

## 温度分布を有する平版からの熱・物質移動

著者	林 勇二郎, 瀧本 昭, 青木 和夫
雑誌名	金沢大学工学部紀要 = Memoirs of the Faculty of Technology Kanazawa University
巻号	8
ページ	1
発行年	83-92
URL	1974-03-25
	<a href="http://hdl.handle.net/2297/25224">http://hdl.handle.net/2297/25224</a>

## 温度分布を有する平板からの熱・物質移動

林 勇二郎\* 滝本 昭\* 青木 和夫\*\*

### The Effect of an Arbitrary Surface Temperature and Concentration Distribution along a Flat Plate on the Convective Heat and Mass Transfer

Yujiro HAYASHI, Akira TAKIMOTO and Kazuo AOKI

#### Abstract

Problems of heat and mass transfer are investigated for laminar flow along submerged flat plate with a specified distribution of surface temperature and that of surface concentration. The analyses are performed of analogous relation between heat and mass transfer on the assumption that the fore-mentioned distributions are expressed by power functions: respectively  $(t_0 - t_\infty) = Mx^m$  and  $(w_0 - w_\infty) = Nx^n$ , and are verified by experiments using a Naphtalene flat plate.

#### 1. ま え が き

熱伝達と物質伝達の関係は、工業的にみられる二相流熱伝達、乾燥、しみ出し冷却等の熱・物質同時移動の問題を扱う際きわめて重要となる。また測定困難な複雑な機械表面や回転体などからの熱伝達を、両者の関係を用い物質伝達より推定する方法は熱伝達率の測定法として最近とみにクローズアップされてきている。しかし従来、この種の問題は壁面温度および濃度一定としての取り扱いが多く、より一般的な分布を有する壁面からの熱・物質伝達の解析は非常に少なく、Rubesin<sup>1)</sup>のステップ状分布に対するもの、Sogin<sup>2)</sup>の不連続湧出源の解析が代表的なものである。

本研究は流れに平行に置かれた平板からの層流強制対流熱・物質伝達を、壁面と主流の温度および濃度差の分布をべき関数形に近似することにより、助走区間の影響を考慮して解析し、ナフタリン平板を用いた実験と比較検討を行ったものである。

#### 2. 基 礎 理 論

##### 2・1 速度、温度および濃度境界層厚さ

強制対流下におかれた平板からの熱および物質伝達率を解析するにあたり次の仮定をおく。

- (1) 壁面垂直方向および流れ方向の圧力分布は一様である。
- (2) 物性値（比熱、粘性係数、熱伝導率、密度等）は、温度に対して一定である。
- (3) 摩擦による壁面での熱の発生はない。

\* 機械工学第二学科 \*\* 大学院生

(4) 流れは非圧縮性である。

平板の先端から  $x = x_0$  までを温度、濃度の助走区間 (Starting section) とすれば、速度、温度、濃度の各境界層は 図1. のように示される。平板の任意の場所 (流れ方向に  $dx$ , 流れに垂直な方向に単位長さを有する面) でとった壁面から境界層外縁までの微小体積要素内でのバランスを考えることにより、境界層内の運動量、エネルギー、物質に対する基礎方程式は下記の積分表示で与えられる。境界条件は、壁面と境界層外縁で与えられ、この際、流れ方向に変化する壁面上の温度と濃度分布を式(6)のべき関数形に近似するものとする。

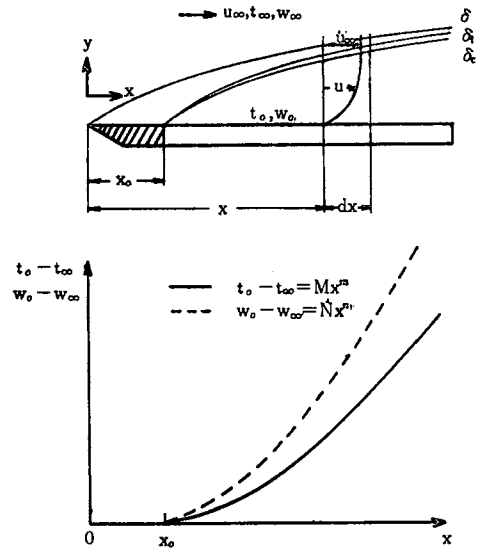


図1 モデル, 分布図

[基礎式]

