

SGH校としての数学科の取り組み

数学科 大島 崇・川谷内 哲二・
戸田 偉・外山 康平

平成26年度から本校はSGH校に指定され、研究開発単位Ⅲ「グローバル・リーダー育成のための各教科の内容と方法の改善（教科のSGH化）」に取り組んできた。本校数学科は普通の授業の改善とともに様々な取り組みを行ってきた。本稿ではこの3年間で行ってきた学校内外における取り組みを紹介する。

キーワード：教科のSGH化

1. はじめに

本校は、平成26年度に文部科学書より「スーパーグローバルハイスクール」(SGH) 研究校の指定を受け、今年度がその3年目になる。研究開発の課題は「北陸からイノベーションで世界を変えるグローバル・リーダーの育成」であり、そのための方法として、1年次には「地域課題研究」, 「異文化研究」に取り組み、2年次は「グローバル提案」, 3年次は「グローバル・キャリア・パス」に取り組む。地域課題研究では、グローバル社会とつながる地域課題について、解決策を提案する。異文化研究では、台湾附属師範大学附属高級中学校の生徒と、日台文化の比較調査を行い、レポートにまとめる。グローバル提案では、グローバル課題の解決策を模擬国連会議方式で議論し、海外の高校生に発表する。グローバル・キャリア・パスでは、グローバル・リーダーとしての将来像と、そこに到達するためのキャリアパスを描く。これまでの総合的な学習の時間の取り組みをベースにして、さらに質の高い課題研究を実践するために、総合での学びの連動・発展、課題研究と調査内容の質的向上、英語運用力の更なる向上などを課題として取り組んでいる。このような状況の中で、既設教科のSGH化が必要である。既設教科のSGH化とは、課題研究とその発表のための基礎的

教養と技能を生徒に身に付けさせるように教材開発とその実践を進めていくことである。

2. 教科のSGH化

数学科としては、課題研究のためのデータ処理能力の育成として、統計処理の技能を高める教材開発を行うと同時に、社会課題に対する関心を高め、それを解決するために、日常の問題を取り上げ、その解決策を考える教材開発、普通の授業でも心がけていることであるが、生徒がより興味をもって主体的に活動できる教材開発などに取り組んできた。さらに、簡潔に自分たちの考えを発表する力の育成や、協働して課題に取り組む活動も重要であると考え、グループ学習や発表授業を取り入れている。

その中で今回は、3つの大きな取り組みについて報告する。A-lympiadを題材とした取り組み、IMMC（国際数学モデリングチャレンジ）への取り組み、算数・数学チャレンジクラブ（SGH特別講座）への取り組みである。

3. A-lympiadを題材とした取り組み

金沢大学附属高校数学科が、金沢大学の支援のもと、オランダの数学とコラボレーションした事業を行っている。それが、数学A-lympiadである。

もともとA-lympiadは、オランダのユトレヒト大学のフロイデンタール研究所の「数学A-lympiad委員会」によって組織された数学の競技会である。本家の競技では、日本でいう高校2年生～3年生を対象に、3、4人のチーム単位で、1日かけて行うものである。解答は、レポート形式で提出され、本選では口頭発表も行われる。主に、文系の数学を履修している生徒が参加することができるものである。

その特徴として、実世界での数学の応用、モデル化、高次の思考、問題解決プロセスを評価するもので、現実的な場面をとりあげていてかつオープンエンドであるうえに、問題解決型である問題である。そのため、問題を解釈し、方略を決定することを経て議論し、解へ至る全体の道筋を考えなくてはならない。

本校においては、授業の中で、2007年度予選問題である「休憩と労働」の問題に取り組んだ。平成26年に、行った内容は

「休憩時間をどう配分すれば生産性が最大となるか。理想的な労働のあり方を提案せよ。」

一方では、生産性を高めるように労働時間を考え、一方では雇用者にとって理想的な労働環境を考えなければいけない。このような「数学を深める数学」の側面ではなくて、どちらかと言えば、「現実社会に活かす数学」の側面が強い内容となっている。

取り組み方として、高校1年生の1チーム7人を1つの単位とした。本家の問題を2部に分け、前半の内容をA-lympiad①とし発表まで行い、後半の内容を一部改訂したものをA-lympiad②として、今回の発表まで至っている。

