

分岐噴流の方向制御のための側壁の効果（第1部）

著者	岸岡 英太郎
雑誌名	金沢大学工学部紀要 = Memoirs of the Faculty of Technology Kanazawa University
巻号	8
ページ	1
発行年	73-81
URL	1974-03-25
	http://hdl.handle.net/2297/25225

分岐噴流の方向制御のための側壁の効果

(第 1 部)

岸岡英太郎*

Effect of the Side Wall to Govern the Direction of the Branch Jet Part 1

by

Eitaro KISHIOKA

Abstract

The deviation of the branch jet that results from impingement of a jet on the edge of the impulse blade has hitherto been looked over as anyhow helpless. The author holds an idea of suppressing it by use of a side-wall bordering the jet.

The present paper is devoted to theoretical prediction focussed upon the effect of the fore-mentioned side-wall. Part 1 exclusively deals with the case that the jet impinges on the edge of the blade confronted perpendicularly with the former, and Part 2 that is to be published in the next issue of this bulletin will contain more general cases.

The reasoning of the side-wall is clarified in Section 3 by the comparison between the case that it is of infinite length as treated in Section 2 and the case that it is absent as was analysed in the previous paper¹⁾.

Dependence of the suppressed deviation upon length of the side-wall is evaluated in Section 4. It leads to the conclusion that the side-wall of a moderate length is enough effective to restriction of the deviation.

1. 緒 言

衝動羽根に噴流が当たるとき、分岐噴流が羽根前縁で転向することは前論文¹⁾で詳細に述べた。この転向がタービン効率の低下の一要因として有害であるが、著者自身すら対策がないと考えていた²⁾。しかし、同論文に発表した解析の結果、自由噴流は羽根に接近する過程で相当にずれることが量的に証明されたから、この予備的ずれを抑制するならば衝突噴流の転向を抑制できるのではないかと思考される。分岐噴流の転向角を完全に0に抑えた理想の場合は、前論文でその特殊例を扱った問題——自由噴流をそれと同心のオリフィスに当たったときの貫通流で表わされる (Fig. 1 a)。中心線の右側半分は中心線に置かれた仮想の無限長さの壁に接していると考えてもよく、右側半分の分岐噴流の転向角がこの壁によって完全抑止されていると見ることができるからである。本論文の目的は、この流れと前

*機械工学第二学科

回1) 論じた自由な分岐流の場合を比較して、転向角抑制に関する壁の役割を具体的に解明し、つぎに上記の無限長の壁を有限長にした場合 (Fig. 1b) に、転向角をどれほど抑制できるかについて理論的推計を行なおうとするにある。実際に転向角の大きくなるのは噴流全流量を1として羽根面を流れる部分の占める割合 (これを分割比 μ で表わす) の大きいときであるから、解析はこの場合に重点を置く。また、Fig. 1b の羽根角 α も比較的小さい値 (25°前後) が実用上重要であるが、任意の α における解析は楕円積分を含むやや複雑なものになる。これは次回の後編で扱うこととして、まず予備的な研究として特に解析の容易な $\alpha = \pi/2$ の場合について考察する。

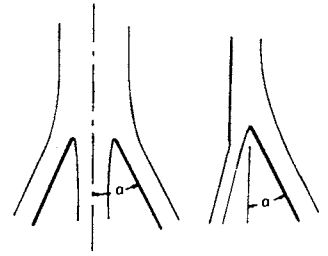


Fig. 1a Fig. 1b

2. 分岐噴流の転向角を完全に抑止した場合の解析

前記のように、噴流をオリフィスに当ててその貫通流の縮流係数を求めるため、Fig. 2a を考える。前回1) 述べた著者の解析法によれば同論文の式 (6・7) によって Fig. 1a の z と Fig. 1b の t の関係は次式により与えられる。

$$z = \frac{1}{\pi} \int_c^t \exp\{-\pi i - k i \int_c^t (t-c)/\varphi(t) dt\} \{1/(t-b) - \mu/(t-a) - (1-\mu)/(t-d)\} dt$$

ただし、 $\varphi = \sqrt{|(t-a)(t-b)(t-d)(t-e)|}$ (2・1)

