

地盤応力からみた単杭の水平抵抗

著者	西田 義親, 北 哲郎, 八木 則男
雑誌名	金沢大学工学部紀要 = Memoirs of the Faculty of Technology Kanazawa University
巻号	8
ページ	1
発行年	25-35
発行年	1974-03-25
URL	http://hdl.handle.net/2297/25229

地盤応力からみた単杭の水平抵抗

西田 義親* 北 哲郎** 八木 則男*

Lateral Resistance of A Single Pile

—from the condition of ground stress—

by

Yoshichika NISHIDA, Tetsuro KITA and Norio YAGI

Abstract

This paper presents how to predict the lateral resistance of a single pile subjected to the horizontal force, without application of K -value (Modulus of subgrade reaction) in the current existing theories.

The conditions of stresses, deformations and plastic failures are studied for the clay ground by assuming that it consists of many layers of infinite plate and is pushed only in the horizontal direction by the pile. The lateral resistance of a pile is calculated for both the elastic limit and the ultimate failure of the clay ground in the general forms from the mechanical properties of the clay and the pile.

The numerical results are compared with the published data and this method of calculation can be concluded to be useful.

1. 緒 言

従来、杭の水平抵抗解析では、杭の挙動のみに注目し、杭の弾性方程式に実験から求めた水平地盤反力定数 K 値を適用して計算を行なう方法が多くとられて来たが、 K 値採用の根拠及び地盤の挙動についてはほとんど考察されていない。そこで本研究では、地盤に及ぼす杭の影響（地盤の応力や変位）を考慮に入れて、 K 値の理論的意味を明らかにし、かつ一様な粘土地盤を対象に杭の水平支持力を土の力学的性質から推定する一計算法を示した。

2. 地盤の弾性挙動

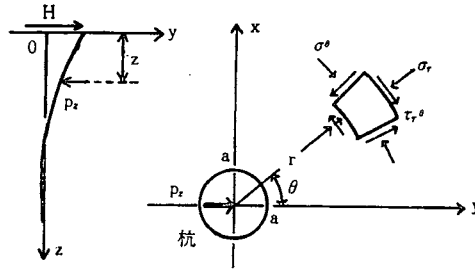
2.1 弾性応力・弾性変位

図一 1 (a) に示すように粘土地盤中に打込まれた杭頭自由杭が地表面 $z=0$ で水平力 H を受けるとき、杭は深さ z で地盤反力 p_z を受ける。次に杭と地盤とを z 軸に垂直な無限個の微小平板に仮想分割したとき、各平板間のせん断力は無視できるものと仮定すれば円柱座標 (r, θ, z) に関して

*土木工学科 **旧大学院学生（現：藤田工業）

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0$$

(1)



(a)

(b)

図-1

である。したがって深さ z にある平板上では図-1(b) に示すような応力状態にある。問題を簡単にするため図-1(b) の応力状態は平面応力状態であるとする。地盤反力 p_z は杭周辺において地盤内応力の y 方向成分を積分したものであることは明らかである。したがって逆に考えて、地盤反力 p_z に相当する荷重を杭の中心に作用させたときの地盤内応力を求めれば地盤の挙動が理解できる。

地盤及び杭の弾性係数、せん断弾性係数、ポアソン比を E, G, ν 及び E_p, G_p, ν_p 杭半径を a とすれば図-1(b) の外力条件に対し、地盤応力及び変位は、S, I, Dokos¹⁾ 及び J, Dundurs²⁾ らの求めた結果から次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= p_z \frac{(3+\nu)}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r} + p_z \alpha_0 a^2 \frac{\cos\theta}{r^3} \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_z(1-\nu)}{4\pi} \cdot \frac{\cos\theta}{r} - p_z \alpha_0 a^2 \frac{\cos\theta}{r^3} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{p_z(1-\nu)}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta}{r} - p_z \alpha_0 a^2 \frac{\sin\theta}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{p_z(3-\nu)}{8\pi G} \log \frac{r}{a} \cos\theta + \frac{p_z \alpha_0 a^2}{4G} \cdot \frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{p_z(1+\nu)}{8\pi G} \cos\theta \\ v &= \frac{p_z(3-\nu)}{8\pi G} \log \frac{r}{a} \sin\theta + \frac{p_z \alpha_0 a^2}{4G} \cdot \frac{\sin\theta}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに

$$\alpha_0 = \frac{\nu_p - \nu}{4\pi} - \frac{(1+\nu_p)^2 \cdot (G_p - G)}{4\pi [(1+\nu_p)G_p + (3-\nu_p)G]} \quad (3)'$$

ただし、 σ_r, σ_θ は圧縮応力を正とし、 u, v はそれぞれ r, θ 方向の変位成分である。

(2) 式は P_z により地盤に生じる応力をあらわしているが、実地盤では p_z が作用する以前に静止土圧として、 $\sigma_r = \sigma_\theta = K_0 r z$ が作用しているからその分をあとで(2)式に加えておけばよい。ただし、垂直応力は、 p_z 作用のいかんにかかわらず $\sigma_z = r z$ であらわされるものと仮定する。ここに K_0 は静止土圧係数、 r は土の単位体積重量である。