本家では、1日の取り組みとして扱っているが、本校においては、

A-lympiad①の考察と発表ポスター作製：授業4時間

A-lympiad①の発表：授業2時間

A-lympiad②の考察と発表ポスター作製：授業4時間

A-lympiad②の発表：授業2時間

という形で、運営した。

このプログラムは、附属学校GP（グッドプログラム）として、金沢大学に指定されている。簡潔に言えば、「金沢大学の支援のもと、オランダの数学コンテストに、教師と生徒がともに参加する」という試みである。

最終的な目標は、オランダの数学コンテストの考え方を、日本（特に、入試制度）に対して、導入すること、そのためのモデルとなることが 大学と本校の目標である。

Math A-lympiadとは

- Math A-lympiadは、オランダ・ユトレヒト大学が統括する国際数学コンテスト（16～18歳）。
- 金沢大学附属高校が今年東アジアで初参加。
- 予選：11月第2週に各国で開催（川谷内先生とオランダで現地調査）。
- 4人のチームを編成し、探究的でオープンエンドな課題に、午前9時から午後4時まで協働で取り組み、見出した解法をレポートにまとめて提出。
- 本選：3月第2週（金一土）オランダで開催。各国から最大2チーム参加。オランダ、ドイツ、ベルギー、デンマーク、キュラソー、イラン等。日本も。

附属学校GP

- 附属学校数学科と大学教員が金沢大学から4年間の研究プロジェクトを獲得。
- 2チーム（8名をオランダに派遣）。旅費は金沢大学から1人20万円を補助。
- 11月の土曜に附属高校で予選を実施予定。
- 問題は6～8頁程度の英文、レポートは日本語で。本選はすべて英語で。
- 希望者は4名のチームを編成し登録（今年度は大島先生がとりまとめ）
- 2チームを選抜し、いざオランダへ！

4. IMMC（国際数学モデリングチャレンジ）への取り組み

IMMCとは、アメリカの非営利会社COMAPが主催する数学コンテストの1つで、現実的な文脈をもった数学の問題を、チーム（1チーム4人以下）で解決し、レポートを作成し提出するというもの。ネット上での参加となる。対象は高校生で、期間は

3月中旬から5月中旬の中で、連続する5日間であればいつでも参加可能。参加国はオランダ、ドイツ、イタリア、ポーランド、ロシア、中国、アメリカなど。レポートの内容は評価され、順位付けされる。

昨年度、本校校長を通じて参加の打診があったため参加するに至った。上記の「A-lympiadを題材とした取り組み」とは異なり、授業の一環ではなく、コンテストに参加するというもの。

昨年度は1年生から希望者を募ったところ2チーム参加することができた。3月末から4月初旬の春休みに連続5日間を設定して行った。参加した生徒たちからは、「和訳英訳に苦戦した。」、「初めは意味が全く分からなかったが、仲間と協力することでわかるようになり、レポートを仕上げることができた。」、「難しかったが、楽しかった。」などの意見を得た。

今後は、コンテストへの参加の継続はもちろん、「A-lympiadを題材とした取り組み」とともに、受験数学とは異なる数学の問題の開発・実施に繋げていきたいと考える。

最後に、昨年度のテーマは「レコード保険」であった。問題の概略は以下の通りである。

- ① とある15km走の大会では、世界新記録が出たときに祝金25000ユーロが支払われるが、その一年当たりの平均額はいくらか。
- ② 祝金に対する保険を扱う保険会社が儲けを出すために設定する保険金の適切な額はいくらか。また、その時に考えられるべきファクターは何か。
- ③ 大会の運営委員会が保険に入るかどうかを判断する基準は何か？また、自家保険（自分でお金を積み立てること）をすべきか。
- ④ 同じように祝金を払うような種目が40個あり、それらの大会を開催する。この時、それぞれの種目に対して保険に入るか入らないかが選択できるが、何を基準に判断すればよいか。

- ⑤ 委員会が各種目に対して保険に入るか入らないかを決定する、汎用的なメソッドを作りなさい。ただし、誰にでも理解できて、普通の委員会でも行えるようにすること。

Extra 1ページの概要と20ページの解答を英語で書きなさい。

5. 算数・数学チャレンジクラブ (SGH特別講座) への取り組み

算数・数学チャレンジクラブとは、公益財団法人金沢子ども科学財団が実施する事業の1つである。算数・数学に興味や関心を持つ小学5年生から中学3年生を対象に毎月1回開催している。本校数学科教員は毎年この事業に講師として参加しており、SGH2年目の昨年度より特別講座を開かせてもらっている。場所・日時は以下の通りである。