ここで、 a, b, c, d, e はそれぞれ t 面上の点 A, I_1, O, I_2, A' における t の値を表わす。

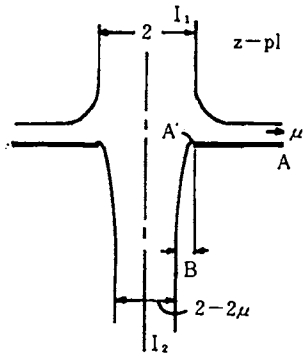


Fig. 2a

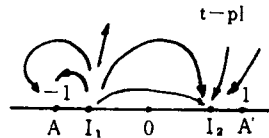


Fig. 2b

Fig. 2a の場合には Fig. 1b の $\alpha = \pi/2$ であるから、Fig. 2b の t 面は原点 0 につき対称である。すなわち

$$a = -1, e = 1, c = 0, b = -d \tag{2・2a}$$

さらに前論文1) の式 (6・3d) によって

$$\mu(-d+1) - (1-\mu)(2d) = 0$$

から $d = -b = \mu/(2-\mu)$ (2・2b)

また (2・1) 式中の k は既に述べた1) 方法で算出されるが、実はこれが常に1となることが証明できる。その結果 (2・2a), (2・2b) および $k=1$ を式 (2・1) に代入して Fig. 2a の長さ B を求

める式は付録 1 の計算を経て

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_1^{2-\mu} \frac{2-\mu}{\sqrt{2-2\mu}} \sqrt{t^2 - \mu^2 / (2-\mu)^2} \left\{ \frac{1}{t+\mu/(2-\mu)} - \frac{\mu}{t+1} - \frac{1-\mu}{t-\mu/(2-\mu)} \right\} dt \quad (2.3)$$

本式で $t - \mu/(2-\mu) = u$ とおけば

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^{(2-2\mu)/(2-\mu)} \frac{2-\mu}{\sqrt{2-2\mu}} \sqrt{u\{u+2\mu/(2-\mu)\}} \left\{ \frac{-1}{u+2\mu/(2-\mu)} + \frac{\mu}{u+2/(2-\mu)} + \frac{1-\mu}{u} \right\} du \quad (2.3a)$$

この計算は一形式の積分形

$$I = \int \sqrt{u(u+m)} / (u+n) du \quad (2.4)$$

に統一される。しかも初等積分可能である（付録 2 参照）途中は少し複雑であるが、最後は簡単化されて

$$B = (\mu/\pi) \ln(2-\mu) / \mu \quad (2.5)$$

縮流係数を C_c とすれば

$$C_c = \frac{1-\mu}{(1-\mu)+B} = (1-\mu)\pi / \{(1-\mu)\pi + \ln(2-\mu)/\mu\} \quad (2.6)$$

本式によって C_c 対 μ の関係は Fig. 3 に示すように、 μ が増大するとき単調に減少して、 $\mu = 1$ の極限ではよく知られた静圧タンクからの噴出の場合の値 $C_c = \pi/(\pi+2)$ に近づく。また、図中 $\mu = 0.5$ では (2.6) 式から $C_c = \pi/(\pi + \ln 3)$ 。これは前回 1) 記した値 0.741 に対する正確値であって、両者はほぼ一致している。

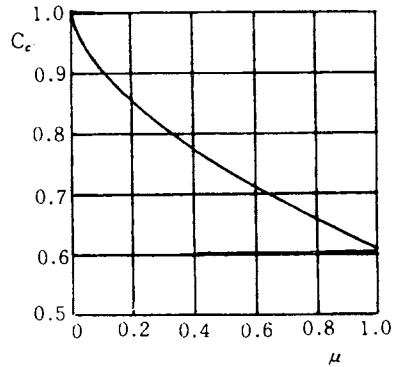


Fig. 3

3. 分岐噴流の転向角を抑制しない場合と完全に抑制した場合の比較考察

Fig. 4a は前回 1) 解析した完全自由の分岐噴流，Fig. 4b は前節 2 で扱った完全抑止の分岐噴流の一例を示している。図中の δ は、入射噴流中の分岐境界流線が羽根の尖端より右側すなわち羽根の側にあるならば正、逆方向にあれば負にとって表わした距離である。ここで二つの場合の大きな相違点はずきの (1), (2) の 2 項に分けることができる。