一般に使用される鋼管杭の弾性係数は 2100000 kg/cm^2 、コンクリートパイルで 200000 kg/cm^2 であり、相当固い粘土地盤の弾性係数が高々 500 kg/cm^2 程であるから、 $E/E_p \approx 0, G/G_p \approx 0$ である。また対象とする粘土地盤を非圧縮性と仮定して、 $\nu = 0.5$ とすると、上述の静止土圧をも考えに入れて、(1)、(2)式より地盤応力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_z}{8\pi} \left(\frac{7}{r} - \frac{3a^2}{r^3} \right) \cos\theta + K_0 r_z z \\ \sigma_\theta &= \frac{p_z}{8\pi} \left(\frac{3a^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \cos\theta + K_0 r_z z \\ \tau_{r\theta} &= \frac{p_z}{8\pi} \left(\frac{3a^2}{r^3} - \frac{1}{r} \right) \sin\theta \\ \sigma_z &= r_z z \\ \tau_{rz} &= \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) 式から解るように、 σ_r 、 σ_θ は $\theta = 0, \pi$ で主応力となり、特に $K_0 r_z z$ の小さい浅い地盤では $\theta = \pi$ の杭背面付近に引張応力が生じるが、粘土はある程度の引張強度を持つから杭背面に引張破壊は生じないものとする。また $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ で $\tau_{r\theta}$ が最大せん断応力になることもわかる。

2.2 地盤の弾性定数と K 値

(3) 式で与えられる変位 u, v は $r = \infty$ で $u = v = 0$ となるべき条件を満足していないが、杭周辺の土については (3) 式を適用し、これにより杭の水平変位 y を求めてみる。図-2 に示すように、杭と土の境界 $r = a$ 上での変位 u_a, v_a から杭の水平変位 y は次式で与えられる。

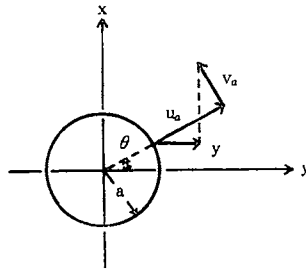


図-2 杭の水平変位

$$y = u_a \cos\theta - v_a \sin\theta = \frac{(1+\nu)}{16\pi G} p_z = \frac{(1+\nu)^2}{8\pi E} p_z \quad (5)$$

あるいは

$$p_z = Ky \quad \text{ただし} \quad K = \frac{8\pi E}{(1+\nu)^2} \quad (6)$$

ここに K は Y. L. Chang³⁹⁾ の方法における Modulus of Elasticity of Soils (いわゆる K 値) に相当するもので、これにより K 値の理論的根拠が明らかにされた。また (6) 式は、粘性土中の杭の横抵抗に関する Modulus of Elasticity of Soils が杭幅に関係なく土の性質のみによるという K. Terzaghi の提案⁴¹⁾ と一致する。

以上、地盤が弾性挙動を示すときの深さ z における地盤応力、変位及び地盤反力と杭の水平変位との関係や K 値の理論的な意味づけがなされたが、地盤反力 p_z が z 方向にどのような分布するかを決定するには、後に述べる杭の弾性方程式を解かなければならない。

3. 地盤の塑性化

3.1 地盤反力と塑性領域

杭の水平変位の増加に伴い、やがて地盤の一部に破壊が生じ塑性域が拡大する。このときの塑性域

の拡大進行の様子と杭の水平変位，地盤反力との関係を求めてみる。

地盤の破壊は $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ によって生じると考え，地盤の破壊基準には Mohr-Coulomb 破壊基準

$$\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{r\theta}^2 = C_u^2 \tag{7}$$

を適用し (4) 式の応力を代入することにより弾塑性境界を仮定する。ここに C_u は粘土の非排水強度である。その結果塑性領域または弾塑性境界の位置を与える r を R に置きかえて次式が得られる。

$$X^3 + a_1 X^2 + a_2 X + a_3 = 0 \tag{8}$$

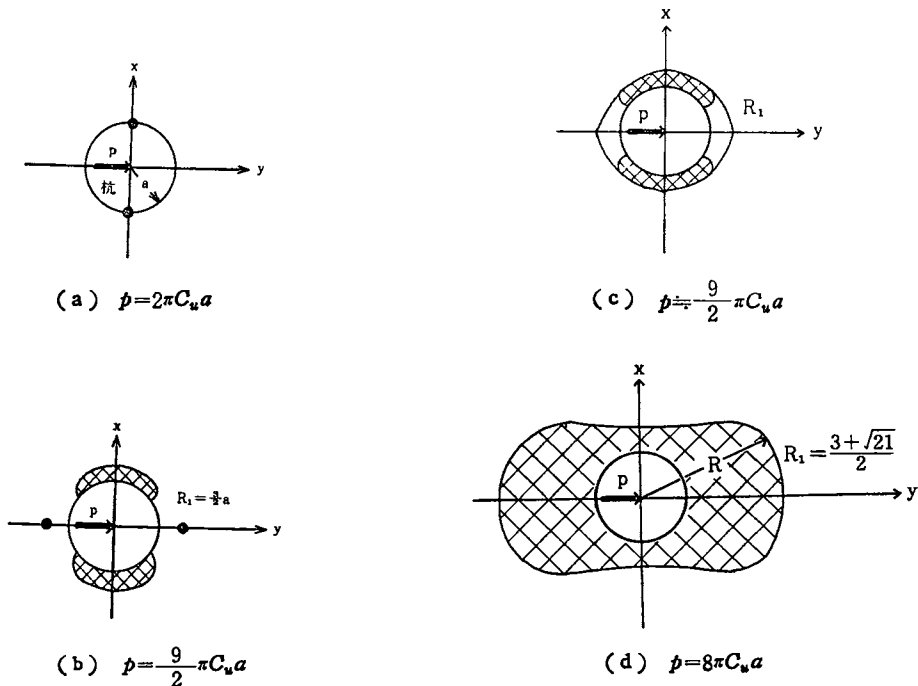
ただし $X=R^2$ $a_1 = -\frac{P_z^2}{64\pi^2 C_u^2} (16\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$$a_2 = \frac{a^2 P_z^2}{32\pi^2 C_u^2} (12\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)$$

