

# 数学的活動を重視した指導Ⅰ

## —新学習指導要領の新領域における教材開発—

数学科 川谷内哲二・塩屋 千学・戸田 偉・外山 康平

平成21年3月に公示された学習指導要領では、現行の学習指導要領よりさらに数学的活動が重視されている、このような背景の中で、本校数学科では、数学的活動を重視した指導について取り組むことにした。まず、「数学的活動とは何か」について、教員間でその概念を共有して、その上で教材の開発、授業の実践、他教科との関わりなどについて取り組んでいきたいと考えている。今年度は、その初年度に当たり、まずはその教材開発から取り組むこととした。高等学校の新学習指導要領では、数学Ⅰ、数学Aに新たな領域（データの分析、整数の性質、空間図形）が加わった。この領域における数学的活動を重視する教材の開発を試みた。本稿では、その教材例について紹介する。

キーワード：数学的活動，新学習指導要領，教材開発

### 1 はじめに

平成25年度から施行される高等学校における新学習指導要領が平成21年3月に公示された。数学と理科については、1年前倒しで平成24年度から施行される。

今回の改訂の背景には、確かな学力、豊かな心、健やかな体の調和を重視する「生きる力」をはぐくむことが重要であることが挙げられる。また、OECD（経済協力開発機構）のPISA調査などの結果から、我が国の児童・生徒については、

- ① 思考力・判断力・表現力等を問う読解力や記述式問題、知識・技能を活用する問題に課題
- ② 家庭での学習時間などの学習意欲、学習習慣・生活習慣に課題
- ③ 自分への自信の欠如や自らの将来への不安、体力の低下といった課題

が見られる。これを受けて、中央教育審議会の答申では、基礎的・基本的な知識・技能の習得、思考力・判断力・表現力等の育成、学習意欲の向上と学習習慣の確立などを基本的な考え方として、学習指

導要領の改善の方向が示された。

この答申の中で、算数・数学科の改善の基本方針について、概ね次のように示されている。

#### 改善の基本方針

- (ア) 発達の段階に応じ、算数的活動・数学的活動を一層充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付け、数学的な思考力・表現力を育て、学ぶ意欲を高めるようにする。
- (イ) 数量や図形に関する基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図る観点から、内容の系統性を重視しつつ、学年間や学校段階間で内容の一部を重複させて、発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程を編成できるようにする。
- (ウ) 数学的な思考力・表現力は、合理的、論理的に考えを進めるとともに、互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。このため、数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すようにする。

(エ) 子どもたちが算数・数学を学ぶ意欲を高めたり、学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにすることが重要である。そのために、

- ・数量や図形の意味を理解する上で基盤となる素地的な学習活動を取り入れて、数量や図形の意味を実感的に理解できるようにすること
- ・発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程により、理解の広がりや深まりなど学習の進歩が感じられるようにすること
- ・学習し身に付けたものを、日常生活や他教科等の学習、より進んだ算数・数学の学習へ活用していくこと

を重視する。

(オ) 算数的活動・数学的活動は、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付けるとともに、数学的な思考力・表現力を高めたり、算数・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感したりするために、重要な役割を果たすものである。算数的活動・数学的活動を生かした指導を一層充実し、また、言語活動や体験活動を重視した指導が行われるようにするために、小・中学校では各学年の内容において、算数的活動・数学的活動を具体的に示すようにするとともに、高等学校では、必修科目や多くの生徒の選択が見込まれる科目に「課題学習」を位置付ける。

この基本方針からわかるように、現行学習指導要領において、「数学的活動」を重視するように目標に掲げられているが、今回の改訂ではそれがさらに強調されている。今回改訂される高等学校学習指導要領の数学科の目標は、

数学的活動を通して、数学における基本的な概念や原理・法則の体系的な理解を深め、事象を数学的に考察し表現する能力を高め、創造性の基礎を培うとともに、数学のよさを認識し、それらを積極的に活用して数学的論拠に基づい

て判断する態度を育てる。

である。現行学習指導要領の目標と比較して、数学的活動を一層重視する意図が十分に表現されている。数学的活動を一層充実させるために、数学Ⅰおよび数学Ⅱに新たに「課題学習」が設置されることになった。現行指導要領で行われている数学の授業において、数学的活動がどの程度取り入れられているか、数学的活動をどの程度意識して授業が組み立てられているか、と問われると甚だ疑問である。先に示された基本方針や現場のこのような状況が、今回の改訂において「数学的活動」をさらに重視する要因になっているのであろう。

本校においては、学習指導要領の改訂を受けて、今年度から数学的活動を重視した教材および授業展開について検討することにした。まずは、本校において数学的活動をどのように捉えるか、さらにはその教材化を試みた。具体的には、新たに追加された領域、数学Ⅰのデータ分析、数学Ⅱの整数の性質、図形の性質（空間図形）において、数学的活動を重視した教材の作成に取り組むことにした。ここでは、その取り組みについて報告する。

