769 FA	4.770 FA
	2	7.530 FS	7.635 FS	7.637 FS	7.637 FS	7.638 FS
	3	7.837 SS	10.362 SA	10.364 SA	10.365 SA	10.365 SA
	4	10.339 SA	12.864 SS	13.007 SS	13.016 SS	13.018 SS

FS : 1st Sym. FA : 1st Antisym.  
 SS : 2nd Sym. SA : 2nd Antisym.

チについて、固定アーチ、1ヒンジアーチ、2ヒンジアーチ、および3ヒンジアーチの各アーチ形式に対して行ない結果を第1表および第2表に示す。また2ヒンジ円弧アーチについては、中心角を30°



第2図 固定アーチ、1-ヒンジアーチのKとλの関係



第3図 2-ヒンジアーチ、3-ヒンジアーチのKとλの関係

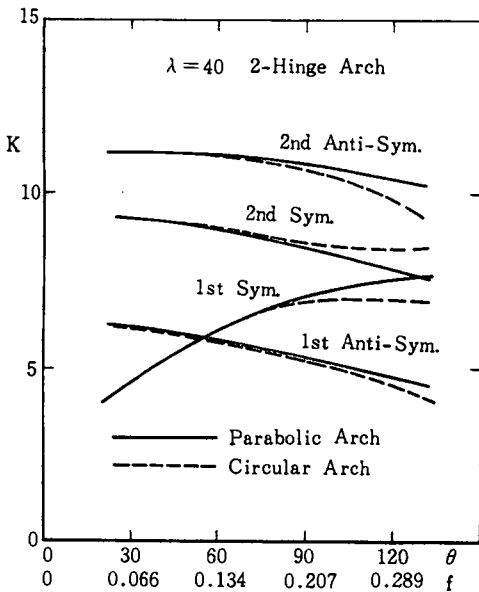
90°, および120°の各値について, 2ヒンジ放物線アーチについては前者とライズ比が等しくなるように,  $f=0.066, 0.207, \text{および} 0.288$ の各値について解析を行ない, 結果を第3表および第4表に示す。

第2図および第3図は第1表および第2表を, 縦軸に無次元化した固有値  $K$  を, 横軸に細長比  $\lambda$  をとって図示したもので, 図中, 実線は放物線アーチ, 点線は円弧アーチを示す。アーチは, 直線ばかりと異なり軸力が生じる。振動問題においても, この軸力による軸線方向の伸縮が振動特性に大きな影響をおよぼしている。図より, 逆対称振動において細長比  $\lambda$  の無次元化した固有値  $K$  への影響は小さく, この傾向は低次の逆対称振動になるほど顕著となる。一方, 対称振動においては,  $\lambda$  の  $K$  への影響は大きく, 高次になるほど  $\lambda$  の増加と共に  $K$  の値は大きくなる。この理由として, 1次逆対称振動と1次対称振動を比較すると, 前者では, 軸力として圧縮力と引張力が作用し, 軸線全体としての伸縮が打ち消され, 後者では, 軸力はすべて圧縮力あるいは引張力となって振動を拘束するためである。

