

楕円型チャンネル内における泥流定常波の特性に関する理論および数値解析

著者	中谷 健, 由比 政年, 石田 啓
雑誌名	日本海域研究所報告 = Bulletin of the Japan Sea Research Institute, Kanazawa University
巻	36
ページ	55-62
発行年	2005-03-31
URL	http://hdl.handle.net/2297/19907

楕円型チャネル内における泥流定常波の特性に関する理論および数値解析

中谷 健¹・由比政年²・石田 啓³

STATIONARY WAVE OF A BINGHAM FLUID IN AN INCLINED ELLIPTIC CHANNEL

Takeshi NAKAYA¹, Masatoshi YUHI² and Hajime ISHIDA³

A lubrication theory is presented for the three-dimensional flow of a Bingham-plastic fluid in a shallow and wide elliptic channel. For steady flows, the velocity distribution, total discharge, and section-averaged flux are obtained analytically in terms of the fluid property and the geometry of the channel cross-section. Nonlinear stationary waves, which connect a uniform depth upstream to another uniform depth downstream, are also investigated, for both wet and dry beds. The phase speed of the stationary wave is derived analytically. A numerical scheme is then applied to calculate the transient flow evolution. The final development of the stationary wave due to steady discharge upstream is obtained numerically and the relation between the shape of wave front and the fluid property is discussed.

Key Words : Bingham fluid, stationary wave, mudflow, lava, channel

1. 序論

集中豪雨による地滑りや斜面崩壊, 火山噴火によるマグマや火山灰の噴出等, 多様な要因により誘起される泥流の氾濫は, 国内外の多くの地域で, 社会基盤に対する壊滅的損害を与えてきた典型的自然災害の一つである。背後に活発な土砂生産域を持ち, 多くの急流河川が存在する日本海域においても, 泥流氾濫の災害は頻発しており, 2004年北陸豪雨災害においても甚大な被害が報告されている。このような泥流運動のメカニズムを検討し,

その基本特性を明らかにすることは, 防災上きわめて重要である。

微小粘土粒子と水の混合物として構成される泥流の運動は, 一般に, ニュートン流体とは異なる独特のレオロジー特性を持つ。過去に実施された実験および観測結果から, 粘土の体積濃度が数%を超える場合には, 泥流の応力ひずみ関係はビンガム流体モデルによって良く近似されることが知られている。ビンガム流体の応力ひずみ関係は非線形であり, せん断応力が降伏応力を越えない限り, 流体は静止状態を維持し得る。この非線形応力ひ

¹学(工) 石川県庁 道路公社事業部技術課 (〒925-0003 石川県羽咋市寺家町レ48番2)
(金沢大学大学院自然科学研究科博士後期課程)

²博(工) 金沢大学大学院助教授 自然科学研究科 (〒920-8667 石川県金沢市小立野2丁目40-20)

³工博 金沢大学大学院教授 自然科学研究科 (〒920-8667 石川県金沢市小立野2丁目40-20)

ずみ関係が理論的解析をきわめて困難とするため、ビンガム流体の運動に関する従来の理論的研究は、一様勾配斜面上に代表される簡単な地形を対象としたものが大部分であった（例えば、Coussot 1997, Griffiths 2000, Mei, Liu & Yuhi 2001）。現実には、泥流運動の時間的发展は、山岳、溪谷あるいは扇状地等を進行する過程で、地形の三次元形状から強い影響を受ける。これに対し、三次元地形上におけるビンガム流体の運動を論じた理論的研究は極めて少ない。

こうした背景のもとに著者らは、ビンガム流体の遅い流れに対して長波近似を適用し、任意地形上におけるビンガム流体の三次元流れを解析するための理論および数値モデルを開発して、各種の定常および非定常流れに適用し、流体場の時間發展の様子や最終堆積形状の特徴等を検討してきた（Mei & Yuhi 2001, Yuhi & Mei 2004）。

本研究では、著者らが開発してきたこれらの理論・数値モデルを用いて、楕円状の断面形を有する傾斜チャンネル内における泥流の定常波（Stationary Wave）を解析し、ビンガムパラメータや地形形状が、定常波の位相速度や表面形状に及ぼす影響を理論・数値的に明らかにする。