$$a_3 = -\frac{9a^4 p_z^2}{64\pi^2 C_u^2}$$

(8) 式を解いて地盤反力 p_z と塑性領域との関係が得られる (図-3)。図 (a) に示すよう最初に降伏するのは最大せん断応力を受ける $R=a, \theta = -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ の点である。このときの地盤反力は (8) 式とより $p_z = 2\pi C_u a$ である。さらに地盤反力が増すと図 (b) に示すよう $\theta = 0, \pi$ 上に破壊点が生じるそのときの地盤反力及び破壊点の位置はそれぞれ $p_z = \frac{9}{2}\pi C_u a, R = \frac{3}{2}a$ となる。さらにわずかの地盤反力増加により図 (c) のように一部弾性域を囲んで塑性域が連続し，ついに図 (d) のようになる。このときの地盤反力及び $\theta = 0, \pi$ 上の弾塑性境界の位置はそれぞれ $p_z = 8\pi C_u a, R = \frac{3+\sqrt{21}}{2}a = 3.79a$ となる。

図-3 塑性化の進行



(c) 図の弾塑性境界は楕円に近いが，図 (d) のそれは次式で近似できる。

$$R^2 = (R_1^2 - R_2^2) \cos^2 \theta + R_2^2 \quad \text{ただし} \quad R_1 = R_{\theta=0}, \quad R_2 = R_{\theta=\pi/2} \quad (9)$$

このようにして地盤の塑性領域進行過程を調べた結果，地盤反力が $8\pi C_u a$ 以上になると塑性域は急速に拡大すると考えられるので，今後は図 (d) の状態を粘土地盤における塑性化の極限状態と仮定する。この極限地盤反力 $8\pi C_u a$ は Broms⁵⁾ が仮定した値 $18 C_u a$ よりやや大きいがほぼ妥当な値であると考えられる。

3.2 地盤反力と塑性変位

地盤の塑性域内応力の一般解はこれを得ることはできず，数値解法には頼ったので，地盤に塑性域が生じたときの杭の水平変位の一般解を塑性応力から求めることはできない。そこで地盤が塑性化しているときの杭の水平変位を前節の R_1 を用いて求めることにする。

図-4に示すように，最初図 (a) の状態にあった $\theta=0$ 上の土の要素 $abcd$ は杭の水平変位 0 により図 (b) の $a'b'c'd'$ に変形し，せん断ひずみ $\bar{\gamma}$ を受ける。このとき考えている要素は $\theta=y$ 上にあるから弾性論から類推して $\epsilon_v=0$ である。土要素 $abcd, a'b'c'd'$ 間には土の体積変化を考えると幾何学的に次の関係式が成立する⁶⁾。

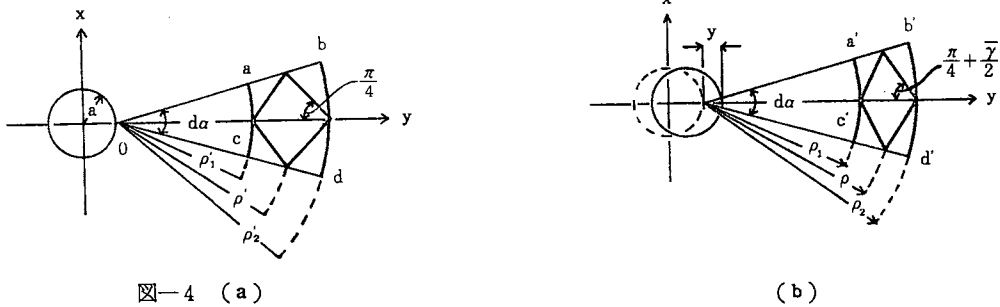


図-4 (a)

(b)

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= V_1' + V_0 + \Delta V_{\rho_1} \\ V_2 &= V_2' + V_0 + \Delta V_{\rho_2} \\ V &= V' + V_0 + \Delta V \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし

$$\begin{aligned} V V_1 &= \frac{1}{2} \rho_1^2 d\alpha & V_2 &= \frac{1}{2} \rho_2^2 d\alpha & V_0 &= \frac{1}{2} y^2 d\alpha \\ V_1' &= \frac{1}{2} \rho_1'^2 d\alpha & V_2' &= \frac{1}{2} \rho_2'^2 d\alpha & V &= \frac{1}{2} \rho^2 d\alpha \\ V' &= \frac{1}{2} \rho_1^2 & \rho_1' &= \rho' \left(1 - \frac{d\alpha}{2}\right) & \rho_2' &= \rho' \left(1 - \frac{d\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

$\Delta V_{\rho_1} = \Delta V_{\rho_2} = \Delta V =$ 土の圧縮量

これからの関係からせん断ひずみ $\bar{\gamma}$ は次式であらわされる。

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{\gamma}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{y}{\rho}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)}{2 - \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)} \quad (11)$$

次に塑性域内の弾性係数 E_R は杭中心からの距離 R の関数であると仮定し (図-5)，さらに粘土の Strees-Strain Curve を折線で代表させる (図-5) と，弾性境界では $E_R = E$ である。次に(11)