(1) 文献 1) の著者の式を再録すれば、

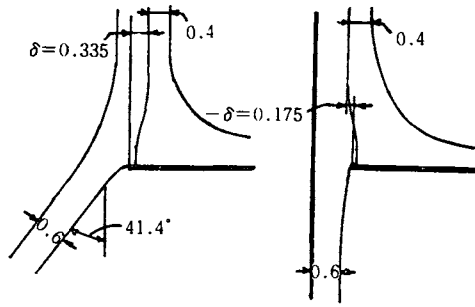


Fig. 4a

Fig. 4b

$$\begin{aligned}
 h_I = & \frac{1}{\pi} \left[\sin 2\theta_A \ln \left(2 \sin \frac{\theta_A}{2} \right) + (1-\mu) \sin(\theta_B - \theta_A) \ln \left(\frac{\sin \frac{\theta_B - \theta_A}{2}}{\cos \frac{\theta_B}{2}} \right) - (1-\mu) \right. \\
 & \left. \sin(\theta_B + \theta_A) \ln \left(\frac{\sin \frac{\theta_A + \theta_B}{2}}{\cos \frac{\theta_B}{2}} \right) - \mu \sin \theta_A \ln \left(\sin^2 \frac{\theta_A}{2} \right) \right] + 1 - (1-\mu) \cos(\theta_B - \theta_A)
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

本式によって $\theta_A = \pi/2$, 後出 (2.10) 式により求めた θ_B を代入して h_I を求め,

$$\delta = h_I - \mu \tag{2.8}$$

の関係を用いて得た δ を Fig. 5a に示す。また, 前出の (2.6) 式と

$$\delta = -(1-\mu)(1-C_e)/C_e \tag{2.9}$$

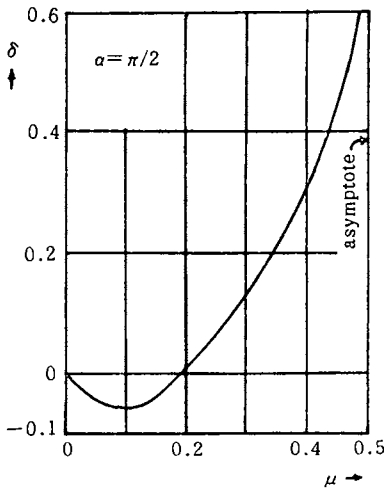


Fig. 5a

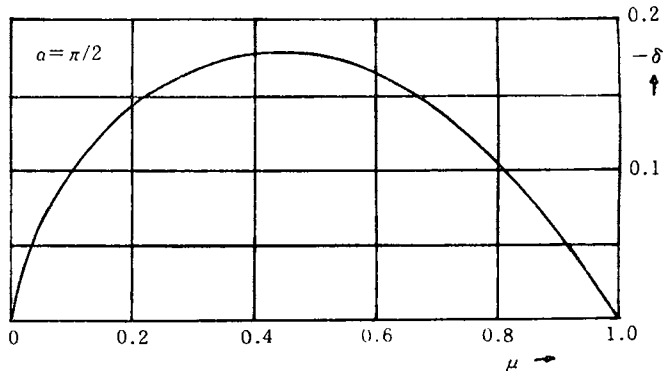


Fig. 5b

の関係を用いて得た δ を Fig. 5b に示す。これら二つの図から見て, 両方の場合が対照的に異なった様相を表わすことがわかる。分岐流を抑制しないときは δ は大きな正值まで増えるのに対して, 抑制したときは常に負である。この意味をわかりやすくするため, $\mu = 0.4$ における両者の流れを比較対照したのが上記の Fig. 4a, b である。抑制しない Fig. 4a の場合は, 噴流が羽根に近づくにつれて分岐境界流線は羽根から逃げる方向へ左偏するのに対し, 側壁のある Fig. 4b では側壁に付着してい

るから途中の羽根付近で減速する分だけ噴流全体としては左寄りに位置する。こうして、 μ を所望の値にするため噴流に対する羽根の位置を設定する仕方が両者では正反対になる。

(2)前出の式(2・7)は $\theta_B = \pi$ において ∞ となり、文献1)中の(2・7)から

$$\cos \theta_A = 2\mu - 1 \quad (2 \cdot 10)$$

これは文献1)中でも指摘したとおりであるが、本式で θ_A を与えられるときの μ は可能最大値 μ_{max} を表わすものであって、噴流に対して羽根をどんなに左方へ寄せても μ を μ_{max} 以上にすることができない。例えば、Fig. 4aの場合には $\theta_A = \pi/2$ であるから $\mu_{max} = 0.5$ 、それゆえFig. 5aには漸近線が引かれていて μ の限界を示している。それに対して、側壁があるときは $\mu = 0 \sim 1$ の全域をとることができる。そういうわけで、Fig. 4a, 4bには両者を比較可能な範囲内にある $\mu = 0.4$ の場合を示した。もし $\mu > 0.5$ のある値で比べようとしても不可能である。 $\theta_A = \pi/2$ 以外の場合を例示すれば、