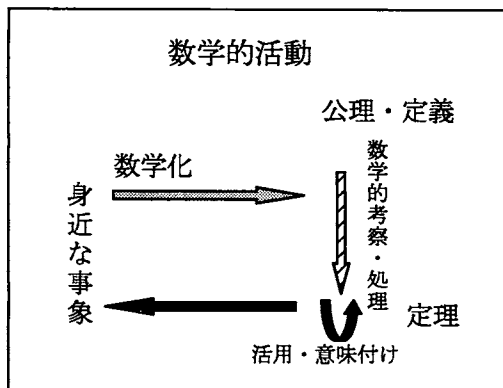
## 2 数学的活動とは

### (1) 学習指導要領解説による数学的活動の捉え方

現行の学習指導要領解説によると、数学的活動には、観察、操作、実験・実習などの外的な活動と、直観、類推、帰納、演繹などの内的な活動が考えられる。高等学校では、さらに次のような思考活動を数学的活動ととらえている。

- ・身近な事象を取り上げそれを数学化し、数学的な課題を設定する活動
- ・設定した数学的な課題を既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理し、その過程で見いだしたいろいろな数学的性質を論理的に系統化し、数学の新しい理論・定理等（「数学的知識」）を構成する活動

- ・ 数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり、構成した数学的知識の意味を考察の対象となった当初の身近な事象に戻って考えたり、他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動



高等学校における数学的活動では、内的な活動が中心となるが、数学化の場面や数学的考察・処理の過程では、観察、操作、実験などの外的な活動も含まれている。

## (2) 教科書に見られる数学的活動

先に示した学習指導要領解説によると、数学的活動にも内的な活動や外的な活動などいろいろな活動がある。そこで、数学的活動を次のように分類することにした。

### ① 数学化する活動

身近な事象を取り上げそれを数学化し、数学的な課題を設定する活動

### ② 数学を構成する活動

いろいろな数学的性質を論理的に系統化し、数学的知識を構成する活動

### ③ 数学を活用する活動

数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返ったり、身近な事象に戻って考えたり、他の具体的な事象の考察などに数学的知識を活用したりする活動

本校の1年生が使用している教科書(実教出版)に具体的な数学的活動について調べることにした。

数学I・数学A(新訂版)に記載されている導入や解説および例題、問題に見られる数学的活動を3つの数学的活動に分類してみた。それぞれの数学的活動の例をいくつか示しておこう。

#### ① 数学化する活動

- ・ 直角をはさむ2辺の長さの和が16である直角三角形がある。この三角形の面積が最大となるのは、どのような三角形のときか。
- ・ あるケーブルカーの軌道は、水平面と $25^\circ$ の傾きとなっている。山のふもとのA駅と、山頂のB駅までの路線の全長は1000mであるという。A駅とB駅の標高差と水平距離は何mか。
- ・ 100円、50円、10円の3種類の硬貨を使い、次のように300円を支払うには何通りの方法があるか。

- (1) どの硬貨も必ず1枚は使う。
- (2) 使わない硬貨があってもよい。

#### ② 数学を構成する活動

- ・ 数の範囲と四則計算を考えると、下の表のそれぞれの数の範囲で計算可能なものには○、そうでないものには×をつけよ。

	加法	減法	乗法	除法
自然数				
整数				
有理数				
実数				

- ・ 次の $a, b$ の値について、「 $a < b, c < 0 \Rightarrow ac > bc$ 」の関係が正しいことを確かめよ。
- ・  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  が成り立つことを、図を用いて確かめよ。
- ・ 次の( )の中に、「十分条件である」、「必要条件である」、「必要十分条件である」、「必要条件でも十分条件でもない」のうち最も適するものを記入せよ。ただし、 $x, y$ は実数とする。
  - (1)  $x=0$  は  $xy=0$  であるための( )。
  - (2)  $x+y=0$  は  $xy=0$  であるための( )。

### ③数学を活用する活動

- ・  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$  を展開せよ。
- ・ 次の二重根号をはずしてみよう。  $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
- ・ 2次関数  $y=3x^2-4x+2$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-2$ 、 $y$  軸方向に  $3$  だけ平行移動した放物線をグラフとする2次関数を求めよ。
- ・ 8人の生徒を、次のように分ける場合の数を求めよ。
  - (1) 2人ずつA, B, C, Dの4部屋
  - (2) 2人ずつの4つの組
- ・  $\triangle ABC$ において、3つの内角の二等分線は1点で交わることを、チェバの定理の逆を用いて証明してみよう。

教科書の例題・問題の分類でわかるように、個々の問題を明確に、①数学化する活動、②数学を構成する活動、③数学を活用する活動、に分類することは難しい。観点別評価の研究において、テスト問題による観点別評価を試みたが、1つの問題を4観点のいずれかに当てはめることも難しかった。むしろ、1つの問題が複数の観点を測る問題になっていることの方が多かった。数学的活動の分類においても、それと同様なことが言えるであろう。ただ、数学的活動については、このような分類が目的ではないので、そのことで検討を進める必要はない。それよりむしろ、これまでの数学の学習において、実に多くの数学的活動が行われてきたかを改めて実感している。このあと、数学的活動を重視した教材の作成について検討する。