2. 理論および数値解析モデル

(1) 基礎方程式

傾斜角 θ をもつ楕円チャンネル内を流下する薄層泥流の三次元層流を考える。 x 軸をチャンネル中心に沿って取り、 y 軸を幅方向に、 z 軸を x 軸と y 軸に対し垂直にとる（図-1）。流れの代表深さと代表長さをそれぞれ D および L とし、長波近似 ($D/L \ll 1$) を用いる。堆積直前の泥流や緩やかに発達する溶岩ドームのように、高粘性の遅い流れを考えることとし、レイノルズ数 ($Re = \rho u D^2 / (\mu L)$)、フルード数 ($Fr = u^2 / (gD)$) は、 D/L 程度のオーダーで小さいと仮定する。自由表面を $z = h$ 、 z 方向に積分された質量流束を (q_x, q_y) とすると、質量保存則は以下のように表せる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

長波近似および遅い流れの仮定の下では運動方程式中の慣性力が無視でき、圧力は静水圧分布となる。また、せん断力の中では、 τ_{xx} および τ_{yy} の項が支配的となる。

自由表面上でせん断力がゼロになる条件を用いると、せん断力の鉛直分布は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \rho g \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) (h - z) \\ \tau_{yz} &= \rho g \left(-\cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right) (h - z) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、全せん断力 τ を次のように定義すると、

$$\tau(x, y, z, t) = \left(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

底面上 ($z = H$) での全せん断応力は次のようになる。

$$\tau_b = \rho g (h - H) \left[\left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(-\cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$\tau_b > \tau_0$ (τ_0 : 降伏応力) の場合にのみ流体運動が可能であり、 $\tau_b < \tau_0$ であれば、斜面上であっても流体は静止状態を保持する。降伏曲面上 ($z = h_0$) では $\tau = \tau_0$ であり、 h_0 と h は次式により関連づけられる。

$$\rho g (h - h_0) \left[\left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(-\cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \tau_0 \quad (5)$$

底面上でノースリップ条件、降伏曲面上で速度勾配がゼロとなる条件を用いると、降伏曲面より下方のせん断流れ領域 ($H < z < h_0$) での速度分布 u, v が求められる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\rho g}{2\mu} \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left[(h_0 - H)^2 - (z - h_0)^2 \right] \\ v &= \frac{\rho g}{2\mu} \left(-\cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right) \left[(h_0 - H)^2 - (z - h_0)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

降伏曲面より上側のプラグ流れ領域 ($h_0 \leq z < h$) での速度を u_p, v_p とすれば速度分布は以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} u_p &= \frac{\rho g}{2\mu} \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) (h_0 - H)^2 \\ v_p &= \frac{\rho g}{2\mu} \left(-\cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right) (h_0 - H)^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

以上の速度分布から流束を求めると、深さ方向に積分された質量保存則が次のように導ける（Mei & Yuhi, 2001）。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\rho g}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) F \right] + \frac{\rho g}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(-\cos \theta \frac{\partial h}{\partial y} \right) F \right] = 0 \quad (8)$$

$$F(h, h_0, H) = \frac{1}{6} (3h - h_0 - 2H)(h_0 - H)^2 \quad (9)$$

(2) 無次元化

次式で定義される無次元変数を導入する。

$$\left. \begin{aligned} (x, y) &= D \cot \theta (x', y'), (z, h, h_0, H) = D (z', h', h'_0, H') \\ t &= \frac{\mu \cos \theta}{\rho g D \sin^2 \theta} t', (u, v, u_p, v_p) = \frac{\rho g D^2 \sin \theta}{\mu} (u', v', u'_p, v'_p) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

なお、ここで定義された無次元化は斜面勾配が小さい場合にのみ有効である。

質量保存則の無次元形は、プライムを省略して、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right) F \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(-\frac{\partial h}{\partial y} \right) F \right] = 0 \quad (11)$$

であり、式(9)は有次元、無次元とも同形となる。また、 h_0 と h の関係式は以下ようになる。

$$(h - h_0) \left[\left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(-\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau_0}{\rho g D \sin \theta} = \alpha \quad (12)$$