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} u (u_{\infty} - u) dy = \nu \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_t} u (t_{\infty} - t) dy = \alpha \cdot \left( \frac{\partial t}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} u (w_{\infty} - w) dy = D \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3)$$

[境界条件]

$$\left. \begin{aligned} y = 0 ; \quad u = 0, \quad t = t_0, \quad w = w_0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} y = \delta, \delta_t, \delta_c ; \quad u = u_{\infty}, \quad t = t_{\infty}, \quad w = w_{\infty} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$t_0(x) - t_{\infty} = Mx^m, \quad w_0(x) - w_{\infty} = Nx^n \quad (6)$$

境界層内での速度、温度、濃度分布を平板垂直方向距離  $y$  の3次式で仮定し、境界条件(4), (5)よりそれらの係数を求めると、無次元化された各分布式は、 $y$  と各境界層厚さの関数となる。

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 = f(y, \delta) \quad (7)$$

$$\frac{t - t_0}{t_{\infty} - t_0} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta_t} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_t} \right)^3 = f(y, \delta_t) \quad (8)$$

$$\frac{w - w_0}{w_{\infty} - w_0} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta_c} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta_c} \right)^3 = f(y, \delta_c) \quad (9)$$

上式を基礎式(1), (2), (3)に代入することにより, 境界層厚さ  $\delta$ ,  $\delta_t$ ,  $\delta_c$  がそれぞれ  $x$  の関数として求まり, 各分布式が決定される。

(i) 速度境界層厚さ:  $\delta$

式(7)を式(1)に代入し整理すると, 次の微分方程式を得, 速度境界層が先端より発達する条件, 即ち,  $x=0$  で  $\delta=0$  より, 式(10)の関係が求まる。

$$\frac{39}{280} u_{\infty}^2 \cdot \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \nu \cdot \frac{u_{\infty}}{\delta}$$

$$\therefore \delta = 4.64(\nu x / u_{\infty})^{1/2} = C_0 x / \sqrt{Rex} \quad (10)$$

(ii) 温度境界層厚さ;  $\delta_t$

式(7), (8)を式(2)の各両辺に代入して,

$$-\frac{d}{dx} \left\{ u_{\infty} (t_{\infty} - t_0) \delta \left[ \frac{3}{20} \left( \frac{\delta_t}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{280} \left( \frac{\delta_t}{\delta} \right)^4 \right] \right\} = \frac{3}{2} a \frac{(t_{\infty} - t_0)}{\delta_t} \quad (11)$$

式(11)の [ ] 内において  $(\delta_t/\delta) < 1$  より, 第2項は第1項に比して小さく, 無視することができる。

$$2 \cdot \delta_t^2 \frac{d\delta_t}{dx} \left\{ \frac{1}{\delta} \cdot \frac{d\delta}{dx} - \frac{1}{(t_0 - t_{\infty})} \cdot \frac{d(t_0 - t_{\infty})}{dx} \right\} \delta_t^3 = \frac{10a}{u_{\infty}} \delta \quad (12)$$

ここで,  $\delta_t^3 = \xi$  とおき式(6)で与えられる  $(t_0 - t_{\infty}) = Mx^m$  の関係および式(10)で求めた  $\delta$  と  $x$  の関係を用いて整理すると次式となり,  $\xi$  に関して1階の線型微分方程式となる。

$$-\frac{d\xi}{dx} - \frac{3}{4x} (1 - 2m)\xi = \frac{15C_0 a}{u_{\infty}} \sqrt{\frac{\nu x}{u_{\infty}}} \quad (13)$$

$$\xi = 15C_0 \frac{a}{u_{\infty}} \sqrt{\frac{\nu}{u_{\infty}}} \left( \frac{4}{6m+3} x^{\frac{6m+8}{4}} + C \right) x^{3/4(1-2m)} \quad (14)$$

上式で  $C$  は積分定数であり, 温度助走区間 (Unheated Starting Section)  $x=x_0$  において  $\delta_t=0$ , 従って  $\xi=0$  より決定され, その結果  $\delta_t$  は次式となる。

$$\delta_t = \sqrt[3]{\frac{20C_0}{2m+1} Pr^{-1/2} \cdot Rex^{-1/2} \cdot x \left\{ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{6m+8}{4}} \right\}^{1/2}} \quad (15)$$