場所：金沢大学附属高等学校

日時：平成27年8月30日（日）

平成28年6月26日（日）

両日とも9：45～12：00

対象は中学1年生から3年生で、昨年度、今年度ともに約90名参加した。ここでは特別講座の中の学年別講座（85分の講義）の紹介をする。

(1) 中学1年生「0から100までの整数を作ろう」

4つの4と様々な数学記号を用いて整数を作る数学パズルである。ここでは、参加者全員で0から100までの整数を作ることを目標にした。

使用する数学記号は、最初は+、-、×、÷と括弧のみとし、子どもたちの様子を見ながら徐々に増やしていった。使った記号等は次の通り。

1. +, -, ×, ÷
2. 括弧
3. 4を2つ並べて44とする
4. 平方根 (ex. $\sqrt{4}=2$)
5. 小数点 (4=0.4)
6. 4を2つ使って $4^4=256$ とする

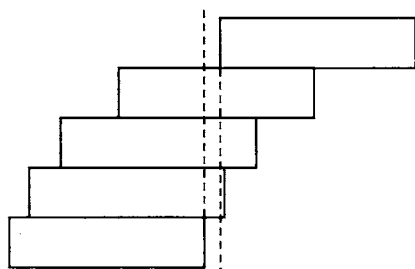
7. 階乗記号 ($4! = 24$)

8. 循環小数 ($\dot{4} = 0.44\dots$)

導入の時間を除くと実質60分程度しか取り組むことができなかったため、101個の数のうち60~70個しか作ることは出来なかったが、子どもたちは非常に楽しんでいただいていると思う。

(2) 中学1年生「ブロックと数学」

重心と調和級数を背景とした講義である。直方体の積み木（ジェンガを使った。）を複数個使って積み木を1個分ずらす方法を全員で考えるという内容。



ここから、理論上のずらし方を確認する。さらに、長方形を半分に分割し続けるとどうなるかの話をし、最後に、

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad \text{と} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

の違いについて確認をした。

面白いと思って使った内容であり、子どもたちの反応も良かったが、時間を持て余してしまった点が残念であった。「級数」や「積み木」でもう1つ話題があればよかった。

(3) 中学2年生「折り鶴と数学の話」

① 三角形の五心

特に折り紙において重要になってくる内心のことを理解させるために、まず、三角形の五心について整理する。

② 折り鶴を実際に折ってみよう

全員で、折り鶴を折ってみる。悲しいことに、

今の中学生は、折り鶴の折り方を知らない生徒が多い。折った後は、折り線を、線でなぞる。それを「鶴の設計図」と呼び、その線をなぞって折れば、鶴の形が作れることを確認する。

③ 正方形でない図形で折ったらどうなるだろうか。

台形や長方形、ひし形、正三角形など、様々な形の紙を折って、折り鶴を作ってみる。その際、先ほどの「鶴の設計図」をその図形に埋め込むことで、鶴がきれいに折れるかどうか、検証してみる。

④ 今度は、逆に、「鶴がきれいに折れるための図形の条件は何か」を考える。最後は、「対辺の長さの和が等しい」四角形でなら鶴を折れることに気づき、くちばしやしっぽの長さが違う鶴を折る。

(4) 中学3年生「トランプと数学」

(7) 授業のねらい

2つのカードマジックを通して、そこに潜む規則性、特に2進数との関わりについて体感してもらう。

(1) 授業内容

トランプを8枚用意し、以下のマジックを行った。

マジック1

あなたはマジシャンで、ステージの上に立っています。

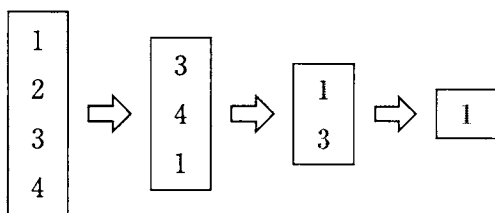
- ① お客さんの1人（Aさん）にステージに上がってもらう。
- ② よく切ったトランプを裏向きのままAさんに渡す。
- ③ 「この中から1枚をとって、お客さんみんなに見せて下さい。」
- ④ Aさんが見せたら、「残ったカードをトップに重ねて下さい。魔法をかけます。」と言う。
- ⑤ 「トップのカードを一番下に回し、2枚目のカードを捨てて下さい。」と言う。

- ⑥ それが進んだら、また「トップのカードを一番下に回し、2枚目のカードを捨てて下さい。」と言う。
- ⑦ これをカードが残り1枚となるまで繰り返してもらおう。すると、残ったカードがAさんが最初に選んだカードである！