### 3 数学1「データ分析」について

#### (1) 数学的活動を重視した教材の提案

##### 都市部の緑地におけるチョウの種数の問題

近年、チョウ類は開発や都市化によって衰退しつつあり、生息地の保護や種の保存が課題とされています。そこで、チョウ類の生息状況の調査のた

めに、鶴見区長であるあなたは、鶴見区にある鶴見緑地におけるチョウの種数を把握することになりました。下のデータから、大阪市とその周辺の緑地におけるチョウ類の種数と環境条件の関連を把握し、鶴見緑地のチョウの種数を見積もりましょう。ただし、鶴見緑地の緑地面積は72ha、樹林面積は25.2ha、50ha以上の緑地からの距離は4.2km、山からの距離は6.1kmとします。次の問いに答えなさい。

緑地公園	緑地面積	樹林面積	50ha以上の緑地からの距離	山からの距離	チョウの種数
北加賀屋	2	1.2	3.2	15.5	6
万代池	4.3	1.2	1.4	11.6	10
真田山	5.3	1.3	1.2	11.4	13
韮	9.7	5.8	2.1	14.2	16
大阪城	108	37.8	4.2	11.3	15
長居	65.7	26.9	3.5	10	28
エルシティ南港	50	13.5	2.7	21.3	20
大泉	88	37.8	0.6	9	23
服部	126	41.6	3.5	5.8	33

(ア) 大阪市の緑地の環境条件(緑地面積、樹林面積、50ha以上の緑地からの距離、山からの距離)のデータの中で、チョウの種数を見積もるために説明変数として何を最も重視するべきか。

(イ) (ア)で重視することにした説明変数をもとにして、鶴見緑地におけるチョウの種数を見積もってみよう。

(ウ) 環境条件とチョウの種数の関係について、気づいたことをあげてみよう。

#### (2) 授業のねらいとその位置づけについて

数学的活動を「生徒が主体的に活動すること、即ち受動的に教師の指示に従うような活動ではなく、生徒自身が必要だと感じ主体的に活動すること」と捉えたときに、具体的にどのようなことが授業の目標になるのであろうか。授業の目標、即ちチョウの種数に関する問題の中で期待したい数学的活動を分析してみると、次のものが考えられる。

・説明変数の重さを判断する活動

説明変数に対して、差の二乗和をとらえて比較しようと思うか、相関係数を使って比較しようと思うか、それ以外の方法を用いて比較しようと思うか、といった点に関して、生徒自身が方法を選択し、説明変数の重さを考える活動。

・近似曲線を引く活動

誤差の小さい近似曲線をかくことが前提となるが、いかなる近似曲線を用いるか。対数変換しようか、対数変換か、片対数変換か、など様々な近似曲線の引き方が想定される。もっとも誤差の小さいものは両対数変換による近似曲線の引き方になるが、生徒が自ら誤差の少ない近似曲線を考えて、それにしたがってチョウの種数を見積もる活動。

これらの数学的活動を授業で行うために、どのような準備が必要になるだろうか。新学習指導要領において、「データ分析」は数Ⅰにおいて扱われているが、この教材の中では特に、次のことを扱う。

- ・ 散布図と相関
- ・ 最小2乗法と最小2乗線
- ・ 対数変換による回帰直線

したがって、授業の位置づけを考えれば、上の3つの知識が必要とされるために、単元の最後において発展的な内容として扱うことが想定される。

(3) 教材の展開

まず、(ア)に対して、相関の強さの違いをとらえていく。

○アプローチ1

チョウの種数の昇順順位、緑地面積の昇順順位、樹林面積の昇順順位、50ha以上の緑地からの距離の降順順位、山からの距離の降順順位について、目的変数と説明変数の順位の差の2乗の和の大きさを根

拠に考えてみる。

緑地公園	緑地面積	樹林面積	50ha以上の緑地からの距離	山からの距離	チョウの種数
北加賀屋	9	8	6	8	9
万代池	8	8	3	6	8
真田山	7	7	2	5	7
韮	6	6	4	7	5
大阪城	2	2	9	4	6
長居	4	4	7	3	2
エルシティ南港	5	5	5	9	4
大泉	3	2	1	2	3
服部	1	1	7	1	1
差の2乗和	22	27	135	44	

チョウの種数の昇順順位、緑地面積の昇順順位、樹林面積の昇順順位、50ha以上の緑地からの距離の降順順位、山からの距離の降順順位と差の2乗和について差の2乗和が最も小さいことから、チョウの種数に最も強く相関がある説明変数として、緑地面積があげられる。