$$\theta_A \leq 36.8^\circ \text{ では } \mu \leq \mu_{max} = 0.9$$

$$\theta_j \leq 26.0^\circ \text{ では } \mu \leq \mu_{max} = 0.95$$

というように、 θ_A の値によって決められる μ_{max} が厳存していて、 μ が大きくなったとき $1 - \mu_{max}$ だけの噴流が羽根尖端から逆方向に逃げ去って損失を引起こすことは不可避である。

以上、相違点について詳論したが、さらにつぎの考察をつけ加えよう。前論文でも簡単に触れたように、Fig. 5aの δ の値は μ の小さいとき負で、 μ の大きいとき正となることの意義をつぎのように理解することができる。前記のとおり μ は一定の μ_{max} を越えられないことから、 μ が大きいときはFig. 6aの説明図において、噴流が羽根の左向き移動につれて追従しようとするのに対し、 μ が小さいときはFig. 6bのように、分岐流の少量側すなわち右方へ、換言すれば羽根の方へと噴流が寄って来る。端的に言えば、噴流は分岐流の少量側へと片寄って来て、少量側を強化しようとする作用する。

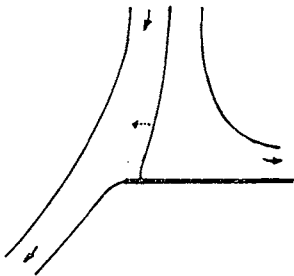


Fig. 6a

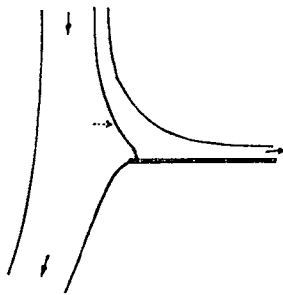


Fig. 6b

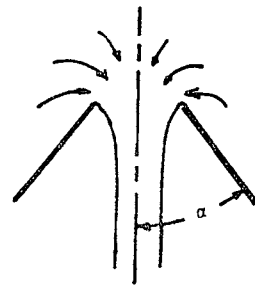


Fig. 7

つまり、噴流は分岐するとき、少量に片寄るのを好まず平均化したがるかのように行動すると言うことができる。

以上の考察から、自由噴流は分岐以前の行動が放従であることから転向角を大きくすることが明白となった。これを側壁によって抑制するにしても、前述の無限長壁は実用化できないから、最少限に短縮して用いねばならず、当然少しの転向角を許して妥協することが必要である。ところで転向角の大きくなるのは μ の大きいときで、言い換えるとその分岐噴流の流量が少ないときである。こういうときは分岐流の行動に原噴流の速度はあまり影響せず、むしろ羽根尖端付近の静圧だけで噴出すると仮定しても大過がないのではないと思われる。既にFig. 3のところで $\alpha = \pi/2$ の場合にこのことが

裏書きされている。*こうして μ が大きいときの分岐噴流の行動が静圧タンクからの噴流に物理的近似が可能となれば解析的にも手間が軽減されて思考を容易にするものと期待される。そのためには静圧タンクの出口オリフィス (Fig. 7) の縮流係数が比較の基準として有用なのであるが、従来知られているのは同図の $\alpha = 0$ の場合いわゆる Borda's mouthpiece の理論値 $C_c = 0.5$ と $\alpha = \pi/2$ のとき $C_c = \pi/(\pi+2)$ ぐらいで、これらが実験と割合によく合うこと、さらに α の変化による C_c 変化の傾向は実験的に定説が得られていること以外に、一般の α における C_c の理論値の資料に出会わない。著者は理論考察上比較基準を得るために C_c 理論値の確立を必要と考へて解析を行ない、 C_c 対 α の信頼できるぐらふを求めた (次回続編付録に発表の予定)。 C_c は α が π の有理数倍のときのみ解析的に求められるので、それらをできるだけ多数計算して連ぎ合わせる方法を探った。