(iii) 濃度境界層厚さ;  $\delta_c$

式(3)に式(8), (9)を代入し, 壁面の濃度分布に対して式(6)の関係を用いることにより濃度境界層厚さを求めると次式となる。

$$\delta_c = \sqrt[3]{\frac{20C_0}{2m+1} S_c^{-1/2} \cdot Rex^{-1/2} \cdot x \left\{ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{6m+8}{4}} \right\}^{1/2}} \quad (16)$$

## 2.2 熱および物質伝達率

式(15), (16)で与えられた  $\delta_t$ ,  $\delta_c$  を式(8), (9)に代入することにより, 境界層内の温度および濃度分布が決定され, 式(17), (18)より熱伝達係数, 物質伝達係数を  $x$  の関数として求めることができる。ここでは, 結果を  $Nux$ ,  $Shx$  の無次元数で示す。

$$h_x = -\kappa \cdot \left( \frac{dt}{dy} \right)_{y=0} / (t_0 - t_{\infty}) = \frac{\kappa}{(t_{\infty} - t_0)} \cdot \left\{ \frac{d(t-t_0)}{dy} \right\}_{y=0} \quad (17)$$

$$h_{Dx} = -D \cdot \left( \frac{dw}{dy} \right)_{y=0} / (w_0 - w_{\infty}) = -\frac{D}{(w_{\infty} - w_0)} \cdot \left\{ \frac{d(w-w_0)}{dy} \right\}_{y=0} \quad (18)$$

$$Nux = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{2m+1}{20C_0}} \cdot Pr^{1/4} \cdot Rex^{1/2} / \left\{ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{6m+8}{4}} \right\}^{1/2} \tag{19}$$

$$Shx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{2n+1}{20C_0}} \cdot Sc^{1/4} \cdot Rex^{1/2} / \left\{ 1 - \left( \frac{x_0}{x} \right)^{\frac{6n+8}{4}} \right\}^{1/2} \tag{20}$$

ただし,  $Nux = h_x \cdot x / \kappa$ ,  $Shx = h_{Dx} \cdot x / D$

従って, 熱と物質伝達率の関係は次式で与えられ, 温度および濃度分布の影響が, 最初の係数と助走区間の補正項に現われる。助走区間がなく, 平板上に温度および濃度の分布がない場合 ( $m=n=0$ ,  $x_0=0$ ) には, 両者の関係は式(20)となり, よく知られた Lewis の関係となる。

$$h_x = h_{Dx} (\rho \cdot C_P) \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{1/4} \cdot \left( \frac{2m+1}{2n+1} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1 - (x_0/x)^{\frac{6m+8}{4}}}{1 - (x_0/x)^{\frac{6n+8}{4}}} \right\}^{1/2} \tag{21}$$

$$h_x = h_{Dx} (\rho \cdot C_P) \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{1/4} \dots\dots\dots \text{Lewis の関係} \tag{22}$$

### 3. 理論解析の結果

強制対流熱・物質伝達における速度, 温度, 濃度の境界層厚さと各分布式および熱と物質伝達の関係が理論的に明らかとなった。ここでは, 2・3の代表的な解析結果の例を示す。

図2は, 境界層内の無次元温度分布 $\Theta$ と無次元距離 $\eta$ の関係を助走区間がない場合について図示したものであり, 壁面の温度分布の指数 $m$ が与えられれば任意の流速 $u_\infty$ をもつ任意の流体( $\nu, Pr$ )に対して境界層内の温度分布が決定される。また,  $m=0$ の場合は, Pohlhausenの解と一致し,  $m$ が大きくなるにつれて境界層内の温度分布がきつくなり, 境界層厚さが減少することが判る。この関係は式(8)(15)より求まり, 同時に  $\eta (=y/\delta_t = y\sqrt{u_\infty/\nu x})$  で特徴づけられることが判る。図3は, 空気系 ( $Pr=0.72$ ) における熱伝達係数と  $Rex$  数の関係を分布指数  $m$  に対して示したものであり, 式(19)で表わされる関係を一般表示するため助走区間の影響をヌッセルト数に含めた修正ヌッセルト数  $Nux' (=Nux\{1 - (x_0/x)^{\frac{6m+8}{4}}\}^{1/2})$  を用いる。壁面温度一定 ( $m=0$ ) の場合,  $Nux = 0.332 Rex^{1/2} \cdot Pr^{1/4}$  となり, Pohlhausen の解と一致する。また,  $m$ が大きくなるにつれて熱伝達係数は増大し,  $Nux'$  は壁面温度分布の有無にかかわらず  $Rex$  の  $1/2$  乗に比例する。