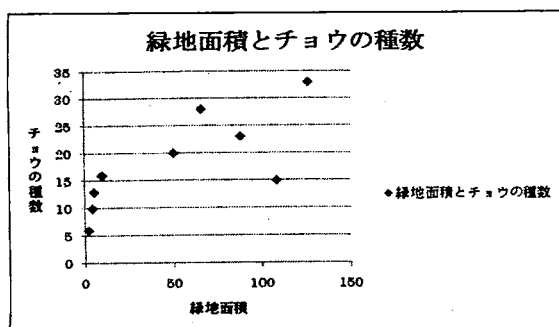
○アプローチ2

チョウの種数と各データとの相関係数を求めてみる。

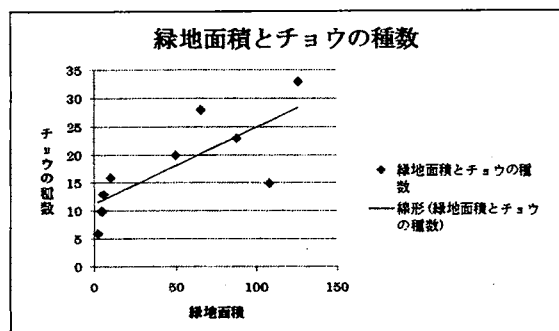
緑地公園	緑地面積	樹林面積	50ha以上の緑地からの距離	山からの距離	チョウの種数
北加賀屋	2	1.2	3.2	15.5	6
万代池	4.3	1.2	1.4	11.6	10
真田山	5.3	1.3	1.2	11.4	13
韮	9.7	5.8	2.1	14.2	16
大阪城	108	37.8	4.2	11.3	15
長居	65.7	26.9	3.5	10	28
エルシティ南港	50	13.5	2.7	21.3	20
大泉	88	37.8	0.6	9	23
服部	126	41.6	3.5	5.8	33
相関係数	0.76	0.76	0.22	-0.48	

この結果からも、相関係数が最も1に近い緑地面積が、チョウの種数と最も相関が強いことがわかる。

次に(イ)に対し、緑地面積に着目して、散布図に対して最小2乗線をひく。

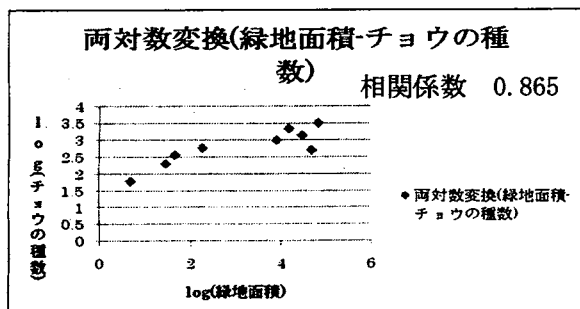


このまま、最小2乗線を引くと次のようになる。

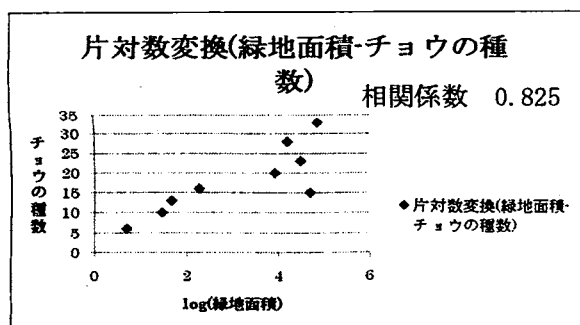


しかし、散布図をみると、データの並びが線形でないといえることができる。ゆえに、ここで、対数変換によって、新たに散布図をとり、最小2乗線をひいてみる。

#### 両対数変換による散布図

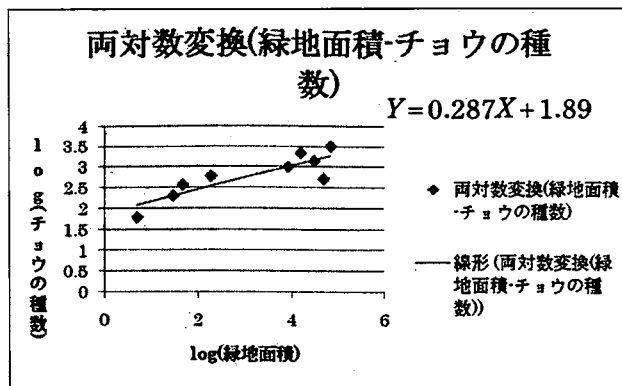


#### 片対数変換による散布図



対数変換ということで、片対数変換と両対数変換

の2つの変換のうち、どちらのほうが高い相関をもつかが問題となる。ここでは、相関係数に着目することによって、両対数変換の散布図のほうが高い相関をもつと読み取ることにより、両対数変換の散布図から、チョウの種数を見積もる。



ここで、 $X$ に4.28 ( $\approx \log 72$ )を代入する。結果、 $Y=3.12$ を得る。ゆえに、 $y=e^{3.12} \approx 22.65$ を得る。