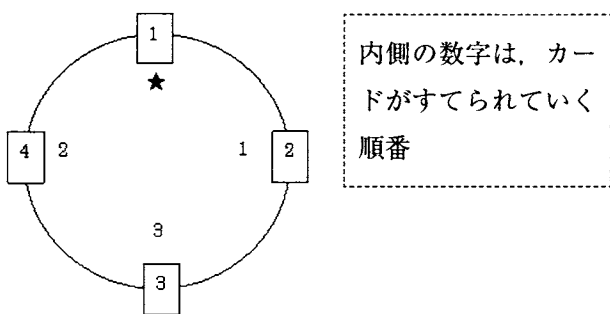
まず、「マジシャンは、①～⑦のどこで、どんなタネを仕掛けたでしょう？」と挙手を求めたところ、「おそらく、②か⑤では？という生徒が多かった。

次に、「カードが全部で4枚だったとします。上のカードから順番に1,2,3,4として、どのカードが残っていくか、実験しましょう。」と言い、以下の縦・円形の図を用いて確認した。

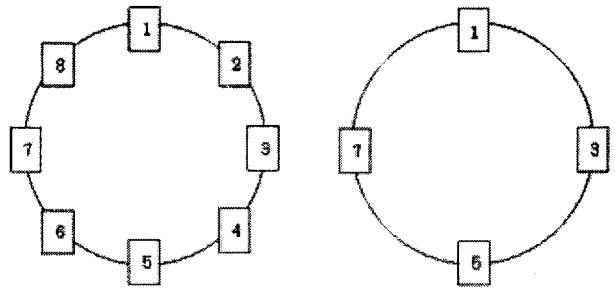
上 (トップ)



下 (ボトム)



「円状に並べた1,2,3,...,8のカードから2,4,6,8の順にカードを抜いて一周したとき、カードは半分の1,3,5,7になっている。」



このことから、カードが8枚のとき、最後に残るカードの番号は？」と問うたところ、「1」という答えが返ってきた。「種明かしと実演」は教員ではなく、気づいた中学生にお願いし、カードが2枚のときは必ず1枚目が残ることを全体で確認した。

「では、2枚でないときは？」ということで、マジック2である。

マジック2

あなたはマジシャンで、ステージの上に立っています。

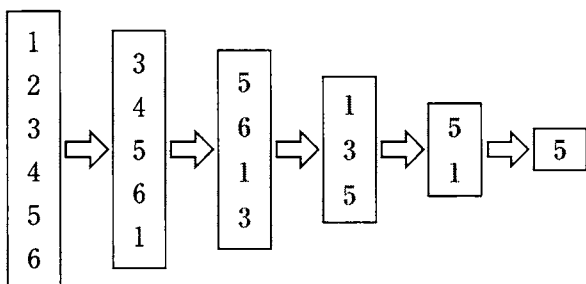
- ① お客さんの1人 (Aさん) にステージに上がってもらう。
- ② 好きな枚数のカードを引いてもらい、よく切って裏向きのままAさんに渡す。
- ③ 「この中から1枚をとって、お客さんみんなに見せて下さい。」
- ④ **Aさんが見せたら、「残ったカードをトップに重ねて、私に下さい。魔法のシャッフルをします。」と言う。**
カードを持ったまま両手を背中に回し、「シャッフル」する。
- ⑤ カードを前に出してAさんに渡し、「トップのカードを一番下に回し、2枚目のカードを捨てて下さい。」と言う。
- ⑥ それが進んだら、また「トップのカードを一番下に回し、2枚目のカードを捨てて下さい。」と言う。
- ⑦ これをカードが残り1枚となるまで繰り返してもらおう。すると、残ったカードがAさんが最初に選んだカードである！

「今度は、①～⑦のどこでタネを仕掛けたでしょう？」と問いかけたところ、

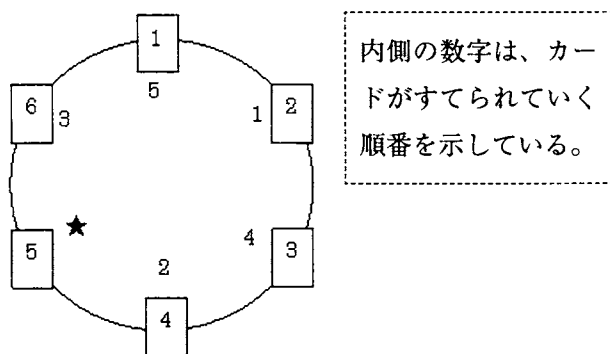
「おそらく、④だろう。」という答えが返ってきた。
(先ほどとの違いはそこしかない。)