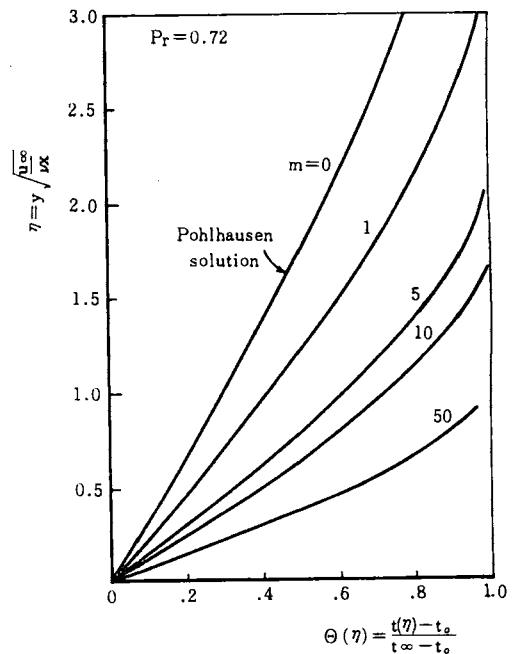


図2 平板層流境界層の温度分布

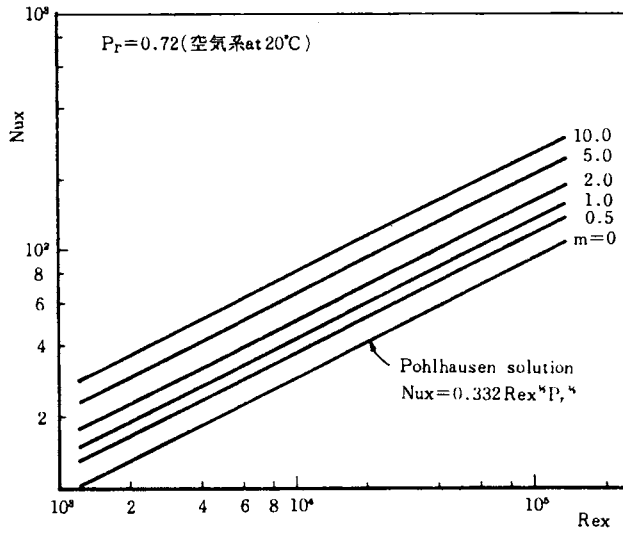


図3 局所ヌッセルト数

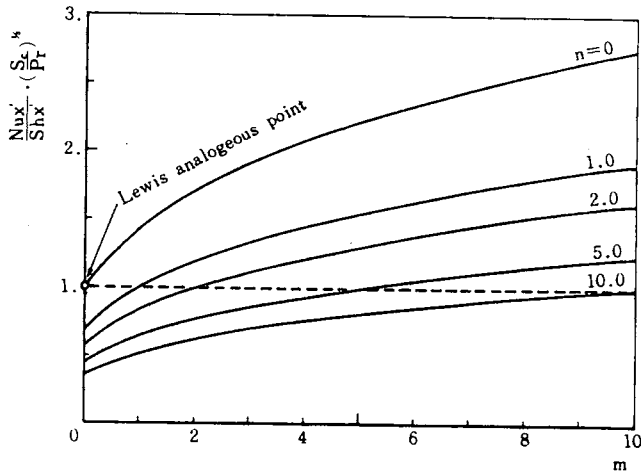


図4 熱・物質伝達の関係

最後に、熱と物質伝達の関係を示す。一般表示のため式(21)の関係を用いず、式(19)、(20)より修正ヌッセルト数  $Nux'$  と修正シャウワッド数  $Shx'$  の比  $Nux'/Shx'$  に  $(Pr/Sc)^{-1/2}$  を乗じた値と  $m$  と  $n$  の関係を図4に示す。任意の流体に対して物性値  $Pr$  数、 $Sc$  数が定まり、従って壁面温度の分布指数  $m$  と濃度の分布指数  $n$  が与えられれば、熱伝達と物質伝達の関係が決定される。同図で特に、 $m=n=0$  の点は、Lewisのアナログを表わす点となる。

$$\frac{Nux'}{Shx'} \cdot \left(\frac{Sc}{Pr}\right)^{1/2} = \left(\frac{2m+1}{2n+1}\right)^{1/2} \quad (23)$$