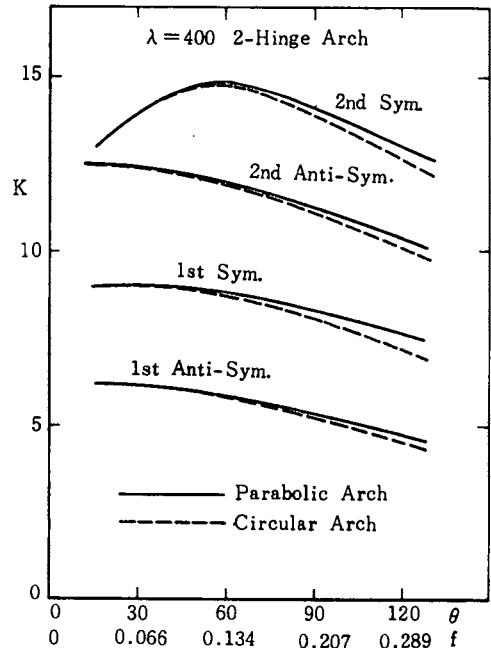
$\lambda$  の大きな細長いアーチでは, アーチのたわみに比して, 軸方向の伸縮がほとんどないため, 逆対称振動より対称振動の  $K$  値は大きくなる。しかし,  $\lambda$  の小さいずんぐりしたアーチになるほど, 圧縮力による伸縮の影響が顕著となり,  $\lambda$  の減少と共に  $K$  の値は小さくなる。図中,  $\lambda=40$  では1次逆対称振動より, 1次対称振動の  $K$  値が小さくなっている。この1次対称振動は, 伸縮が顕著なため, 細長比  $\lambda$  の大きな1次対称振動より波うつ数の小さい振動となっている。

放物線アーチと円弧アーチを比べると, 逆対称振動ではその差はほとんどなく, 対称振動では, 円弧アーチは放物線アーチに比して, 約1%程度  $K$  の値が小さい。

各アーチ形式について比べると, 逆対称振動の場合, アーチ中央部で曲げモーメントはゼロとなり, その点にヒンジのある1ヒンジアーチ, および2ヒンジアーチの逆対称振動はそれぞれ, 固定アーチ, および2ヒンジアーチの逆対称振動と一致する。一方対称振動の場合, 固定アーチ, および2ヒンジ



第4図 2-ヒンジアーチの  $K$  と  $\theta, f$  との関係 ( $\lambda=40$ )



第5図 2-ヒンジアーチの  $K$  と  $\theta, f$  との関係 ( $\lambda=400$ )



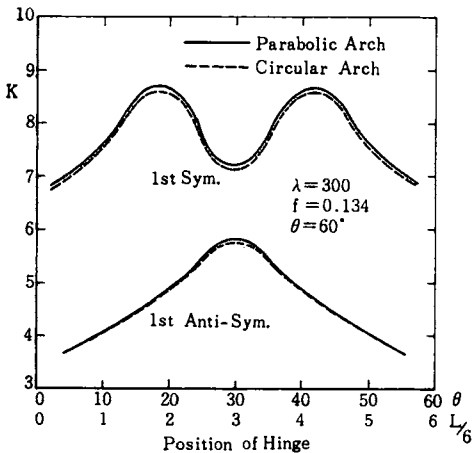
アーチは、アーチ中央点で曲げモーメントが極大となり、1ヒンジアーチ、および3ヒンジアーチは、中央部のヒンジ点で曲げモーメントがゼロとなるので、それだけ曲がりやすくなり、後者は前者より  $K$  の値はそれぞれ小さくなっている。

第4図および第5図は、第3表および第4表の細長比  $\lambda=40$  と  $400$  の場合について、縦軸に  $K$  の値を、横軸に中心角およびライズ比をとって図示したもので、実線は放物線アーチを、点線は円弧アーチを示す。図および表より、細長比  $\lambda$  の小さい場合、中心角あるいはライズ比の大きさによって、 $K$  の値と振動形の順序が異っているが、 $\lambda$  の大きい場合、1次逆対称、1次対称、2次逆対称、および2次対称の順に  $K$  の値は大きくなる。