式のせん断ひずみ $\bar{\gamma}$ は E_R を用いて次式であらわされるから

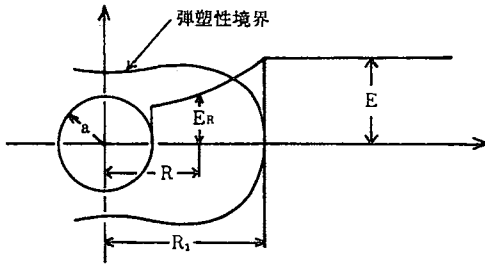


図-5 $\theta = 0$ 上の弾性係数

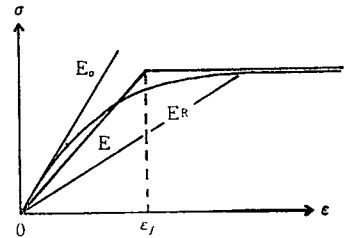


図-6 応力ひずみ曲線の近似化

$$\bar{\gamma} = \epsilon_r - \epsilon_\theta = \frac{1}{E_R} (1 + \nu) (\sigma_r - \sigma_\theta) = \frac{2(1 + \nu)C_u}{E_R} \quad (12)$$

(12) 式を (11) 式に代入し、 $\rho = R - a$ 、粘土を非圧縮性として $\nu = 0.5$ とすれば $\Delta V = 0$ であるから地盤が塑性化したときの杭の水平変位は

$$y = (R - a) \sqrt{\frac{1 + \tan\left(\frac{3C_u}{2E_R}\right)}{2 \tan\left(\frac{3C_u}{2E_R}\right)}} \quad (13)$$

となり、 $\theta = 0$ 上の弾塑性境界 $R = R_1$ では $E_R = E$ であるから (13) 式は次式になる。

$$y = (R_1 - a) / \lambda \quad \text{ただし} \quad \lambda = \frac{\sqrt{1 + \tan\left(\frac{3C_u}{2E}\right)}}{2 \tan\left(\frac{3C_u}{2E}\right)} \quad (14)$$

ところで (14) 式の y は、図-3 (c) に示したような場合、一部弾性域にある部分を塑性域とみなして計算している。そこで図-3 (d) の状態までは杭前面の土がすべて弾性状態にあるから、それまでの水平変位は弾性変位であると考え、図-3 (b) の状態で (14) 式と (6) 式は一致しなければならないから、(14) 式を次のように変形表示する。

$$y = (R_1 - \frac{3}{2}a) / \lambda + \frac{81}{64} \frac{C_u}{E} a \quad (15)$$

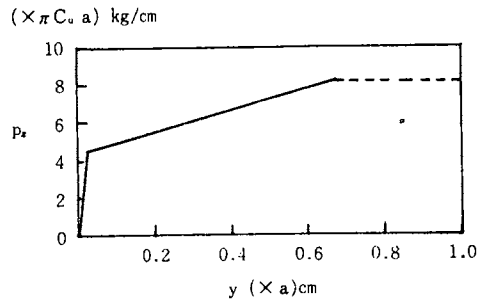
また R_1 と地盤反力 p_z は近似的に直線関係にあり 3.1 節より $p_z = \frac{9}{2} \pi C_u a$ で $R_1 = \frac{3}{2} a$ 、

$p_z = 8 \pi C_u a$ で $R_1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} a$ であるから

$$R_1 = \frac{\sqrt{21}}{7\pi C_u} p_z + \left(\frac{3}{2} - \frac{9\sqrt{21}}{14}\right) a \quad (16)$$

とあらわされる。したがって (16) 式を (15) 式に代入すれば、杭前面に塑性域が生じたときの水平変位と地盤反力の関係が得られる。

(5), (15), (16) 式から、地盤反力と杭の水平変位との関係は地盤の弾性係数と非排水強度を用いて次のようにあらわされる。(図-7 参照)



図一七 地盤反力と杭の水平変位

$$\text{弾性状態} \quad \left(0 \leq p_z \leq \frac{9}{2} \pi C_u a\right) \quad p_z = Ky \quad (17)$$

$$\text{塑性状態} \quad \left(\frac{9}{2} \pi C_u a \leq p_z \leq 8 \pi C_u a\right) \quad p_{fz} = K_f \cdot y + p_0 \quad (18)$$

$$\text{ただし} \quad K = \frac{8 \pi E}{(1 + \nu)^2}; \quad K_f = \frac{7 \pi C_u}{\sqrt{21}} \lambda; \quad p_0 = \left(4.5 - 1.933 \lambda \cdot \frac{C_u}{E}\right) \pi C_u a$$

3.3 塑性応力

3.1節で求めた塑性域内の塑性応力の一般解を得ることは困難であるから、ここでは特性帯理論による数値解析を行なった。つまり、地盤の破壊基準と応力のつり合い条件式とから得られる連立微分方程式より特性連立微分方程式を導き、物理面の特性曲線がすべり線となる双曲線型偏微分方程式を得る。この偏微分方程式に3.1節で求めた弾塑性境界の位置とそこでの応力を与えてやれば、これは塑性応力を求めるCauchyの問題となり、数値解析によりすべり線の形状及びすべり線に沿った塑性応力が求まる。これらの結果については5節で述べる。