続けてトランプが6枚だったとし、上のカードから順番に1,2,3,4,5,6として、どのカードが残っていくか、実験した。

上 (トップ)



下 (ボトム)



「6枚でなく、他の枚数なら上から何枚目が残るだろうか？ x 枚の実験で上から y 枚目が残るとして、表にまとめてみよう。」

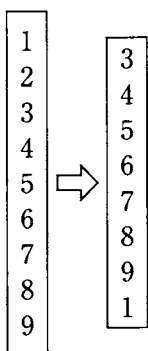
ただし、表の作成前に次の事実を共有した。

$x=9$ のとき、トップのカードを最後に回して2枚目のカードを除くと、カードの並びは図のようになる。

だから、たとえば

$x=17(=2^4+1)$ のとき、 $y=3$

$x=18(=2^4+2)$ のとき $y=5$



がわかる。

| 2進数 | x (枚) | y (枚目) | 2進数 |
|---------|---------|----------|------|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 2 | 1 | 1 |
| 11 | 3 | 3 | 11 |
| 100 | 4 | 1 | 1 |
| 101 | 5 | 3 | 11 |
| 110 | 6 | 5 | 101 |
| 111 | 7 | 7 | 111 |
| 1000 | 8 | 1 | 1 |
| 1001 | 9 | 3 | 11 |
| 1010 | 10 | 5 | 101 |
| 1011 | 11 | 7 | 111 |
| 1100 | 12 | 9 | 1001 |
| 1101 | 13 | 11 | 1011 |
| 1110 | 14 | 13 | 1101 |
| 1111 | 15 | 15 | 1111 |
| 10000 | 16 | 1 | 1 |
| ... | ... | ... | ... |
| 100000 | 32 | 1 | 1 |
| ... | ... | ... | ... |
| 1000000 | 64 | 1 | 1 |

具体例と表の作成作業を通じて、

「 $x=2^a+b$ (a, b は0以上の整数, $0 \leq b < 2^a$)のとき、 $y=2b+1$ である。」

ことが確認できた。

また、表の x, y を2進数表示して比較することにより、「 x を2進数表示して左端の1をとって右端にくっつけたら y 」ということ ($y=2b+1$) に気づいた生徒がいたため、全体で共有できた。

(ウ) 授業後の感想から、

「トランプマジックでは、一定の動きをするならカードの枚数や位置を工夫すれば他のマジックもできると思った。やってみたい、(3年生)」というものがあつた。その通りである。

教材観と取り扱い

今回の中学生講座の内容は、塵劫記の継子算(西

洋でいうヨセフスの問題)を簡略化したものである(継子算では2番目ではなく10番目であったり、途中で数え直しがあったりしてより複雑になっている)。こういった歴史的な話題にも少しだけ触れておいた。

今回は n 枚のカードで2枚目ごとに除いて最後に残るものを $f(n)$ とおいたが、 n 枚のカードで k 枚目ごとに除いて最後に残るものを $f_k(n)$ とおくと、合同式を学習していれば、次の漸化式を得ることができる。

$$f_k(n) \equiv f_k(n-1) + k \pmod{n}$$

これを利用して、生徒にExcelで計算させることもできる。下の表は、塵劫記の継子算の場合である。 $(n=16, k=10$ のときは数え始めが残る)

| n | $f_k(n)$ | $k=10$ | n | $f_k(n)$ | $k=10$ |
|-----|----------|--------|-----|----------|--------|
| 1 | 1 | | 9 | 8 | |
| 2 | 1 | | 10 | 8 | |
| 3 | 2 | | 11 | 7 | |
| 4 | 4 | | 12 | 5 | |
| 5 | 4 | | 13 | 2 | |
| 6 | 2 | | 14 | 12 | |
| 7 | 5 | | 15 | 7 | |
| 8 | 7 | | 16 | 1 | |

また、以前高校2年生対象に扱った際は、上記の内容に加えて

$$\text{漸化式} \begin{cases} f(2n) = 2f(n) - 1 \\ f(2n+1) = 2f(n) + 1 \end{cases} \text{も扱った。}$$