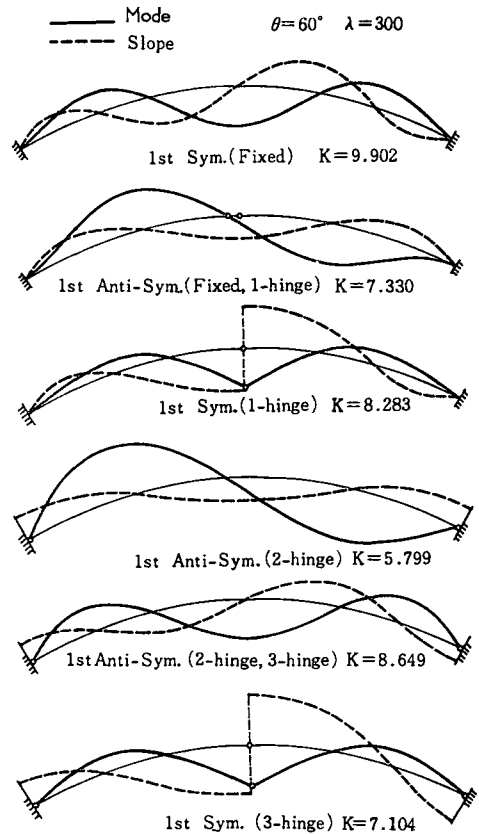
円弧アーチと放物線アーチを比べると、中心角およびライズ比の小さなところでは、ほぼ  $K$  の値は等しいが、それらが大きくなるにしたがって  $K$  の値にわずかの差が生じてくる。これはアーチ中央部の高さと同アーチ支間長の比が同じでも、ライズ比が大きくなるにしたがって、アーチ形状の差が大きくなるためである。

(4) 3ヒンジアーチの中間ヒンジ位置と  $K$  の関係

第6図は3ヒンジアーチの中間ヒンジの位置と  $K$  の関係を示したもので、円弧アーチでは中心角を  $60^\circ$ 、2次放物線アーチではライズ比を  $0.134$ 、細長比は  $\lambda=300$  のものを図示した。図より、1次逆対称振動の場合、中央点にヒンジのあるとき  $K$  の値は最大となり、1次対称振動の場合、ヒンジ位置



第6図 3-ヒンジアーチの中間ヒンジ位置と  $K$  の関係



第7図 各種境界条件を有する円弧アーチの1次モード

が約  $19^\circ$  (約  $0.3L$ ) , と約  $41^\circ$  ( $0.7L$ ) 付近で  $K$  の値は最大となる。これは同じ条件の 2 ヒンジアーチを考えた場合, それぞれの振動形において曲げモーメントがゼロとなる点, すなわちモードの変曲点に中間ヒンジがある場合に,  $K$  の値は最大となる。したがって  $K$  の最大値は 2 ヒンジアーチの 1 次逆対称, および 1 次対称振動の  $K$  の値と一致する。

なお, 中間ヒンジを左端または右端に近づけた場合は, 一端ヒンジ, 他端自由の 2 ヒンジアーチの  $K$  の値に一致する。円弧アーチは放物線アーチと同様の性状を示し, わずかに放物線アーチより  $K$  の値が小さい。

#### (5) モード

第 7 図は各種境界条件を有する円弧アーチの 1 次逆対称, および 1 次対称振動モードを図示したもので, 実線はたわみ, 点線はたわみ角分布を示す。なお, 細長比は  $\lambda=300$ , 中心角は  $\theta=60^\circ$  の場合である。

## 5. 結 論

伝達マトリックス法を用いて 2 次放物線アーチ, および円弧アーチの自由振動解析を行なった。数値計算はアーチを 40 分割し, 各分割点間では長さや剛性のみを有する直線ばり要素と, 各分割点に質量の集中した質点とにモデル化を行ない, 無次元化した格間伝達マトリックス, 格点伝達マトリックス, および振動に関する境界マトリックスを用いて, 振動数方程式を求め, これを解いた。アーチの自由振動特性を表わす無次元化した固有値として  $K$  を用い,  $K$  の式は, はりの自由振動数を表わす円振動数  $\omega$  の関数である  $(rA\omega^2/EI\bar{g})^{\frac{1}{2}}L$  と同じ式になるようにとった。

2 次放物線アーチと円弧アーチの自由振動を種々の境界条件のもとで解き, 次の点が明らかとなった。

(1) 逆対称振動では細長比  $\lambda$  の  $K$  への影響は小さく, このことは低次の逆対称振動になるほど顕著である。これは軸力として圧縮力と引張力が生じ, アーチ軸線全体としての伸縮が打ち消されるためである。