一方、熱および物質伝達に及ぶ助走区間の影響は式(19)、(20)の  $\left\{1 - (x_0/x)^{\frac{6m+3}{4}}\right\}^{1/2}$  の項に表われ、 $x$  と  $x_0$  の比および壁面の温度分布または濃度分布に關係するため非常に複雑となる。図5は助走区間  $x_0$

のあるときの  $Nux$  および  $Shx$  を求めるための換算法を示したものであり、分布指数  $m, n$  が大きくなるにつれて助走区間の影響が緩和されることが判る。

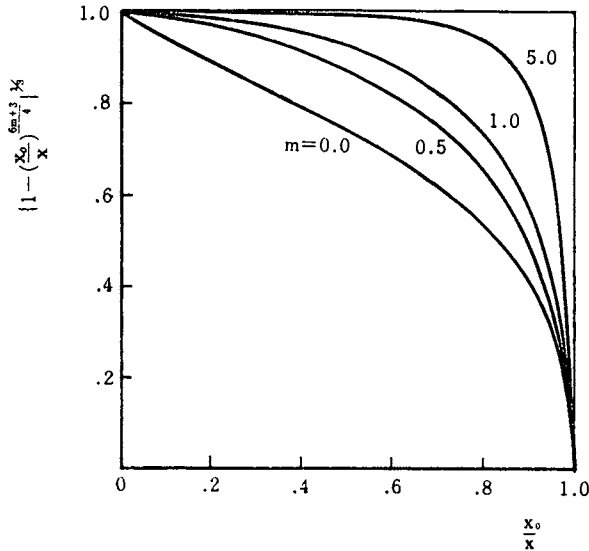


図5 助走区間による影響

#### 4. 実験装置および方法

実験装置の概要、試験の平板構造を図6, 7に示す。装置は、主流温度調節のための①主流ヒータ、②送風機、③風洞、④測定ダクト (246口×1,500mm)、⑤排気用ブロア、その他計器類からなる。試験平板は、熱供給のための上下2組のヒーターを組込んだ熱板と試料 (ナフタリン) を装着するアルミ板からなり、乱れを防ぐため先端および後端はナイフエッジにし、先端部 ( $x_0=64\text{mm}$ ) に助走区間を設けた。特に、熱供給は流れ方向に温度分布をつけるために流れ方向に分割された主副ヒーターを用いて行い、副ヒーターは主ヒーターから下方への熱の逃げを防ぐため常時調節される。

実験は、風速2~11m/sの層流域で、主流温度および壁面温度 (濃度) 分布を変化させて定常後、2~3時間行った。測定は、主流温度、壁面温度、風速、供給熱量および昇華量等について行い、壁面温度はアルミ板表面に流れ方向に8点埋め込んだ0.2mmφの銅-コンスタンタン熱電対を用い、ナフタリン層による温度降下を補正して求めた。昇華量は、2/1,000mm精度のダイヤルゲージを壁面まで下し、流れ方向に移行させて局所値の時間的変化を読み取り測定した。供給熱量は、主流ヒーターへの電圧および電流値から次式によって計算される。

$$q_s = 0.86V \cdot I / A \quad (\text{Kcal/m}^2\text{h})$$

壁面からの熱伝達量は供給熱量  $q_s$  から次式で表わされる昇華潜熱  $q_m$  とふく射損失  $q_r$  を引いたものとなり、

$$q_m = r \cdot \gamma_D \cdot d$$

$$q_r = 4.88\epsilon \{ (T_0/100)^4 - (T_\infty/100)^4 \} \quad (\text{ナフタリン, } \epsilon = 0.85)$$