ビンガムパラメータ α は、流体の非ニュートン特性の尺度であり、 $\alpha = 0$ の極限がニュートン流体に対応する。せん断流れ領域 ($H < z < h_0$) およびプラグ領域 ($h_0 \leq z < h$) の速度分布は、次式で表せる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \left[(h_0 - H)^2 - (z - h_0)^2 \right] \\ v &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial h}{\partial y} \right) \left[(h_0 - H)^2 - (z - h_0)^2 \right] \\ u_p &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\partial h}{\partial x} \right) (h_0 - H)^2 \\ v_p &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial h}{\partial y} \right) (h_0 - H)^2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

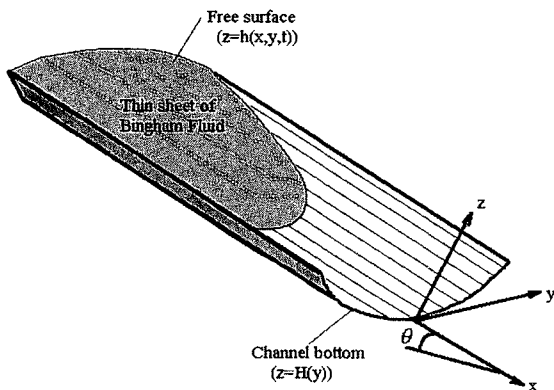


図-1 三次元流れの座標系 (Mei & Yuhi, 2001)

3. 楕円チャネル内の定常一様流の理論解

楕円チャネルの形状を次式で表す。

$$\frac{y^2}{m^2} + \frac{H(y)^2}{n^2} = 1 \quad (-n \leq H(y) \leq 0, -m \leq y \leq m) \quad (14)$$

これは、パラメータ ϕ を用いて、次のようにも表せる。

$$y = m \sin \phi, \quad H(y) = -n \cos \phi \quad (-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2) \quad (15)$$

x 軸方向の流れが定常かつ一様となる場合 ($\partial/\partial t = 0, \partial/\partial x = 0$)、式(11)より自由表面 h_s と降伏曲面 h_0 の位置は y 方向位置に依存しない。したがって、自由表面 h_s と降伏曲面 h_0 の高さは全領域で一定となる。この定常一様流場において流れが存在する領域は、 $y=0$ を中心に有限幅 $2B$ の範囲に限定される (図-2)。ここで、流れ領域の側端位置 ($y=B$) は、式(14)と次の式を用いて計算することができる。

$$H(B) = h_0 = h_s - \alpha \quad (16)$$

パラメータ ϕ を用いて書き換えると、

$$B = \frac{m}{n} [m^2 - (h_s - \alpha)^2]^{\frac{1}{2}} = m \sin \phi_B \quad (17)$$

$B_M > |y| > B$ の領域では、底面せん断力は降伏応力より小さくなるため、流れは存在しない。この静止部分の形状は、 $\tau_w < \tau_0$ を満たせば必ずしも水平となる必要はないが、ここでは、簡単のため $y = \pm B_M$ の位置まで流体表面は水平と仮定する。なお、この場合、 B_M は式(14)と $z=h$ より以下のように計算できる。

$$B_M = \frac{m}{n} [n^2 - h_s^2]^{\frac{1}{2}} = m \sin \phi_M \quad (18)$$

せん断領域およびプラグ領域の速度は式(13)で $\partial/\partial x = 0$ として求めることができる。なお、 y 方向速度は全領域で $v = v_p = 0$ となる。先にも述べたように降伏曲面より下部では、せん断流れが存在し、降伏曲面より上部のプラグ流れ領域では、流速は深さ方向に一定となる。

速度分布を積分して総流量 Q を計算すると次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} Q &= 2m \sin \phi_B [e_1 + e_2 \cos \phi_B + e_3 \cos^2 \phi_B \\ &\quad + e_4 \cos^3 \phi_B] + 2m e_2 \phi_B \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、係数 e_i ($i=1, 4$) は以下の式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} e &= -\frac{1}{6}[(h_s - \alpha)^3 - 3h_s(h_s - \alpha)^2 - 2n^2(h_s - \alpha) - 2n^2h_s] \\ e_2 &= \frac{b}{8}[4h_s(h_s - \alpha) + n^2], e_3 = \frac{n^2}{6}(2h_s - \alpha), e_4 = \frac{n^3}{12} \end{aligned} \right\} (20)$$