即ち、鶴見緑地のチョウの種数を23と見積もることができる。

(ウ)に対し、データから生物学的に読み取れることの例を、以下にあげる。

- ・樹林面積と種数の相関よりも、緑地面積と種数の相関のほうが高かったことから、樹林単独より樹林に草地や裸地なども含めた空間的広がりのほうがチョウの種数に強く影響する。
- ・山からの距離と種数との関係から、相関が弱いといえども、山から遠ざかるにつれて種数が少なくなる傾向が窺える。

データの見方は様々であり、いろいろな見方によっていろいろな生物学的解釈を得ることができる。生徒たちが自ら着目した見方から、生物学的解釈を試みる活動を期待したい。

#### (4) 教材についての考察

まず先に、それぞれのデータの項目を説明変数としたときの、チョウの種数の見積もりを出すことか

ら始まったほうがいいのかも。その後、それぞれの子測値について、「どれが最も信頼できる子測値なのだろうか」と促し、各説明変数と目的変数との相関の強さの考察に展開していくほうがいいのかも。

相関係数を求めたり、最小2乗線を計算する際に、ここではコンピュータ（エクセルの関数）を用いたが、実際の授業においては生徒たちはいかにして求めるのか。グループ学習にして、グラフ電卓を用いるほうがいいのかも。ノートパソコンを用いてもいいかもしれない。いずれにせよ、手計算では難しいので、コンピュータ機器が必要になると思われる。

結果があまり近い値を見積もっていない気がする。もう少し、計測値に近い値を見積もるようにできれば、教材の達成感も高まると思われる。そのための教材に対する工夫としてどのようなことが必要だろうか。この点についても、さらに考察する必要があると思われる。

#### 4 数学A「整数の性質」について

##### (1) 「整数の性質」における教材例

整数の性質については、小学校以来学習してきたがまとめて扱われてはいなかった。そこで、今回の改訂から設けられたのがこのセクションである。

以下に新指導要領における内容と、学習項目の概要を記す。

<p>数学A</p> <p>(2) 整数の性質</p> <p>整数の性質についての理解を深め、それを事象の考察に活用できるようにする。</p> <p>ア 約数と倍数</p> <p>素因数分解を用いた公約数や公倍数の求め方を理解し、整数に関連した事象を論理的に考察し表現すること。</p>
---

ここでは、中学校までに扱ってきた整数に関する約数や倍数などの基本的な用語や3の倍数や5の倍数の見分け方などの基本的な事項を振り返ってまとめ、論理的に考察して整数の性質についての理解を深める（学習指導要領解説より）。

例えば、2数の掛け算が筆算形式で表された虫食い算や覆面算を扱い、楽しみながら整数の性質の理解を深めさせることや、二つの整数 $a, b$  ( $a > 0$ ) について、 $b = aq + r$  ( $q$ は整数,  $r = 0, 1, 2, \dots, a - 1$ ) という表現や割り算の余りによる分類を利用して整数の性質を考察させる。素因数分解の一意性を認めた上で、2つ以上の整数の公約数・公倍数の求め方を学習する。

また、数学Iの最初に移行した背理法を用いて素数が無数に存在すること（ユークリッドの証明）なども考えられる。以下に、考えられるいくつかの教材例を挙げる。

- 1～100の整数を書き出し、エラトステネスの篩を行う。その際、どの数の約数までを調べれば良いか
- 素因数分解を用いた約数の個数と総和の求め方
- カレンダーの曜日の問題。例えば、

問1 平成24年（西暦2012年）、S君（1月1日生まれ）は17歳だった。S君が生まれてから60歳になるまでに、西暦の年号がS君の年齢で割り切れる年は何年あるか。

( $a$ =西暦の年号  $b$ =S君の年齢 とすると  $a$  が  $b$  で割り切れる  $\Leftrightarrow (a-b)$  が  $b$  で割り切れる

つまり、 $a-b=1995$  の約数を考えればよいので 1, 3, 5, 7, 15, 19, 21, 35, 57の9年)

問2 今日(2009年8月27日(木))ですが、来年の今日は何曜日でしょうか。ただし、2010年は閏年ではありません。

( $n$ 日後の曜日を考えるために、表にする

木	金	土	日	月	火	水
(0)	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	361	362	363
364	365					

1日後と同じだから 金曜日)

イ ユークリッドの互除法

整数の除法の性質に基づいてユークリッドの互除法の仕組みを理解し、それを用いて二つの整数の最大公約数を求めること。また、二元一次不定方程式の解の意味について理解し、簡単な場合についてその整数解を求めること。

整数係数の二元一次不定方程式の整数解は、1つ求まれば他の全てを求めることができる。これは従前の課程でもよく扱われていた。しかし、具体的にその1つ目の解(特殊解)を求める手法は教科書では提示されていなかった。ユークリッドの互除法によって、特殊解を求めることができるようになり、学習の見通しが良くなることが期待される。