4. 杭の弾性方程式

4.1 弾塑性解

本節では、これまで導いて来た結果を用いた杭の弾性方程式の解法を説明する。

いま杭頭自由杭が地表面で水平力 H を受けるとき、粘土地盤の非排水強度 C_u は地盤の深さに関係なく一定と仮定すると、 H の増大に伴い地表面に塑性域が生じ、深さ方向に伝播してゆくと考えられる。その様子を図一8に示す。図(a)は最大地盤反力が $2 \pi C_u a$ で地盤はすべて弾性的挙動をすると考えられる限界状態。(b)図は3.2節で仮定したように地盤が変位に対しては弾性的挙動をする限界状態。(c)図は塑性域が深さ L まで伝播した状態。(d)図は最大地盤反力が $8 \pi C_u a$ となり、そのときの塑性域深さが L_0 の極限状態をそれぞれ示す。したがっていま(c)図を対象にした場合、杭の弾性方程式は地盤に塑性域が生じている部分とそうでない弾性域ばかりの部分の2層に分けて解くことができる⁷⁾⁸⁾。勝見らの研究によれば、砂地盤について実験的に求めた地盤反力分布は、塑性域内では地表面から深さ方向に増大する⁹⁾これに対し、本節では粘土地盤の非排水強度を深さに関係なく一定としているので地盤反力は地表面で最大となる。玉置ら⁹⁾の粘土地盤における土中応力分布実測例は、これを裏づけている。

さて杭の弾性方程式は図一8を参考に塑性域では

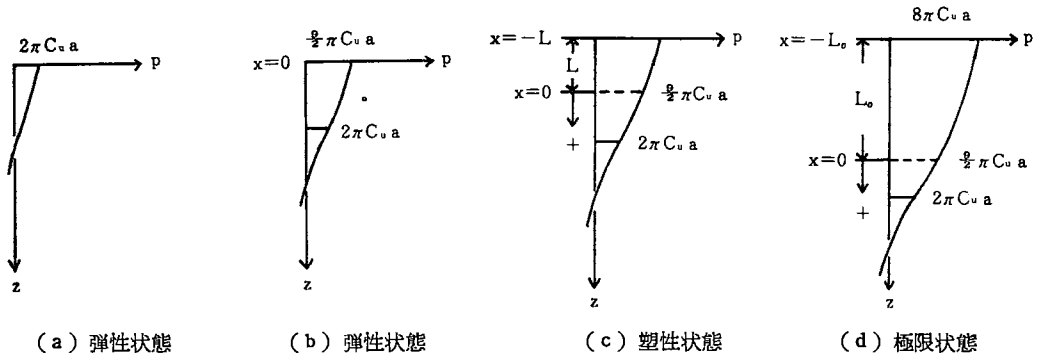


図-8 地盤反力分布

$$E_p I \frac{d^4 y_1}{dx^4} + p_{fz} = 0 : (L \leq x < 0 ; \frac{9}{2} \pi C_u a \leq p_{fz} \leq 8 \pi C_u a) \quad (19)$$

弾性域では、

$$E_p I \frac{d^4 y_2}{dx^4} + p_z = 0 : (0 \leq x, 0 \leq p_z \leq \frac{9}{2} \pi C_u a) \quad (20)$$

ただし $E_p I$ は杭の曲げ剛性、 p_{fz} 、 p_z は (17)、(18) 式で与えられる地盤反力であり、深さ方向の座標は z のかわりに弾塑性境界 $z=L$ を基準に x を用いる。杭の根入れ長を無限大と仮定すれば、(19)、(20) 式の一般解はそれぞれ

$$y_1 = e^{-\beta_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + a^{\beta_1 x} (C_3 \cos \beta_1 x + C_4 \sin \beta_1 x) + A \quad (21)$$

$$y_2 = a^{-\beta_0 x} (C_5 \cos \beta_0 x + C_6 \sin \beta_0 x) \quad (22)$$

ただし $\beta_1 = \sqrt[4]{\frac{K_f}{4 E E_p I}} = \left[0.382 \lambda \frac{\pi C_u}{E_p I} \right]^{1/4}$

$$\beta_0 = \sqrt[4]{\frac{K}{4 E_p I}} = \left[0.889 \frac{\pi E}{E_p I} \right]^{1/4}$$

となり、突出長のない杭頭自由杭では杭のたわみ、たわみ角、曲げモーメント、せん断力、地盤反力に関する境界条件は、

$$x = 0 : y_1 = y_2, y_1' = y_2', y_1'' = y_2'', y_1''' = y_2''', y_1'''' = y_2'''' \quad (23)$$