$z=0$ における楕円チャネルの側端位置、つまり、 m の値が1となるように固定し、中央部での流れの深さを1（有次元では基準深さ D ）とした場合（この時、 $h_s = 1-n$ となる）に、総流量 Q が α および n に対してどのように変化するかを計算した例を図-3に示す。 α が増加するにつれて、流れ領域の幅は狭まり、せん断層の厚さも薄くなる結果、断面内の総流量は減少する。また、 n の値が増加してチャネルの側方勾配が急になるにつれて、総流量は減少することも確認できる。

また、断面平均の質量流束は、次式で表される。

$$\langle q_x \rangle = [e_1 + e_2 \cos \phi_B + e_3 \cos^2 \phi_B + e_4 \cos^3 \phi_B] + \frac{e_2 \phi_B}{\sin \phi_B} \quad (21)$$

断面平均流束 $\langle q_x \rangle$ は、 α 、 h_s 、 n の関数であり、 m には依存しないことがわかる。

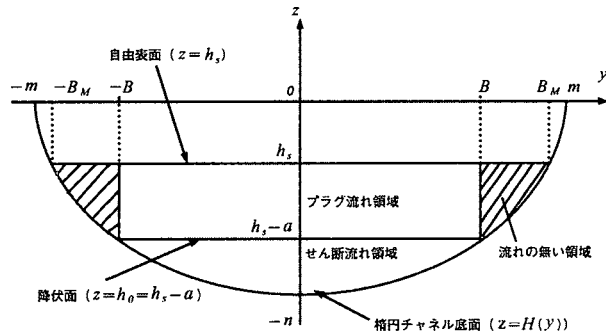


図-2 チャネル断面における定常一様流の流れ構造

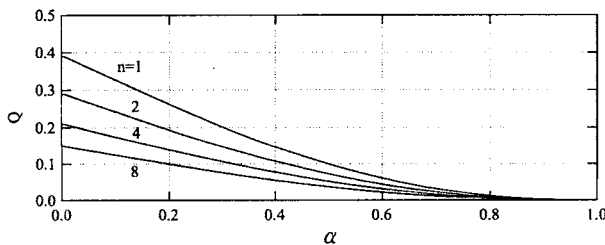


図-3 総流量 Q と α 、 n の関係 ($m=1, h_s=1-n$)

4. 楕円チャネル内を進行する定常波の理論解析

初期状態 ($t=0$) において、 $h=h_+$ となるような一様流場（静止状態も含む）が存在したと考える。 $t=0$ より、無限上流における境界で定常的に流体の供給を行い、十分に長い時間が経過すると、楕円チャネル内を一様な先端形状を保ちながら一定速度 C で流下する定常波（Stationary Wave）が形成される。本章では、この定常波の位相速度 C をピングラムパラメータ、楕円チャネルの形状、および下流側の初期状態の関数として理論的に表現する。

(1) 初期条件および無限上流・下流での境界条件

流れ場の初期状態（これは無限下流での状態に等しいため、以下では下付きの添字+で表現する）に次の2ケースを想定する。

Case(a): 十分に初期水深が大きく、 $t=0$ で既にチャネル内に流れが存在する状態 ($h_{0+} > -n$)。

Case(b): 初期水深が浅く、 $t=0$ では流体は静止状態にある ($h_{0+} < -n$) 状態。特に、 $h_{0+} = -n$ の場合は、初期（下流部）に流体が全く存在しない状態（dry bed）と捉えることができる。

以下、初期状態での流体部分の側端位置を B_{M+} と表記する。

無限上流位置（下付き添字に-を付加して区別する）での自由表面高さを $z=h_-$ で表すと、上流側の降伏面高さは $h_{0-} = h_- - \alpha$ である。下流側の表面高さが上流側の降伏面高さより高いか低いかにより、先のCase(a), (b)は、さらに、次の2種類の流れパターンに区別できる（図-4参照）。