また、互除法の途中で表れる商の数と連分数展開との関係や、面積を用いた理解などの工夫が考えられるだろう。以下に、考えられる教材例を挙げる。

- $x, y$ を整数とするとき、 $4x+6y, 2x+3y$ のとりうる値を調べ、最小の正の値を予想する。気付いたことを述べさせる。

↑y	4	-8	-2	4	10	16	22	28	34	40	
	3	-12	-6	0	6	12	18	24	30	36	
	2	-16	-10	-4	2	8	14	20	26	32	
	1	-20	-14	-8	-2	4	10	16	22	28	
	0	-24	-18	-12	-6	0	6	12	18	24	
	-1	-28	-22	-16	-10	-4	2	8	14	20	
	-2	-32	-26	-20	-14	-8	-2	4	10	16	
	-3	-36	-30	-24	-18	-12	-6	0	6	12	
	-4	-40	-34	-28	-22	-16	-10	-4	2	8	
		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	→x

↑y	4	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20	
	3	-6	-3	0	3	6	9	12	15	18	
	2	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	16	
	1	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14	
	0	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12	
	-1	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	
	-2	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	
	-3	-18	-15	-12	-9	-6	-3	0	3	6	
	-4	-20	-17	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	
		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	→x

ウ 整数の性質の活用

二進法などの仕組みや分数が有限小数又は循環小数で表される仕組みを理解し、整数の性質を事象の考察に活用すること。

十進法の表記法を見直し、 $n$ 進法の仕組みを考えさせる。例えば、三進法では $\frac{1}{3}=0.1_{(3)}$ となることなどを考えさせたりして、数の表記法についての理解を深める。

また、分数を小数で表現すると、有限小数又は循環小数となる。有限小数となるのは分母の素因数が2, 5のみの場合であることを確認する。

(2) 課題学習における「整数の性質」

指導要領の解説では、塵劫記の油分け算や九去法が紹介されている。他にも2元1次不定方程式は、西暦350年ごろアレキサンドリアに生存したとされるDiophantusが著書「算術」の中に記していたことから「ディオファントスの問題」と呼ばれていることを紹介し、次の有名な話題の類題を作ることをさせてもよい。

問3 次の文は、Diophantusに関するギリシャ詩文集の一節である。彼は生涯何年生きたかを求めなさい。

「ディオファントスの人生は、 $\frac{1}{6}$ が少年期、 $\frac{1}{12}$ が青年期であり、その後に人生の $\frac{1}{7}$ が経って結婚し、結婚して5年で子供に恵まれた。ところ



がその子供はディオファントスの一生の半分しか生きずに世を去った。自分の子を失って4年後にディオファントスも亡くなった。」

( $x$ 年生きたとすると $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$ より $x=84$ (年))

また、塵劫記やディオファントスといった過去の物に注目してもよいが、未解決問題に触れる、という活動も考えられる。

金沢市には、平成16年度に金沢大学の太谷実教授が中心となって始めた、「算数・数学チャレンジクラブ(以下数CC)」という取り組みがある。

算数・数学に興味のある小学5年～中学3年の児童生徒を対象に、1回120分、年間12回程度の特別授業を行っているのだ。

本校の教員も、平成17年度から数CCの講師として参加しており、その中で中学生対象に行なった活動に、次のものがある。

#### 未解決問題に挑戦！(平成18年 数学CC)

##### ・授業プリントより抜粋

ゴールドバッハ予想(1742年)  
4以上の偶数=素数+素数?

問 ゴールドバッハ予想を確かめてみよう!

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$

$$12 =$$

$$14 = \quad =$$

.....

$$34 = \quad = \quad = \quad =$$

.....

$$48 = \quad = \quad = \quad = \quad =$$

.....

$$60 = \quad = \quad = \quad = \quad = \quad =$$

一見、正しそうなのですが、コンピュータでいく

ら大きな偶数まで調べても、予想が正しいことを示したことにはなりません。どこかで反例(素数+素数とならない4以上の偶数)が見つければ、「予想は正しくない」という結論が得られますが……。

「ゴールドバッハ予想が解決できた人には100万ドル(約1億1千万円)あげる!!」

2000年にはアメリカとイギリスの出版社からの懸賞金がかかりましたが、誰も解けていません。

数学の世界には、ゴールドバッハ予想のように長い間誰も解けていない問題や、フェルマーの大定理のように何百年もたってやっと解けた問題があります。

今日は、いつものように「解ける問題」ではなく、誰も解けていない問題に触れてみましょう……

コラッツ予想(日本では角谷予想)  
自然数 $n$ が奇数なら3倍して1を足し、偶数なら2で割る。これを繰り返すと、最初にどんな自然数 $n$ を選んでも、いつかは $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ を繰り返す。

問 コラッツ予想を確かめてみよう!

$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

$$2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

$$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

$$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

.....

$$27 \rightarrow$$

……いくつかの未解決問題について実験し体感……

問 これまでに見てきた予想のうち、21世紀の間に解けそうな予想は?また、解けるとしたら、どんな形で?