$$\therefore q_h = q_s - (q_m + q_r)$$

従って、熱伝達率は次式で与えられる。

$$h_x = q_h / (t_0 - t_\infty)$$

一方、物質伝達率は昇華面の変位  $d$  (m/h) と壁面温度  $T_0$  等によって次式で与えられる。

$$h_{Dz} = dT_0 \tau_D R / p_0$$

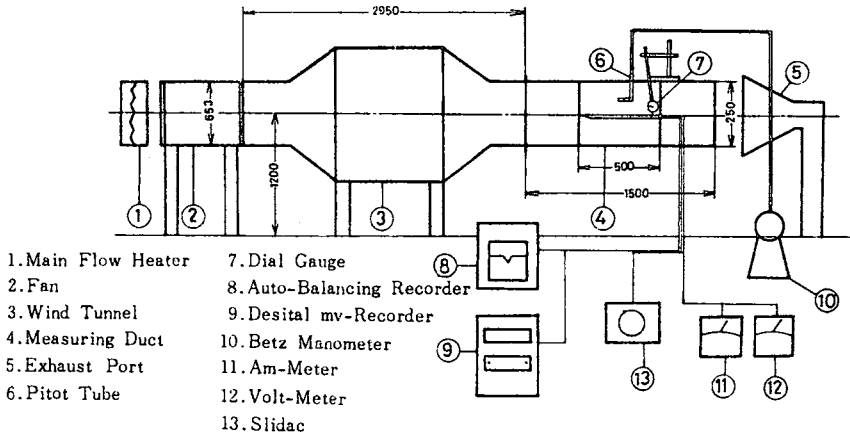


図6 実験装置の概要

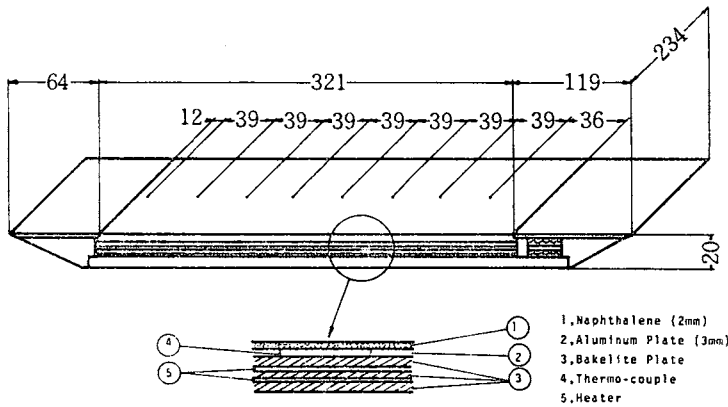


図7 試験平板の構造

### 5. 実験結果および考察

風速 2 ~ 11 m/s, 主流温度 および 壁面温度分布を変化させ熱および物質伝達について実験を行い、以下の結果を得た。

図 8 に壁面温度と主流温度との差の流れ方向に対する分布および壁面濃度分布についての実験結果の一例を対数グラフ上に示す。各分布の勾配より  $(t_0 - t_\infty) = Mx^m$ ,  $(w_0 - w_\infty) = Nx^n$  の指数  $m$ ,  $n$  が決定され、ここでの実験結果、 $m = 0.62$ ,  $n = 0.88$  の場合を例として取り上げ、温度および濃度分布を有する壁面からの熱・物質伝達を考察する。

図 9 は分布がない壁面温度一定の場合 ( $m = 0$ ) と分布がある場合 ( $m = 0.62$ ) との局所熱伝達率  $Nux'$  とレイノルズ数との関係を表わしたもので、各々理論線より約 20% 大きい値を呈しているが、それぞれ  $Re_x$  の  $1/2$  乗に比例しており、また実験精度からいってもほぼ理論解析値を満足しているものと考えられる。