Case(1): 下流側の表面高さが上流側の降伏面高さより高い場合 ($h_+ > h_{0-}$)。

Case(2): 下流側の表面高さが上流側の降伏面高さより低い場合 ($h_+ < h_{0-}$)。

(2) 定常波の位相速度に対する理論解の誘導

位相速度 C で移動する定常波を考え、移動座標系 $\xi = x-ct$ を導入すると、式(1)は次のように書き換えられ

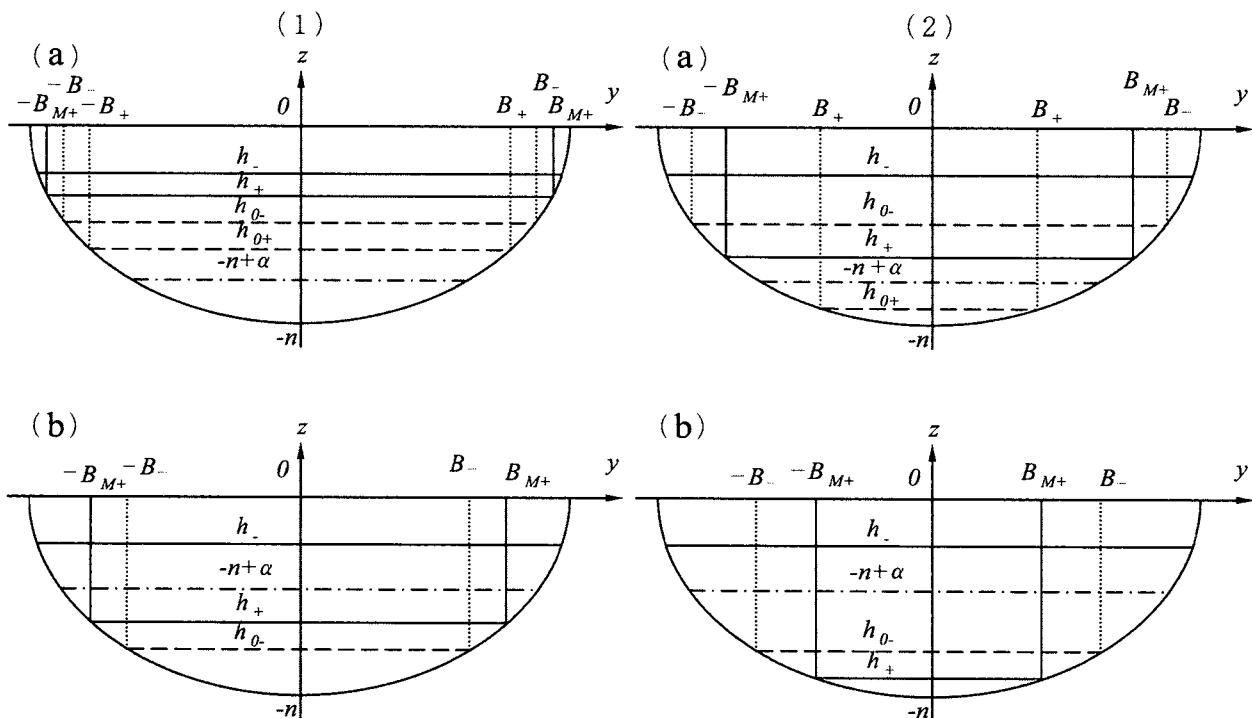


図-4 無限上流および無限下流における流れ場の断面構造

る。

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(-Ch + q_x) + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (22)$$

$y=0$ において、左右対称性から y 軸方向の流束は無い。

$$q_y = 0 \text{ at } y=0 \quad (23)$$

また、流れ領域の端部においても流束はゼロとなる。

$$q_x = q_y = 0 \text{ at } y=B(\xi) \quad (24)$$

ここで B は流れ領域幅の1/2である。式(22)を y 方向に0から B まで積分すれば、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\int_0^B (-Ch + q_x) dy \right] + Ch_B \frac{dB}{d\xi} = 0 \quad (25)$$

ここで、流れ領域端部 ($y=B$) における h を h_B と表している。 h および q の断面平均量を次式で定義すると、

$$\langle h \rangle = \frac{1}{B} \int_0^B h dy \quad \langle q_x \rangle = \frac{1}{B} \int_0^B q_x dy \quad (26)$$

式(22)は次のように書き換えることができる。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} [(-C\langle h \rangle + \langle q_x \rangle)B] + Ch_B \frac{dB}{d\xi} = 0 \quad (27)$$

無限上流位置 ($\xi \rightarrow -\infty$) における B (以下 B_- と表記) および断面平均流束 $\langle q_x \rangle$ は、一様定常流の式中で $h_s = h_-$ とすることにより、 h_- の関数として表すことができる。