$$x = -L : E_p I y_1''' = H \quad (24)$$

となる。(23)、(24) を満足する積分定数 A, C_1, \dots, C_6 は次式で与えられる。

$$A = -\frac{p_0}{K_f}$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{A}{\Delta} \left[n^3 (n^2 - 1) (n^2 - 2n + 1) e^{-\beta_1 L} \cos \beta_1 L - 2n^5 (n^2 - 1) e^{-\beta_1 L} \sin \beta_1 L - n^3 (n + 1)^2 \right. \\ &\quad \left. (n^2 + 1) e^{\beta_1 L} \cos \beta_1 L \right] \\ C_2 &= -\frac{A n^3}{\Delta} \left[2(n^2 - 1) e^{-\beta_1 L} \cos \beta_1 L + (n^2 - 1) (n + 1)^2 e^{-\beta_1 L} \sin \beta_1 L - (n^2 + 1) (n + 1)^2 \right. \\ &\quad \left. e^{\beta_1 L} \sin \beta_1 L \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 &= -\frac{An^3}{d} [(n-1)^2(n^2+1)e^{-\beta_1 L} \cos \beta_1 L - (n+1)^2(n^2-1)e^{\beta_1 L} \cos \beta_1 L - 2n^2(n^2-1) \\
 &\quad e^{\beta_1 L} \sin \beta_1 L] \\
 C_4 &= -\frac{An^3}{d} [(n-1)^2(n^2+1)e^{-\beta_1 L} \sin \beta_1 L + 2(n^2-1)e^{\beta_1 L} \cos \beta_1 L - (n^2-1)(n- \\
 &\quad 1)^2 e^{\beta_1 L} \sin \beta_1 L] \\
 C_5 &= \frac{2An}{d} [(n-1)^2 e^{-\beta_1 L} \cos \beta_1 L - (n^2-1)e^{-\beta_1 L} \sin \beta_1 L - (n+1)^2 e^{\beta_1 L} \cos \beta_1 L - (n^2- \\
 &\quad 1)e^{\beta_1 L} \sin \beta_1 L] \\
 C_6 &= -\frac{2An}{d} [(n^2-1)e^{-\beta_1 L} \cos \beta_1 L + (n-1)(2n^2+n+1)e^{-\beta_1 L} \sin \beta_1 L - (n^2-1) \\
 &\quad e^{\beta_1 L} \cos \beta_1 L - (n+1)(2n^2-n+1)e^{\beta_1 L} \sin \beta_1 L] \\
 \text{ただし } d &= 2n(n^4-1)[- (n-1)^2 e^{\beta_1 L} \cos \beta_1 L + (n^2-1)e^{-\beta_1 L} \sin \beta_1 L + (n+1)^2 e^{\beta_1 L} \cos \beta_1 \\
 &\quad L + (n^2-1)e^{\beta_1 L} \sin \beta_1 L] \\
 n &= \frac{\beta_0}{\beta_1} = 1.235 \left(\frac{E}{\lambda C_u} \right)^{1/4}
 \end{aligned} \tag{25}$$

(25) 式の $A, C_1 \sim C_6$ はすべて塑性域の及ぶ深さ L であらわされており、図-8 から、 $L=0$ で弾性状態、 $L=L_0$ で極限状態にあるときの各係数を与える。(21), (22) 式を微分すれば杭のたわみ、曲げモーメント、地盤反力分布、はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 \text{塑性域 } (-L \leq x < 0) \quad y_1 &= A + e^{-\beta_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + e^{\beta_1 x} (C_3 \cos \beta_1 x + C_4 \sin \beta_1 x) \\
 M_1 &= -E_p I \beta_1^2 [e^{-\beta_1 x} (C_1 \sin \beta_1 x - C_2 \cos \beta_1 x) + e^{\beta_1 x} (C_3 \cos \beta_1 x - C_4 \sin \beta_1 x)] \\
 p_{1z} &= 4 E_p I \beta_1^4 [e^{-\beta_1 x} (C_1 \cos \beta_1 x + C_1 \sin \beta_1 x) + e^{\beta_1 x} (C_3 \cos \beta_1 x + C_4 \sin \beta_1 x)]
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 \text{弾性域 } (x \geq 0) \quad y_2 &= e^{-\beta_0 x} (C_5 \cos \beta_0 x + C_6 \sin \beta_0 x) \\
 M_2 &= 2 E_p I \beta_0^2 e^{-\beta_0 x} (C_5 \cos \beta_0 x - C_6 \sin \beta_0 x) \\
 p_{2z} &= 4 E_p I \beta_0^4 e^{-\beta_0 x} (C_5 \cos \beta_0 x + C_6 \sin \beta_0 x)
 \end{aligned} \tag{27}$$

となる。

4.2 杭と荷重と杭頭変位

杭の水平抵抗の問題で実用上最も重要なことは、水平支持力とそのときの水平変位であろう。一般構造物杭基礎では、設計に際し許容杭頭水平変位が規定され、それに対応した杭頭荷重を水平支持力と定義することがあるが、ここでは次の二つの水平支持力の定義をする。すなわち、最大地盤反力の生じる地表面で地盤反力が $2\pi C_u a$ となったとき (図-8 (a)) の杭頭荷重を弾性支持力 H_e 、 $8\pi C_u a$ となったとき (図-8 (b)) の杭頭荷重を極限支持力 H_u と定義する。このとき (25), (26), (27) 式から H_e, H_u はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 H_e &= 1.215 N_c \left(\frac{C_u}{E} \right)^{1/4} \\
 H_u &= 7.12 N_c \left(\frac{C_u}{E} \right)^{0.119} \quad \text{ただし, } N_c = 2a(E_p I C_u^3)^{1/4}
 \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

また、 H_e, H_u に対する杭頭変位はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_e &= 0.546 H_c / (\pi^3 E^3 E_p I)^{1/4} \\ \delta_u &= 2 \alpha \left(1.145 \frac{1}{\lambda} + 0.633 \frac{C_u}{E} \right) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ただし (28) 式の H_u は、計算過程で E/C_u の複雑な関数を E/C_u 指数関数に近似している。また (28) で N_c の値は杭の曲げ剛性、粘土地盤の非排水強度が大きくなれば大きくなるので、一種の水平抵抗に関する杭の支持力係数と考えられる。こうして、杭の水平支持力は粘土地盤の非排水強度、弾性係数および杭の曲げ剛性の関数で与えられることが明らかになった。

4.3 有限長の杭への適用

4.1, 4.2 節では杭の根入れを無限大と仮定しているが、実際の杭は有限長であるからこの仮定が成立するに必要な杭の根入れ長を求めてみる。Chang の方法では根入れ長 $l > \frac{\pi}{\beta}$ ならば、また篠原、久保らの実験¹⁰⁾では曲げモーメントの第1零点の深さの1.5倍以上あれば杭を無限長とみなしてよいとしている。ここでは篠原・久保らの得た値が、杭の第2不動点深さに対応することから、第2不動点の深さをもって、杭を無根長とみなし得るに必要な根入れ長と考えた。その結果、必要根入れ長 l は近似的に次式で与えられる。

$$l = \left(\frac{E_p I}{\pi C_u} \right)^{1/4} \left[\lambda^{-1/4} \left(\frac{E}{C_u} \right)^{0.532} + 0.744 \left(\frac{E}{C_u} \right)^{-0.415} + 1.03 \pi \left(\frac{E}{C_u} \right)^{-0.25} \right] \quad (30)$$