4. 側壁を有限長さにしたときの分岐噴流の転向角

Fig. 8 の物理面すなわち z 面上で左側分岐流は有限長さの側壁に沿って流れ、転向角 β だけ傾いて I_2 に向う。分割比 μ のとき I_2 側の最終幅は $1-\mu$ 、 A 側のそれは μ である。これを前出 Fig. 2 のように補助面 t 面を用いて表わせば、同図に示すとおり A と A' 、 I_1 と B の2組が原点 0 について対称となることは Fig. 2 と同様であるが、ほかに μ の値に応じて BA' 間の特定の位置に来る点 I_2 が特徴である。ここで A 、 A' における t の値をそれぞれ -1 、 1 ととっても一般性は失われない。本節の解析では μ をほぼ 0.8 として β を変えたときの影響を調べる方針をとる。それにはまず $\beta = 0^\circ$ としたとき Fig. 2 と一致して t 面上の I_2 点は B と重なる。そのときの μ を μ_0 と書いて、まず $\mu_0 = 0.8$ となるように B 、 I_1 における t を決定する。前出 (2・2b) 式からそれぞれ $0.8/(2-0.8) = 2/3$ および $-2/3$ となる。つぎに β を 0 でない適当な値に移してそれに応じた I_2 における t の値と μ を決める。実は後記のとおり μ は μ_0 と極めて近いことがわかり、 β がそう大きくない限り $\mu \approx \mu_0$ の状態をたもち得ると考えてもよい。

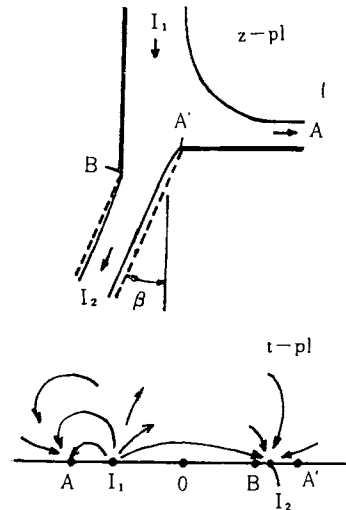


Fig. 8

さて、 z の表示式は前出 (2・1) と同形であるが、上記のように I_2 が B とはずれることに注意すればよい。 $\exp \{ \quad \}$ の内部の積分は前と同様に初等積分であって

$$z = \frac{-1}{\pi} \int_1^t \exp \left\{ \frac{\pi}{4} i - \frac{i}{2} \sin^{-1} T \right\} \left(\frac{1}{t + \mu_0 / (2 - \mu_0)} - \frac{\mu}{t + 1} - \frac{1 - \mu}{t - \mu / (2 - \mu)} \right) dt \quad (2 \cdot 11)$$

$$\text{ここで } T = \frac{(2 - \mu_0)^2}{2 - 2\mu_0} \left(t^2 - \frac{\mu_0^2 - 2\mu_0 + 2}{(2 - \mu_0)^2} \right) \quad (2 \cdot 11 a)$$

分岐流 I_2 の縁に沿って z の積分を行ない、 B と A' の位置関係を求めるのに便利なように、 z 面の軸を時計方向に β だけ回転すれば、分岐流 I_2 が虚軸の方向に一致する。このとき前式の $\exp \{ \quad \}$ 内部は βi を加えた形になる。 $\exp \{ \quad \}$ 以外の項は実であるから、積分の実部を求めるには $\exp \{ \quad \}$

*Fig. 3 において $\mu = 1$ では確かに静圧タンクと C_c の一致はあるが、 $\mu = 1$ 近傍で C_c の変化は無視できないので、あまり厳密な近似は期待できない。

の実部だけを用いればよい。そこでこの $\exp\{ \}$ の実部を R で表わしておく。

$$R = \cos\left(\beta + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin^{-1}T\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\sqrt{1 + \sqrt{1 - T^2}} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{4} + \beta\right)\sqrt{1 - \sqrt{1 - T^2}} = \sqrt{(1 - \sin 2\beta\sqrt{1 - T^2} + \cos 2\beta \cdot T)/2} \quad (2 \cdot 12)$$

$\cos()$ の内部が 0 になるとき I_2 点に相当するから、 $R = 0$ とおいて $T = -\cos 2\beta$ これより

$$t_{I_2}^2 = \frac{\mu_0^2 - 2\mu_0 + 2}{(2 - \mu_0)^2} - \cos 2\beta \frac{(2 - 2\mu_0)}{(2 - \mu_0)^2} \quad (2 \cdot 13)$$