以下、下流側の初期状態および下流側の表面高さと上流側の降伏面高さの相対位置関係により4ケースに分けて定常波の速度 C を求める。

Case-a1: $h_{0+} > -n$ かつ $h_+ > h_{0-}$ の場合

式(27)を ξ について $-\infty$ から ∞ まで積分すると

$$C = \frac{\langle q_x \rangle_- B_- - \langle q_x \rangle_+ B_+}{h_- B_- - h_+ B_+ + \int_{-\infty}^{\infty} h_B \frac{dB}{d\xi} d\xi} \quad (28)$$

式(28)の積分計算には h_B の値が必要である。

$$h_B = h(\xi, B) = \begin{cases} H(B) & (-\infty < \xi < 0) \\ h_+ & (0 < \xi < \infty) \end{cases} \quad (29)$$

式(29)を用いて式(28)の積分を実行すると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h_B \frac{dB}{d\xi} d\xi &= \int_{-\infty}^0 h_B \frac{dB}{d\xi} d\xi + \int_0^{\infty} h_B \frac{dB}{d\xi} d\xi \\ &= -\frac{mn}{4} [2\phi_{M+} - 2\phi_- + \sin 2\phi_{M+} - \sin 2\phi_-] + h_+ [B_+ - B_{M+}] \end{aligned} \quad (30)$$

ここでパラメータ ϕ の定義は式(15)に従うものとする。式(30)を式(28)に代入すると次のように C が求められる。

$$C = \frac{\langle q_x \rangle_- B_- - \langle q_x \rangle_+ B_+}{h_- B_- - h_+ B_{M+} - \frac{mn}{4} [2\phi_{M+} - 2\phi_- + \sin 2\phi_{M+} - \sin 2\phi_-]} \quad (31)$$

Case-a2 : $h_{0+} > -n$ かつ $h_+ < h_{0-}$ の場合

とにより流れ領域の側端位置 B が変化する領域では、流れの側端部は底面上に位置するので、 $h_B = H$ となり、その結果、式(30)は次のように表せる。

$$\int_{-}^{\infty} h_B \frac{dB}{d\xi} d\xi = h_+ [B_+ - B_-] \quad (32)$$

式(32)を式(28)に代入すると次のようになる。

$$C = \frac{\langle q_x \rangle_- B_- - \langle q_x \rangle_+ B_+}{B_-(h_- - h_+)} \quad (33)$$

Case-b1 : $h_{0+} < -n$ かつ $h_+ < h_{0-}$ の場合

下流側の流れが無い状態なので、この場合の速度は式(31)で $B_+ = 0$ として得ることができる。

$$C = \frac{\langle q_x \rangle_- B_-}{h_- B_- - h_+ B_{M+} - \frac{mn}{4} [2\phi_{M+} - 2\phi_- + \sin 2\phi_{M+} - \sin 2\phi_-]} \quad (34)$$

さらに、下流側が Dry Bed ($h_+ = -n$) となる極限の場合には、次のようになる。

$$C_{dry} = \frac{\langle q_x \rangle_- B_-}{h_- B_- + \frac{mn}{4} [2\phi_- + \sin 2\phi_-]} \quad (35)$$

Case-b2 : $h_{0+} < -n$ かつ $h_+ < h_{0-}$ の場合

下流側の流れが無い状態なので、この場合は式(33)において $B_+ = 0$ とする極限として C の表現式を得ることができる。

$$C = \frac{\langle q_x \rangle_-}{h_- - h_+} \quad (36)$$

式(17), (21)等を用いて B , $\langle q_x \rangle$ を計算すると、以上4ケースすべての場合において、定常波の位相速度 C がビンガムパラメータ α と上・下流側の水深 h_+ , h_- , および n の関数として定まり、 m には依存しないことを示すことができる。

(3) 定常波の位相速度の特性

$m = n = 1$, $h_- = 0$ とした場合の定常波の位相速度 C の α に対する変化を図-5に示す。先に述べたように、図中の領域は、下流側の初期状態 ($h_+ > h_{0-}$) および下流側の表面高さとお上流側の降伏面高さの相対位置関係 ($h_{0+} > -n$) により4領域に分割される。定性的な傾向