このように、同じ教材でも、生徒の学習段階に応じて取り扱いを工夫することができ、興味深い。

(5) 中学3年生「完全順列と平均」

選択問題をでたらめに解答したときに当たる確率はどうなるか、またその平均はどれだけかを考える。

①最初に、導入として受講者がでたらめに選択をする問題で実験してみる。

問題

問1 次の(1)~(3)に当てはまるブラックホールの名前を、①~③から選びなさい。

- (1) 回転がなく、電気を帯びていないブラックホール③
- (2) 回転はあるが、電気を帯びていないブラックホール①
- (3) 回転がないが、電気を帯びているブラックホール②

①カー・ブラックホール

②ライスナー・ノルドシュトルム・ブラックホール

③シュバルツシルト・ブラックホール

問2 次の(1)~(4)の事柄と関係の深い人物を①~④から1つずつ選びなさい。

- (1) 5次の代数方程式が、代数的に解けないことを証明した。
- (2) 微積分法を物理学、力学への応用に役立てた功績は大きい。また、円周率に π という文字を用い始めたことでも知られている。
- (3) 代数学の基本定理「複素数を係数とする代数方程式は複素数の解を持つ」ことを証明した。
- (4) 微積分学の形成者であり、微分、関数、座標などの用語を導入した。また、積分記号「インテグラル」も導入した。

①(ライプニッツ) ②(アーベル) ③(ガウス)

④(オイラー)

(問2では選択肢の人物名は表示せずに、でたらめに選択させて実験する)

10~20人程度で、でたらめに解答してもらっても、計算上の確率に近い値が得られる。

②次に、カードで実験してみる。

実験 ①~⑤の番号のカードを切ってでたらめに並べる。並べられたカードの番号と並ぶ順番が一致したカードの枚数を数える。

例えば、カードが $\boxed{4} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{5} \boxed{1}$ の順に並べられたとき、2番目、3番目にカード $\boxed{2}$ 、 $\boxed{3}$ が並

び、その他はカードの番号と順番が一致していないから、このときは2枚。この操作を20回繰り返して集計する。

③最後に、確率を計算して確かめてみる。

確率計算では、問題と選択肢の数が3と4の場合の平均と、5個の場合の全問不正解になる確率を扱っている。5個の場合の平均までは、時間と内容の難易から扱っていない。問題と選択肢の数が3個、4個のいずれの場合も平均が1となるので、問題と選択肢の数を増やした場合、どうなるかは予想しやすいので、5個の場合の残りについては、各自の課題ということで終わっている。実際の試験問題とは異なるが、それでも選択肢をでたために選択すると、当たる確率や平均が意外に低いと感じる生徒が多く、興味深く取り組んでいた。

6. 終わりに

平成26年度にSGHの指定を受けて、今年度が3年目であり、1年生から3年生までのカリキュラムが一通り実施されることになる。次年度以降、カリキュラムの見直しや内容の充実を図って、さらに研究を進めていくことになる。今回の発表では、A-lympiadを題材とした取り組み、IMMC（国際数学モデリングチャレンジ）への取り組み、算数・数学チャレンジクラブ（SGH特別講座）への取り組みについて紹介した。これらの取り組みは、日々の授業に活かされることは間違いないが、日頃の授業そのものではない。教科のSGH化が目指しているものは、普段の授業での取り組みであり、その授業を通して課題研究とその発表のための基礎的教養と技能の習得を図ることである。現行の学習指導要領では、数学的な活動を通して、理解を深め、考察し表現する能力を高めることが求められている。生徒の主体的な活動を重視し、効果的な学習方法ということで、アクティブ・ラーニングが注目されている。本校数学科では、主体的・協働的な学びが重要であ

ると考え、課題学習や発表授業をはじめとして、日頃の授業で学び合う場面をできるだけ多く取り入れることを心がけている。

今年度から、本校は3月にオランダで開催されるA-lympiadに正式に参加することになった。男女を問わず1チーム4名で構成され、11月23日に本校で予選を実施し、上位2チームをオランダの本選に派遣する。現在、本校内では2年生6チームが参加を申し出ている。予選問題は英文で書かれており、解答は日本語のレポートで作成する。派遣にあたり、生徒1人当たり20万円を補助する。将来的には、全国から予選参加チームを募り、その中から上位チームを本選に派遣するというシステムを築いていきたいと考えている。

今後は、A-lympiadやIMMCの問題を参考にしながら、より日常的な問題を題材とした教材開発に取り組みながら、より生徒が主体的・協働的に学び合えるような授業のあり方について研究を進めていきたいと考えている。