μ を決定するには、 t 面上の A, I_1, I_2 3 点の位置関係に関する条件から

$$\mu = 1 - \frac{2 - 2\mu_0}{2 - \mu_0} \frac{1}{t_{I_1} + 1} \quad (2 \cdot 14)$$

Fig. 9 は噴流と羽根および側壁の関係を略図したもので、現在の目標は図中の X と Y を求めることである。 X は前記 R を用いてつぎの積分から求める。

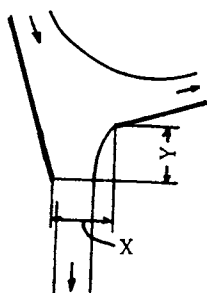


Fig. 9

$$X = \frac{1}{\pi} \int_1^{t_B} R(t) \frac{Cdt}{(t + \mu_0/(2 - \mu_0))(t + 1)(t - t_{I_1})} \quad (2 \cdot 15)$$

$$\text{ここで } C = -\mu/(1 - \mu) \cdot \{(2 - 2\mu_0)/(2 - \mu_0)\}^2, \quad t_B = \mu_0/(2 - \mu_0) \quad (2 \cdot 15a)$$

同様に、 Y を求めるには R のかわりに虚部 $I(t)$ を用いる。

$$I = \sqrt{(1 + \sin 2\beta\sqrt{1 - T^2} - \cos 2\beta \cdot T)/2} \quad (2 \cdot 16)$$

Y の式は

$$Y = \frac{1}{\pi} \int_1^{t_B} I(t) \frac{Cdt}{(t + \mu_0/(2 - \mu_0))(t + 1)(t - t_{I_1})} \quad (2 \cdot 17)$$

Y は $t = t_{I_1}$ で仮性積分となるのが計算上の難点であるが*、これはその近傍だけ近似式を樹てて解析的に計算した。前記のように $\mu_0 = 0.8$ として、 β に 30° 以下の各種の値を与え、式 (2・13) から t_{I_1} 、これを (2・14) 式に入れて μ を決め、(2・15) 及び (2・17) 式の積分を計算すると、 β と側壁端末位置および縮流係数 C_e の関係を知ることができる。ここで μ の値が μ_0 とどれくらいちがうかを示す一例を挙げる。

* (2・15) も $t = t_{I_1}$ では被積分関数が ∞ であるが $\sim (t - t_{I_1})^{-1/2}$ となるので数値計算には解析的近似法をとる。

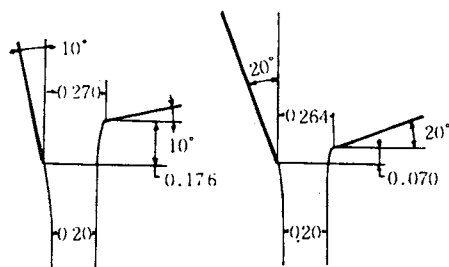


Fig. 10.

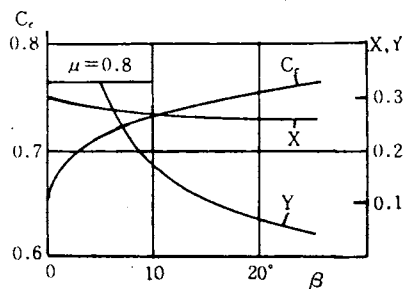


Fig. 11

$\mu_0=0.8$, $\beta=20^\circ$ のとき $\mu=0.8055$, $\beta=30^\circ$ のとき $\mu=0.8110$ したがって β が 30° 未満ならば一応 $\mu=0.8$ とみて差支えないと考える。Fig. 11 は $\beta=10^\circ$ および 20° における側壁の位置を示し、側壁を極端に長くしないで β を十分抑制できることがわかる。実際には Fig. 1 の α が 25° 程度であるから、現在の計算のように $\alpha=90^\circ$ の場合より遙かに効果的であって β を数度以内にすることも可能と推定される。なお詳細は本論文の後編にて明らかにする予定である。また Fig. 12 には β の増加とともに C_e の漸増、 X , Y の漸減する傾向が示されている。 C_e 曲線の左端 $\beta=0$ は、Fig. 3 の $\mu=0.8$ における $C_e=0.660$ に相当する。また $\beta=45^\circ$ (曲線の右方延長上) の点は Fig. 7 の静圧タンクで $\alpha=135^\circ$ のときの C_e^{**} よりやや高い位置に来るはずである。これは Fig. 3 を見ても同形のオリフィスでは $\mu=1$ (静圧タンク) より $\mu=0.8$ (噴流) の方が C_e は高いからである。