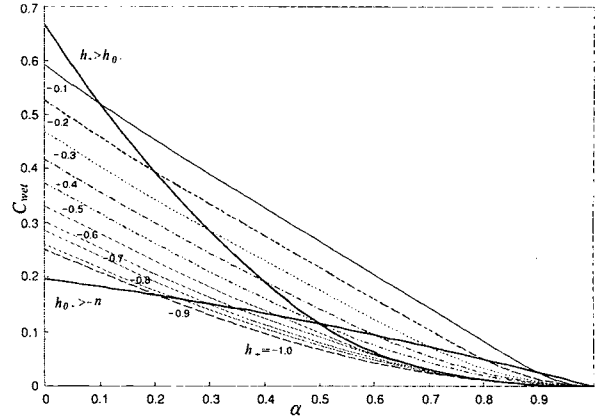


図-5 下流の初期状態 h_+ の変化に伴う C と α の関係 ($m=n=1$, $h_-=0$)

としては、下流側初期水深の減少およびビンガムパラメータの増加に伴って、 C が減少しゼロに漸近することがわかる。

5. 楕円チャンネル内を進行する定常波の数値解析

(1) 数値解析法

有限体積法に基づいた数値スキームを用いて、流体場の時間発展を式(1)に基づいて計算し、十分に長い時間が経過した時の解として定常波の形状や位相速度を算出した。空間の離散化に対してスタガード格子を導入し、すべての空間導関数は2次精度の中央差分で近似した。時間的な離散化には、ADIスキーム(時間2次精度)を用いる。

一般に流れ領域の境界は時間的に移動するが、数値計算は固定格子上で行った。境界の瞬時の位置を計算過程で追跡するため、それぞれの格子セルの界面で不等式 $\tau_b > \tau_0$ が満たされるかを確認し流量に対する適切な表現を使い分けることにより計算を行った。

数値モデルの妥当性の初期検証として、初期に $h=0$ で傾斜した平面を流れる定常波に対する計算を行った。 $t=0$ より流入境界 ($x=0$) で理論解に基づいて一定の流量を与え、格子幅 $\Delta x=0.02$ と $\Delta t=0.001$ を用いて、計算を行った。その結果と Liu & Mei (1989) による実験結果を比較したものを図-6に示す。泥流先端部の表面形状に関する両者の一致は極めて良好である。また、泥流

伝播の位相速度に関して理論値 (Liu & Mei 1989) と計算値との比較を行い、定量的にも十分な精度 (誤差 1%未満) で一致することを確認した。

(2) 数値解析結果

$m = n = 1$ の楕円チャネルにおいて、上流側の初期状態を $h_- = 0$ とし、定常一様流の解に基づいて流量を与え、 x 軸方向の流れが定常状態 ($dC/dt < 10^{-4}$) となる時刻まで計算を行った。この定常状態となるまでに要する無次元時刻 T は、主にビンガムパラメータ α に依存し、 α が大きくなるに伴って T は増加するという結果が得られた。なお、計算は下流側の初期状態を $h_+ = -1.0$ (dry bed) とし、ビンガムパラメータを $\alpha = 0.0 \sim 0.9$ まで 0.1 刻みに変化させて行った。

図-7 は、計算により求められた定常波の先端形状の例を示すものである。この例のように、初期の水深が浅い場合には、定常波の先端部は舌状の形状を取り、流れ領域の端部で急峻な表面勾配を持つ。一方、チャネル内の初期水深が十分に大きく、下流側でも流れが存在するような場合には、上流から下流への表面形の遷移は滑らかなものとなることを別途実施した計算から確認している。すなわち、定常波表面形に対する初期条件 (= 下流側境界条件) の影響は強い。一方、底面形状やビンガムパラメータが定常波先端形状に与える影響は比較的小さく、定性的にはおよそ類似した形状が得られた。

数値計算結果から求めた定常波の位相速度は、前節で求めた理論値と非常によく一致した (図-8)。

6. 結論

本研究では、ビンガム流体モデルに基づく理論および数値解析を行って、楕円断面を有する傾斜チャネル内における泥流の運動を解析した。まず、チャネル内の定常一様流の流体場に関する理論的検討を行い、チャネル内の速度分布や流量に関する理論解を誘導した。次いで、チャネル内を一定速度で進行する定常波の理論解析を行って、定常波の位相速度に関する理論式を新たに提示した。さらに、定常波の形成過程に関する数値解析を行い、初期条件、ビンガムパラメータおよびチャネル断面形状と定常波先端形状との関係を明らかにした。