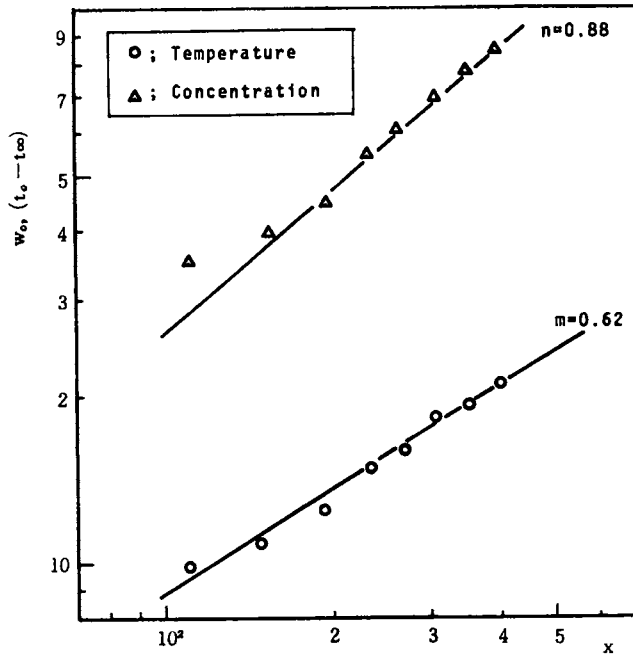


図8 壁面温度および濃度分布

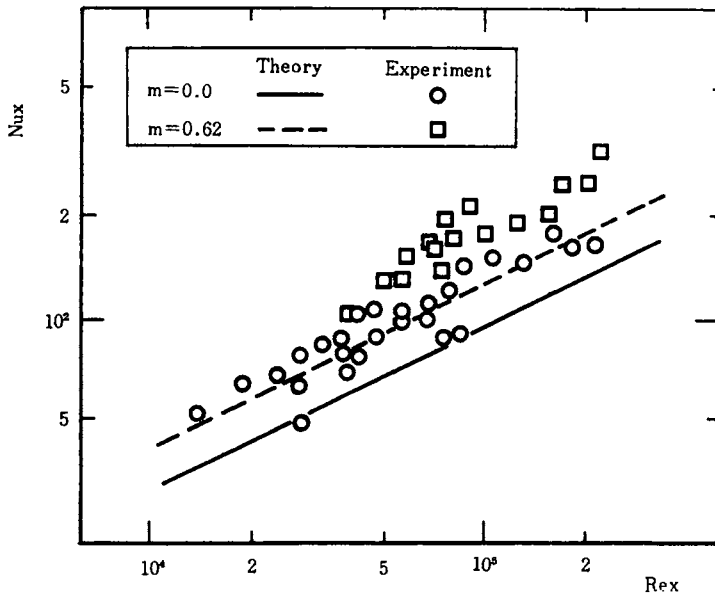


図9 修正ヌセルト数と  $Re_x$  数

つきに分布の有無による物質伝達率の影響を比較するため修正シャウツド数の比  $(Shx')_n / (Shx')_{n=0}$  とレイノルズ数との関係で表わせば、図10となり実験結果は少々のはらつきはあるが、 $n=0.88$  の理論値と一致し分布を有することによって明らかに物質伝達率が増加することが判る。

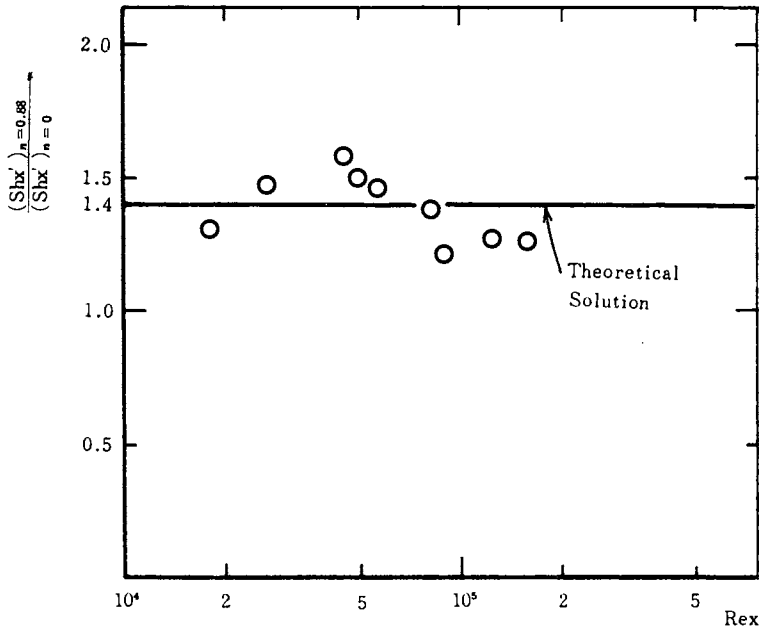


図10 修正 Shx 数比と Rex 数

図11は、熱伝達率と物質伝達率の関係を  $Rex$  に対して示したものであり、壁面温度分布および濃度分布より定まる  $m, n$  に対して、 $Nux'/Shx'$  は一定となり、壁面分布を考慮した理論解析結果が（図4式(23)参照）が妥当であることが判る。