5. 結 論

1. 衝動型タービンの羽根に自由噴流を当てたとき羽根前縁で分岐した噴流の転向角を最少限に抑制するために受入噴流の圧力側に側壁を設けることの効果につき、予備的研究として、解析の簡単な場合を選んで理論計算を行ない、所期の目的を達し得た。
2. 噴流に抑制のない場合に関する前論文 1) の解析結果と本文 2) における無限長側壁による完全抑止の場合の結果を対比して、両者の流れに対照的な相違点を見出した。本文 3) における考察によって噴流の転向が起こる際には衝突以前に予備的行動を起こしているのでこの段階で抑制するための側壁が有効であることを明らかにした。
3. 本文 4) においては本文 2) の無限長壁を有限長に変えたとき生ずる転向角と壁端位置及び縮流係数の関係を解析した。その結果、適当な側壁長さで十分転向抑制効果が期待できることがわかった。追って次号に発表予定の本文の後編においては実用の羽根角についての解析とその結果を述べるつもりである。

文 献

- 1) 岸岡, 金大工紀要 7巻2号 p. 95
鋭いくさびによる自由噴流の分岐に関する二次元理論

**正確値は $\sqrt{2}/\pi - (1/\pi) \ln(\sqrt{2}+1) = 0.745$ (次回続編付録)

- 2) E. Kishioka et al, Investigation into the Problem of Losses of the Pelton Wheels, Proceedings of the Second International J.S.M.E. Symposium Vol. 1, Fluid Machinery I, 1972, p. 203

付 録

1. 式(2.3)の誘導

式(2.1)において $\varphi = \sqrt{(1-t^2)\{t^2 - \mu^2(2-\mu)^2\}}$ これを用いて積分を行なうと

$$\int_1^t t/\varphi(t) dt = (1/2)(-\pi/2 + \sin^{-1}v)$$

ここで $v = \{t^2 - (\mu^2 - 2\mu + 2)/(2-\mu)^2\} / \{(2-2\mu)/(2-\mu)^2\}$

これより $Re\{\exp(-i\int_1^t t/\varphi(t) dt)\} = \sqrt{(1+v)/2}$

ここで Re は実部の記号である。この最後の根式を整理すれば(2.3)式が得られる。

2. 式(2.5)の誘導

$$(2.4) \text{ 式} \quad I = \int \sqrt{u(u+m)}/(u+n) du$$

$u = (m/2)(\sec w - 1)$ の置換によって

$$\begin{aligned} I = & - (m/2)(2n/m - 1) \ln \{(-\tan \frac{w}{2} + 1)/(\tan \frac{w}{2} + 1)\} \\ & + (m/2) \tan w \\ & + (m/2) \{(2n/m - 1)^2 - 1\} \int dw / \{(2n/m - 1) \cos w - 1\} \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

(2.3a) を書き換えて

$$B = \sum_{k=1}^3 I_k \quad (\text{A-2})$$

ここで $I_k = C_k \int_{(2-2\mu), (2-\mu)^2} \sqrt{u(u+m)}/(u+n_k) du$, $m = 2\mu/(2-\mu)$, $n_1 = m$, $n_2 = n_1/\mu$, $n_3 = 0$

$$C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2-\mu}{\pi \sqrt{2-2\mu}}, \quad C_2 = \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{2-\mu}{\pi \sqrt{2-2\mu}}, \quad C_3 = \frac{1-\mu}{\sqrt{2}} \frac{2-\mu}{\pi \sqrt{2-2\mu}}.$$

I_k を(A-1)式の形に表わして(A-2)式に代入し、整理すれば、(A-1)式の第1, 2項は全部消え、(A-1)式第3項中 I_2 に属する項だけが残る。けっきょく

$$B = (2\sqrt{1-\mu/\pi}) \int_0^{2\tan^{-1}(1/\sqrt{2})} dw / \{(2/\mu - 1)\cos w + 1\}$$

$\tan(w/2) = x$ とおけば、 B の積分は

$$\int_1^{\sqrt{1-\mu}} \frac{2dx}{(2-2/\mu)\{x^2 - 1/(1-\mu)\}} = \frac{\mu}{2\sqrt{1-\mu}} \ln \frac{1-\mu}{\mu}$$

これより(2.5)式が得られる。

(昭和48年10月5日受理)