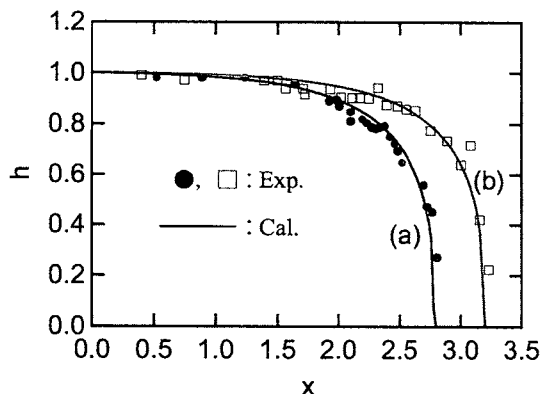


図-6 数値計算結果と実験結果の比較
(a) $\alpha = 0.437$, (b) $\alpha = 0.417$

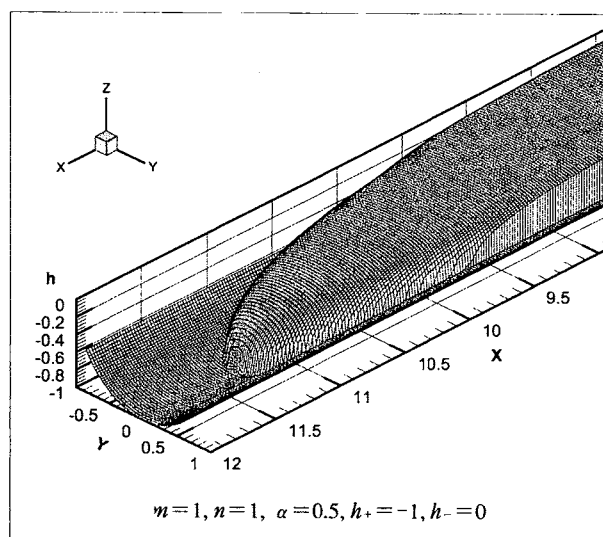


図-7 数値計算による定常波の先端形状

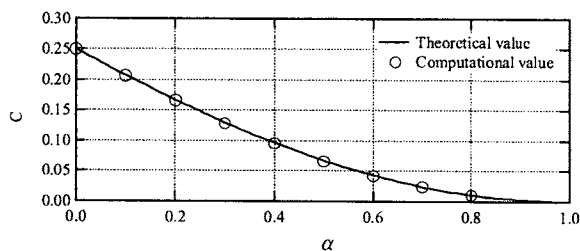


図-8 数値計算により求めた位相速度と理論値との比較
($m = 1, n = 1, h_+ = -1, h_- = 0$)

本研究で得られた結果は、温度変化が小さい場合の溶岩流の流動・堆積過程の検討にも適用可能である。また、無次元化の手法や、重力パラメータを調整することにより、解析理論を拡張し、底面の傾斜が大きい場合あるいは水中での泥流・溶岩流の流動・堆積過程の解析へと拡張することも可能である。

参考文献

- 1) Balmforth N.J., Burbidge, A.S., Craster, R.V., Salzig, J. & Shen, A. : Visco-plastic models of isothermal lava domes, *J. Fluid Mech.*, Vol.403, pp. 37-65, 2000.
- 2) Coussot, P, Proust, S. & Ancey, C. : Rheological interpretation of deposits of yield stress fluids, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol.66, pp. 55-70, 1996.
- 3) Coussot, P. : *Mudflow Rheology and Dynamics*, IAHR/AIRH Monograph, Balkema, Rotterdam, 1997.
- 4) Griffiths, R.W. : The dynamics of lava flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol.32, pp. 477-518, 2000.
- 5) Mei, C.C. & Yuhi, M. : Slow flow of a Bingham fluid in a shallow channel of finite width, *J. Fluid Mech.*, Vol.431, pp. 135-159, 2001.
- 6) Yuhi, M. & Mei, C.C. : Slow spreading of fluid-mud over a conical surface, *J. Fluid Mech.*, Vol.519, pp. 337-358, 2004.
- 7) Liu, K. F. & Mei, C. C. : Slow spreading of a sheet of a Bingham fluid on an inclined plane, *J. Fluid Mech.*, Vol.207, pp. 505-529, 1989.