##### ・終了後の考察

ゴールドバッハ予想は、1通りで良いのだが、何通りに表せる数が出てくることを感じてもらうため、すべての表し方を考えてもらった。

コラッツ予想の27では、非常に長い計算の末に  
1→4→2→1となる。

時間を時間内には計算の終わらず、悔しがった生徒もいたが、作業を通して未解決問題を味わうというのは、概ね好評だった。

高校生対象のものにアレンジするには、Excelで実験して枝の長さを検証するなどの工夫が必要と思われる。

## 5 数学A「空間図形」について

### (1) 新学習指導要領における図形の扱い

数学における図形の指導、特に空間図形に関する指導は、「個人個人が主観的に捕らえている図形概念をより客観的な数学的図形概念の認識へと捕らえなおすこと」と「よりバランスのとれた図形概念・図形感覚を育成すること」が大切である。そして、より優れた図形感覚を育成するには、視覚的に解釈すること、小さいころから視覚的に解釈するための図形指導を系統的に行うことが必要である。しかし、現在の初等中等教育においてはイメージができていないままに、言語的表現などが発達し、正しい図形概念が描けていない可能性がある。実際に高等学校の現場でも、「立体の切断面の形が想像できない」「立体の展開図が描けない」などのつまずきが多い。

今回の指導要領の改訂により、数学Aの図形の性質の内容には「平面図形や空間図形の性質についての理解を深め、それらの事象の考察に活用できるようにする。」とある。そして「作図（基本的な図形の性質などをいろいろな図形の作図に活用すること）」が新設された。また「空間図形」も新設され、「多面体などに関する基本的な性質について理解し、それらを事象の考察に活用すること」となっている。

これらのことを踏まえ、この領域の教材として次のものを考えた。

(2) 「数学的活動」を重視した空間図形の指導の具体例

テーマ 同じ高さの正多面体の立体模型を作成しよう。

1. 正多面体の一辺の長さを2として、正多面体のそれぞれの展開図を描き、模型を作成する。

このときに

○正多面体の性質 ○基本的な図形の作図

○立体の展開図

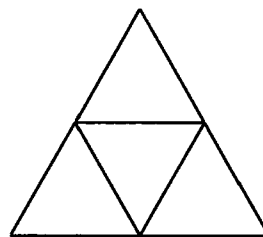
などの基本的な内容を理解し、それを活用しながら、それぞれの展開図を作図する。

→ 一辺の長さが2の正三角形、正方形の作図はすぐにできるであろう。正五角形はどのように作図したらよいか考察させる。このとき三角比や2次方程式などの知識を活用して作図できることに気づかせたい。

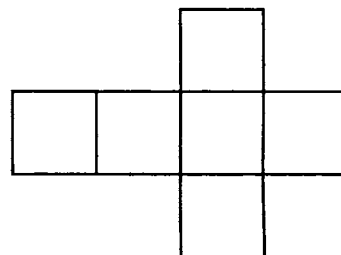
課題1. (1) 正多面体は五種類ある。これらの展開図を作図しよう。



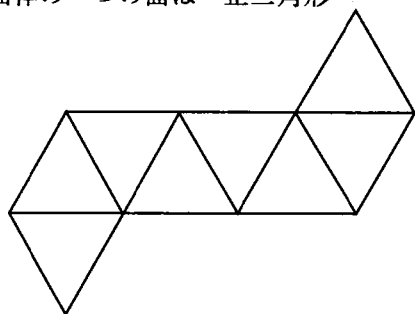
正四面体の一つの面は 正三角形



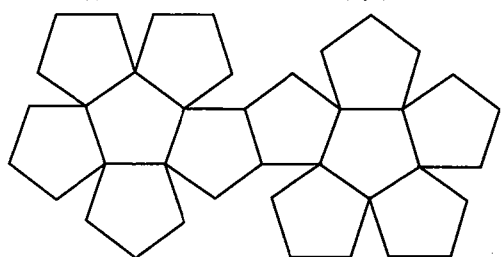
正六面体（立方体）の一つの面は 正方形



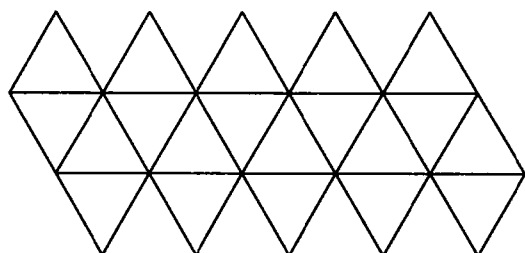
正八面体の一つの面は 正三角形



正十二面体の一つの面は 正五角形



正二十面体の一つの面は 正三角形



課題 1. (2) 作図した展開図から模型を作成しよう。

紙に描いた上の展開図を切り取り，正多面体を作成させる。

2. 作成した模型から，それぞれの正多面体の高さを計算させる。

このときに

○空間図形の高さの概念

○三角比など高さの計算に必要な知識

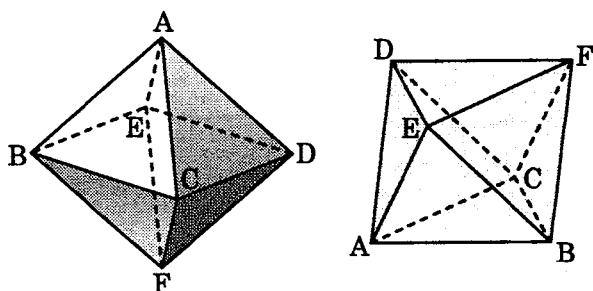
などを活用しながら高さを計算する。

→ 立体の高さの定義をする。立体の高さはどのように計算すればよいか考察させる。

一つの面を底面として平面上に置いたときに，その平面と垂直な平面で立体を切断したときの切断面の考察や，ある方向から見たときの立体の見え方が想像どおりか体験させたい。