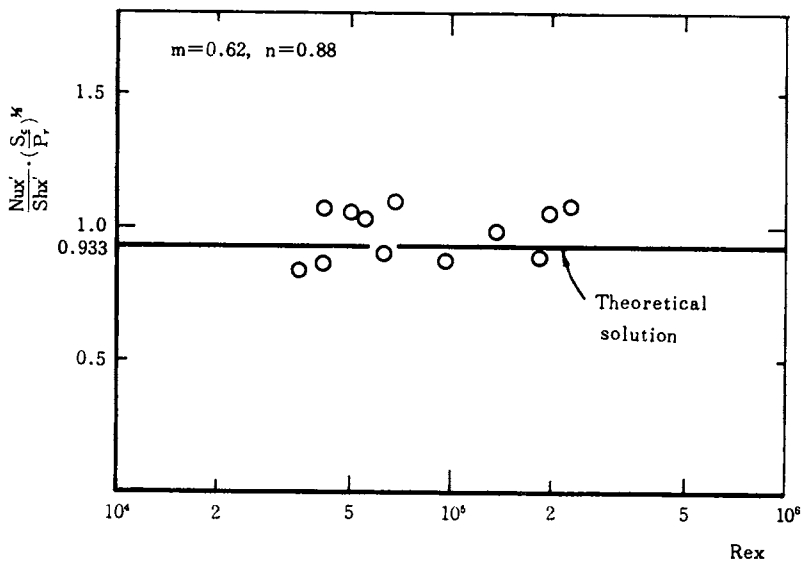


図11 熱と物質伝達の関係

## 6. 結 言

強制対流下における壁面温度および濃度分布を有する平板からの熱および物質伝達を、分布の指数形近似のもとで解析し、ナフタリン試料を用いた実験と比較検討を行い、熱と物質伝達に及ぶ分布の影響および両者の関係が明らかとなった。

終りに、本研究の実験に協力下さった当研究室学生、川畑明、吉田秀樹、渡辺正嗣の諸君に感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) M.W. Rubesin ; NACA TN 2345 (1951)
- 2) H.H. Sogin ; Jour. of Heat Transfer p53 (1960)

## 記 号

$A$ ; 面積	( $m^2$ )	$w$ ; 相対質量濃度	( - )
$a$ ; 温度伝導度	( $m^2/h$ )	$x$ ; 平板水平方向距離	(m)
$C_p$ ; 比熱	( $kcal/kg^{\circ}C$ )	$y$ ; 平板垂直方向距離	(m)
$D$ ; 拡散係数	( $m^2/h$ )	$\tau_D$ ; 比重量	( $kg/m^3$ )
$d$ ; 昇華深さ	(m/h)	$\delta$ ; 境界層厚さ	(m)
$h_x$ ; 熱伝達率	( $kcal/m^2h^{\circ}C$ )	$\epsilon$ ; ふく射率	( - )
$h_{Dx}$ ; 物質伝達率	(m/h)	$\kappa$ ; 熱伝導率	( $kcal/mh^{\circ}C$ )
$I$ ; 電流値	(Amp.)	$\nu$ ; 動粘性係数	( $m^2/h$ )
$m, n$ ; 定数 (分布勾配)	( - )	$\rho$ ; 密度	( $kg/m^3$ )
$p$ ; 蒸気分圧	( $kg/m^2$ )	$Pr$ ; プラントル数	
$q$ ; 熱量	( $kcal/m^2h$ )	$Sc$ ; シュミット数	
$R$ ; ガス定数	( $kg \cdot m/kg$ )	$Nux$ ; ヌッセルト数	
$r$ ; 潜熱	( $kcal/kg$ )	$Shx$ ; シャウツド数	
$t$ ; 温度	( $^{\circ}C$ )	$Nux'$ ; 修正ヌッセルト数	
$u$ ; 速度	(m/h)	$Shx'$ ; 修正シャウツド数	
$V$ ; 電圧値	(Volt)		

(昭和48年10月1日受理)