(2) 対称振動では細長比  $\lambda$  の  $K$  への影響は大きく, 高次になるほど,  $K$  の値は細長比  $\lambda$  の増加と共に大きくなる。

(3) 放物線アーチと円弧アーチでは, ライズ比あるいは中心角の小さな場合,  $K$  の値はほとんど異ならないが, ライズ比と中心角が大きくなるにしたがって,  $K$  の値は数%程度異なってくる。

(4) 固定アーチと 1 ヒンジアーチ, 2 ヒンジアーチと 3 ヒンジアーチでは, 逆対称振動の場合,  $K$  の値は一致し, 対称振動の場合, 中間ヒンジのある方が無いものより  $K$  の値は小さい。

なお数値計算に用いた電子計算機は金沢大学計算機センターの **FACOM** 230—35 である。

## 7. 用いた記号

- $A_i$  : ( $A_i$ ) : 部材要素  $i$  の断面積 (基準断面積)
- $E$  : ヤング係数
- $f$  : 2 次放物線アーチのライズ比
- $F_i$  : 部材要素  $i$  の格間伝達マトリックス
- $I_i$  : ( $I_i$ ) : 部材要素  $i$  の慣性モーメント (基準慣性モーメント)
- $K$  : 無次元化した固有値
- $l_i$  : ( $l_i$ ) : 部材要素  $i$  の部材長さ, (基準部材長さ)
- $\bar{M}_i$  : 質点  $i$  における無次元化した曲げモーメント

- $m_i$  ( $m_s$ ) : 質点  $i$  における質量 (基準質量)  
 $\bar{N}_i$  : 質点  $i$  における無次元化した軸力  
 $P_i$  : 質点  $i$  における格点伝達マトリックス  
 $\bar{Q}_i$  : 質点  $i$  における無次元化したせん断力  
 $R$  ( $R'$ ) : 左端の境界マトリックス (右端の境界マトリックス)  
 $r_i$  : 基準断面の断面 2 次半径  
 $\bar{u}_i$  : 質点  $i$  における無次元化した接線方向変位  
 $\bar{w}_i$  : 質点  $i$  における無次元化した法線方向変位  
 $Z_i$  : 質点  $i$  における状態量ベクトル  
 $\gamma$  : アーチ部材の単位体積重量  
 $\theta$  : 円弧アーチの中心角  
 $\theta_i$  : 部材要素  $i$  の接線のなす角  
 $\lambda$  : アーチの支間長  $L$  と  $r_i$  との比 (細長比)  
 $\phi$  : 中間ヒンジ点におけるたわみ角の不連続量  
 $\phi_i$  : 質点  $i$  におけるたわみ角  
 $\psi_i$  : 部材要素  $i$  と  $i+1$  とのなす角  
 $\omega$  : 円振動数

#### 8. 参 考 文 献

- 1) E. C. Pestel and F. A. Leckie, "MATRIX METHODS IN ELASTO MECHANICS", McGraw Hill, 1963.
- 2) 山田善一, 小堀為雄, 「けた橋の固有振動周期とその固有関数を求めるプログラムについて— Transfer matrix 法—」, 土木学会誌, 1952年9月, pp. 50~56.
- 3) H. Yoshida and B. Kinai, "DYNAMIC ANALYSIS OF ARCHES USING TRANSFER MATRIX METHOD", 金沢大学工学部紀要, 6巻2号, pp. 1~10.
- 4) 山崎徳也, 崎山毅, 「3 ヒンジアーチの自由振動解法」, 土木学会論文報告集, 第184号, 1970年12月, pp. 41~55.
- 5) Joseph. A. Volf, "NATURAL FREQUENCIES OF CIRCULAR ARCHES" ASCE, ST9, Sept, 1971, pp. 2337~2349.
- 6) 成岡昌夫, 遠田良喜, 「伝達マトリックス法」, コンピューターによる構造工学講座 I—2—B, 培風館, 1970年.

(昭和48年9月14日受理)