Abelian Projection and Inversion Method

金沢大学　鈴木恒雄　大野成義

最近 qusrk confinement mechanism において abelian dominant であることを示すため Monte Carlo 法により Abelian Wilson loop の計算がされた。[1] そこで大変興味ある結果が得られた。U(1) covariant gauge では、Abelian Wilson loop からえた string tension と Full の Wilson loop からえたものが一致した。しかし、unitary gauge では、そのような結果は得られなかった。

これを、連続極限で解析的に計算してみたい。non-perturbative な計算としては、$\frac{1}{N}$展開、Schwinger–Dyson などあるが、それぞれ問題があるため、昨年のこの研究会で慶応大学の福田氏が発表された Inversion method を利用してみた。[2][3]

Abelian part のみの Wilson loop を計算するため、福田氏がすでにされた Inversion method による Full の Wilson loop の計算の手順を模倣した。

gauge fixing として covariant gaug

$$
\begin{aligned}
\pounds_{G.F}=&B^a\left(\partial_\mu A^{\mu a}\right)^2+\xi g A^\beta_\mu f^{\beta ab}A^{\mu a}B^b+\frac{\alpha}{2}\left(B^a\right)^2\\
&-\bar{\eta}^a\partial_\mu\left(\partial^\mu\delta^{ac}-gf^{abc}A^{\mu b}\right)\eta^c\\
&-\xi g\Big[f^{\beta bc}A^\beta_\mu\bar{\eta}^b\left(\partial^\mu\delta^{cd}-gf^{ced}A^{\mu e}\right)\eta^d\\
&\quad+f^{\beta bc}A^b_\mu\bar{\eta}^c\left(\partial^\mu\delta^d-gf^{\beta ed}A^{\mu e}\right)\eta^d\Big]
\end{aligned}
$$

をとる。ξ,α は gauge parameter で、$\xi=1$ $\alpha=0$ のとき Lattice U(1) covariant gauge に一致する。

Abelian Wilson loop は

$$
\Sigma^A=-\int\frac{d^4p}{(4\pi)^4}A(p)C(p)
$$

$$
A(p)=\left(K^2(p)\right)^2\left(1+\pi(p)\right)^{-1}_{l.l.} \tag{1}
$$

$$
C(p)=\frac{1}{2}\int dx^\mu dy^\nu\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle_p \tag{2}
$$

(1) は、gauge fixing によって具体的に

$$
A(p)=\frac{1}{4}\left[1-\frac{g^2}{16\pi^2}\left\{\frac{11}{3}C_2-\frac{4}{3}T_RN_f\right\}\right]\ln\frac{p^2}{\mu^2}\qquad SU(2)
$$

$$A(p)=\frac{1}{3}\left[1-\frac{g^2}{16\pi^2}\left\{\frac{11}{3}c_2-\frac{4}{3}T_R N_f\right\}\right]\ln\frac{p^2}{\mu^2} \qquad SU(3)$$

Full Wilson loop とは、Vertex における Matrix factor だけが異なる。

(4)における $\langle A_\mu(x)A_\nu(y)\rangle$ を評価するとき、string tension を得るために source を入れる。source としては、dual potential B_μの mass を選ぶ。B_μについて積分を行なうと Lagrangean は

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}A_\mu(g^{\mu\nu}\partial^2-\partial^\mu\partial^\nu)A_\nu+\frac{1}{2}A_\mu X^{\mu\nu}A_\nu$$

$$X^{\mu\nu}=\frac{m^2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\mu}\varepsilon^{\alpha}{}_{\delta\eta\nu}n^\beta n^\delta\partial^\gamma\partial^\eta}{\left[(n.\partial)^2+n^2m^2\right]}$$

ここで $m^2(p)=m^2\theta(m^2+p^2)$ が B_μの mass で、運動量表示してある。任意の単位ベクトル n_μは、external source の方向に取る。Wilson loop を無限大にとることによって string tension α を得る。

$$\Sigma^A=-S\alpha$$

$$\alpha=\frac{g^2}{4\pi^2}\eta m^2\left[1-\frac{g^2}{16\pi^2}\left\{\frac{11}{3}c_2-\frac{4}{3}T_R N_f\right\}\right]\ln\frac{m^2}{\mu^2}$$

$$\eta=\frac{\ln 2}{8}\quad (SU(2)のとき)\qquad \frac{\ln 2}{6}\quad (SU(3)のとき)$$

$\phi=\frac{4\pi\alpha}{g^2}$ とおいて、inversion すると

$$\eta m^2=\phi\left[1+\frac{g^2}{16\pi^2}\left\{\frac{11}{3}c_2-\frac{4}{3}T_R N_f\right\}\ln\frac{\phi}{\mu^2\eta}\right]$$

ここで $m^2=0$ として string tension α を求める。ここからは、福田氏による Full の Wilson loop のときと同じである。なお,μindependent にするため Higher ln-singularity までとるという最近福田氏が発表された処方も用いた。[4]

$\Lambda=250\mathrm{MeV}$ とすると Abelian Wilson loop の string tension は $\sqrt{\alpha}=95\mathrm{MeV}$ である。一方、Full の Wilson loop の string tension は $\sqrt{\alpha}=215\mathrm{MeV}$ である。ところが string tension の実験値は$\sqrt{\alpha}=430\mathrm{MeV}$ である。

source の異なる入れ方ですとどうなるか?

source として Flux をしぼる外場Jを入れる。

$$\pounds = -\frac{1}{4}\varepsilon(\phi)G_{\mu\nu}^{2}+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-V(\phi)$$

$$\varepsilon(\phi)=\left(\frac{\phi-\phi_c}{\phi_c}\right)^{\alpha}=(-J\phi+1)^{\alpha} \qquad V(\phi)\cong J^4(1-J^2\phi^2)^2$$

この場合、Λ=250MeVとすると、Abelian Wilson loop の string tension は$\sqrt{\alpha}$=200MeVであり、Full の Wilson loop の string tension は$\sqrt{\alpha}$=530MeVである。

まとめると（1）Inversion Method によって、Abelian Wilson loop から string tension として0以外の値を得ることができた。（2）gauge の依存性はなかった。（3）Abelian Wilson loop の string tension は Full Wilson loop の string tension より小さく、実験値よりも小さくなった。（4）（2）と（3）より、Monte Carlo 法による結果を再現することはできなかった。（5）Inversion Method は0以外の値を求めることができるという意味において大変興味深い計算方法であるが、その値は実験値と異なり、また source の入れ方でも異なるため数値的には信頼できない。

Reference

(1) K.Shiokawa, T.Suzuki, I.Yotuyanagi　preprint DPKU9001
(2) R.Fukuda　Phys.Rev.Letters.61(1988)1549
(3) R.Fukuda　Keio preprint
(4) R.Fukuda　研究会”ＱＣＤとハドロン物理学の発展”(1990)74-84