特に中空でないコンクリートパイルで杭径を D とすると

$$\frac{l}{D} = 0.354 \left(\frac{E_p}{C_u} \right)^{1/4} \left[\lambda^{-1/4} \left(\frac{E}{C_u} \right)^{0.532} + 0.144 \left(\frac{E}{C_u} \right)^{-0.415} + 1.03 \pi \left(\frac{E}{C_u} \right)^{-0.25} \right] \quad (31)$$

となる。(31) 式の結果を図-9に示す。図より l/D が40以上あれば大抵の場合、杭は無限長であるとみなせることがわかる。

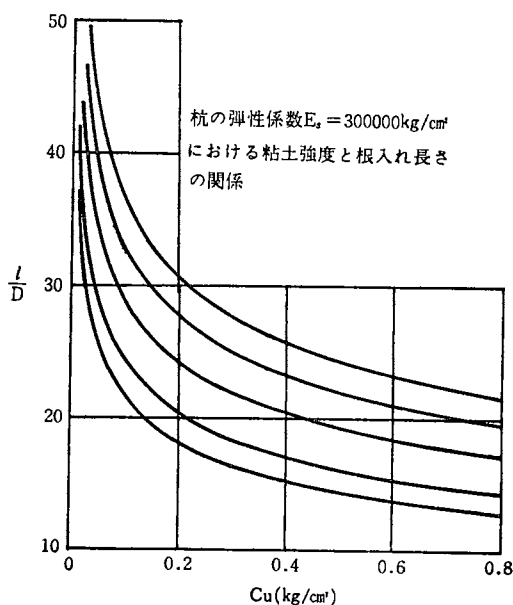


図-9

5. 計 算 例

以上述べて来た理論の一計算として、杭径 30 cm，肉厚 3.2 mm，曲げ剛性 $E_p I = 6.9 \times 10^8 \text{ kg-cm}^2$ の鋼管杭が比較的柔らかい $C_u = 0.08 \text{ kg/cm}^2$ の粘土地盤に打ち込まれた場合を想定する。粘土地盤の E/C_u は実測例からおおよそ 20~500 範囲にあることが解っているので、この範囲で計算を行なうことにする。このほかに $C_u = 0.1, 0.2, 0.4 \text{ kg/cm}^2$ の固い粘土に至るまで計算を行なっているが紙面の都合上省略する。

図-10 は、杭頭荷重 H と杭頭変位 δ の関係を示したものであるが、図中の白丸，三角，黒丸はそれぞれ杭に沿った地盤反力分布が図-8 の (a)，(b)，(d) に対応していることを意味している。つまり白丸は地盤が完全に弾性体として挙動する限界を，三角は杭のたわみと地盤反力とが直線関係にある限界を，黒丸は極限状態をあらわしている。これより地盤が完全に弾性的挙動を示す範囲は非常に小さいことがわかる。また弾性係数が大きい程小さい杭頭変位で極限状態に至る。一般に $C_u = 0.08 \sim 0.4 \text{ kg/cm}^2$ ， $E/C_u = 20 \sim 500$ に対して弾性状態 (図-8 (a)) では杭頭変位 $\delta_e = 0.4 \sim 9 \text{ mm}$ ，杭頭荷重 $H_e = 1.0 \sim 4.4 \text{ ton}$ である。また極限状態 (図-8 (a)) では杭頭変位 $\delta_u = 27 \sim 138 \text{ mm}$ ，杭頭荷重 $H_u = 4.4 \sim 20 \text{ ton}$ くらいである。

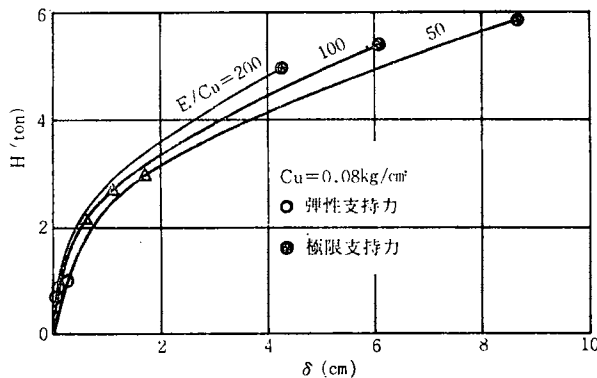


図-10 杭頭荷重—杭頭変位

図-11 は地盤反力分布が図-8 の (a)，(b)，(d) に対応した状態にあるときのたわみ曲げモーメント

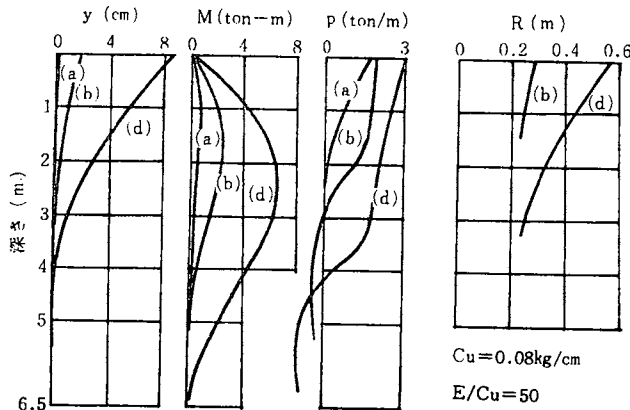


図-11 たわみ，曲げモーメント，地盤反力，塑性域の広がり

ント M , 地盤反力 p , 塑性域の広がり R_1 を示したもので、それぞれ (a), (b), (d) の記号であらわす。杭頭荷重の増加に伴い最大曲げモーメント深さ、塑性域深さは大きくなって行く。また地盤の弾性係数が大きくなると、杭の曲げモーメントやたわみは小さくなる。