課題 2. (1) 正多面体の高さを計算しよう。

例えば正八面体は図の $\triangle ABC$ を底面としたときに $\triangle DEF$ は底面に平行であるからこの2つの面の距離を計算することになる。またこのとき立体を真上から見ると，正六角形に見える。



課題 2. (2) それぞれ一辺の長さをいくらにすれば同じ高さになるだろうか。

この教材例では，先に正多面体の一辺の長さを適当に定めて展開図を描き，模型を作成させた。それを用いて，立体の高さを考察させる展開となっている。これは，具体的に模型を作成することによって，あるいはそれを手にとって考察することで，より客観的な図形的概念の認識になると考えたからである。しかし，場合によっては，模型を作成する前に同じ高さになるように一辺の長さを計算させてから，模型を作成して確かめる順もある。

生徒たちが，このテーマをどのように捉え，どのように考察を進めながら「数学的活動を通して」平面図形や空間図形の性質についての理解を深め，それらの事象の考察に活用できたかが鍵となるのであろう。

## 6 おわりに

今回の取り組みは，新学習指導要領においてさらに重視された「数学的活動」を重視した指導である。今年度から数年間にわたって，この数学的活動について取り組んでいく予定であり，最初は，本校における「数学的活動」を明確にするために，数学的活

動を重視した教材の分析および開発に取り組んでみた。

これまでの教材および教科書の問題を、改めて数学的活動という観点で見直してみると、実は、数学的活動が随所に行えることがわかった。それを重視するか否かは、数学的活動をするという意識を持って授業に臨んでいるかどうかが重要である。ただ、それだけでは十分でなく、そのための工夫もまた必要である。

今回取り上げた教材は、新学習指導要領に追加された領域である。最初のデータ分析の教材例では、片対数変換、両対数変換、回帰直線など、数学Ⅰの範囲を超えた内容を含んでいる。また、相関係数などの計算では、標本数の少ないデータの処理は手作業でも行えるが、ある程度標本数が多くなるとコンピュータに頼らざるを得ない。具体的には、Excelなどの表計算ソフトを使用して授業を展開することになり、情報科との連携を考えた方がよい。

整数の性質では、エラトステネスの篩やカレンダーの曜日の問題、コラッツ予想なども手計算でも可能であるが、大きな数を扱ったり、アルゴリズム的に処理することを考えると、コンピュータなどの活用も有効である。3例目である空間図形において、「立体の切断面の形が想像できない」、「立体の展開図が描けない」などのつまずきが多いなど空間感覚・空間認識力がやや劣っている生徒がいる。切断面を考えたり、展開図を作成してそれをもとに模型を作る前に、3Dグラフィックソフトなどで立体を見せることも必要かもしれない。

今回は、数学的活動が取り入れられる場面を想定した教材の紹介が中心であるが、ここで述べたように、コンピュータの活用やグループ学習など、授業方法や授業形態によって、数学的活動の内容や授業におけるその重みも異なる。今回は、これらの教材を含め、新たな教材を開発し、それらをもとに数学的活動を重視した指導の授業実践について取り組み

たいと考えている。

(文責 1・2・6 川谷内, 3 外山, 4 戸田, 5 塩屋)

〔参考文献〕

- 1 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編 平成11年12月 (文部省)
- 2 高等学校学習指導要領 平成21年3月 (文部科学省)
- 3 高等学校学習指導要領解説 数学編 平成21年7月 (文部科学省)
- 4 数学Ⅰ 新訂版 (実教出版) 岡本 和夫
- 5 数学A 新訂版 (実教出版) 岡本 和夫
- 6 数学的活動の一考察 —数学Ⅰ・Aの内容別の教材紹介を中心に— 川崎 宣昭  
研究紀要 第49号 2008年3月  
筑波大学附属高等学校
- 7 異学年交流の試み —4・4・4制を見据えて—  
数学科 高校教育研究 第59号 2007  
金沢大学附属高校内高校教育研究会
- 8 「全国環境研会誌」VOL30 2005年  
『島の生物地理学理論の応用による都市緑地の  
チョウ類多様性評価』. 今井長兵衛.  
[http://ecotech.nies.go.jp/region/journal/JELA\\_3004014\\_2005.pdf](http://ecotech.nies.go.jp/region/journal/JELA_3004014_2005.pdf)