図-12は図-11において、極限状態にあるときの $\theta = 0, \pi/4, \pi$ 上の地盤内応力分布及び塑性域すべり線について示したものである。地表面では杭の背面におよそ $3C_u$ に相当する引張応力が生じていて、この引張応力はある程度の深さまで存在する。実際の粘土地盤では多少の引張強度があると言えども $3C_u$ もの引張応力が生じるのは不合理であるが、杭と地盤が完全に結合されているという仮定上生じたものである。

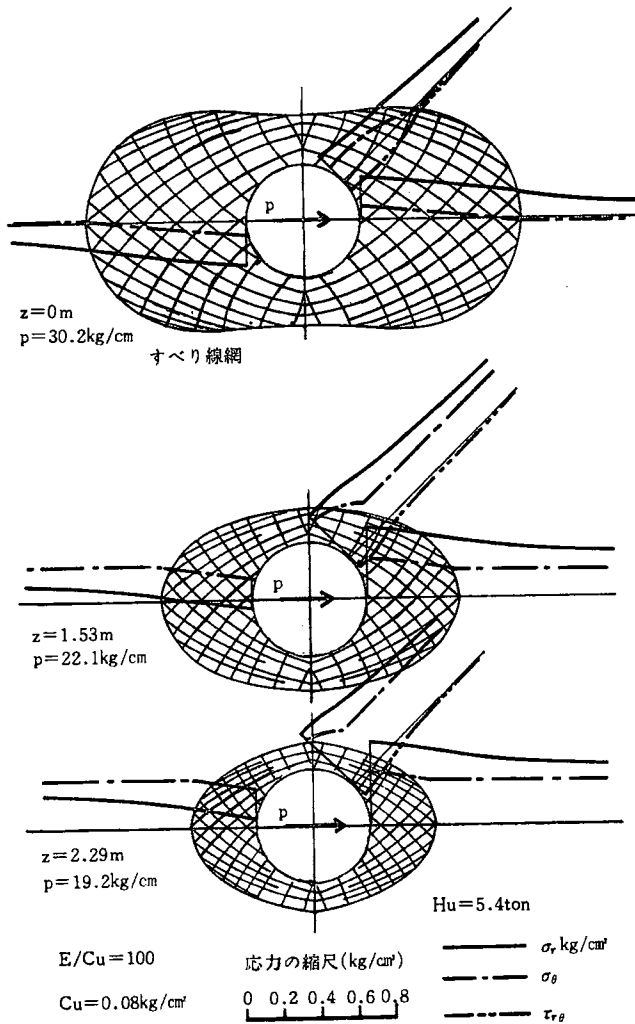


図-12 すべり線網

6. 結 語

結語として、本研究の問題点を指摘すると、1. 水平力を受ける杭による地盤応力及び地盤の破壊を2次元的にとらえており、 σ_z が地盤の破壊形式に及ぼす影響が考慮されていない。2. 地表面付近では

杭背面に過大な引張応力を生じる。以上の問題点を残したにせよ、本研究は杭の水平抵抗解析の本質に一步迫るものと思う。

なお、この研究には大学院学生の山本善行君に助力を得た事を付記し謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) S. J. Dokos, "A Force Applied in the Median Plane at the Center of a Circular Insert in a Plate," Jour. Appl. Mech. Vol. 16 No. 4 Dec. 1949.
- 2) J. Dundurs, "Concentrated Force in an Elastically Embedded Disk," Trans. A. S. M. E. Dec. 1963.
- 3) Y. L. Chang, "Discussion on Lateral Pile-Loading Tests by Feagin," Trans. A. S. C. E. 1937.
- 4) K. Terzaghi, "Evaluation of Coefficient of Subgrade Reaction," Géotechnique, Dec. 1955.
- 5) Broms, B. B, "Design of Laterally Loaded Piles," Proc. A. S. C. E. 1965.
- 6) B. Ladanyi, "Etude Theorique et Experimentale de L'expansion dans un Sol Pulverulent D'une Cavite Presentant une Symetrie Spherique ou Cylindrique," Annales des Travaux Publics de Belgique No. 2-4 1961.
- 7) M. R. Madhav, H. S. V. Kameswara Rao and K. Madhavan, "Laterally Loaded Pile in Elasto-plastic Soil," Soils and Foundations, Vol. 11., June 1971. No. 2.
- 8) 勝見 雅, "杭基礎の水平抵抗並びに鉛直支持力に関する研究" 京都大学(工学部) 学位論文 昭和47年6月。
- 9) 玉置 脩, 三橋晃司, 内山成和, 今井常雄, "水平力を受けるクイによる土中応力分布の測定" 第7回土質工学研究発表会講演集 1972年6月。
- 10) 篠原登美雄, 久保浩一, "杭の横抵抗に関する実験的研究(その1) — 垂直自由端杭の横抵抗 —" 運輸省技術研究所報告 Vol. 11, No. 6. 1961. 7月。

(昭和48年10月8日受理)