

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 2 日現在

機関番号：13301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654005

研究課題名(和文) 対称空間の  $q$  類似の研究： association scheme の枠組による研究課題名(英文) A study of  $q$ -analogues of symmetric spaces in the framework of association schemes

研究代表者

伊藤 達郎 (Ito, Tatsuro)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：90015909

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000 円、(間接経費) 810,000 円

研究成果の概要(和文)：  $P$  かつ  $Q$  多項式スキームの Terwilliger 代数には I 型, II 型, III 型があり, その既約表現の構造は I 型のみが決定されていた. すなわち I 型については, 指標公式に現れる分解に応じた構造を持つことが示されていた. II 型, III 型についても指標公式が成立し, 同様のことが言えるであろうと予想されていたが, 本研究において, この予想を肯定的に解決した. 実質的に行ったことは, II 型, III 型の TD 対が「L 対のある種のテンソル積」になることを示し, その分類を完成させたことである. 副産物として, TD 対に関する指標公式が証明された.

研究成果の概要(英文)： It is conjectured about the Terwilliger algebras of  $P$ - and  $Q$ -polynomial schemes that a character formula holds for their irreducible representations, and in turn that their irreducible representations have a structure that corresponds to the decomposition of the character formula. This conjecture was known to be true for the case of type I and left open for the remaining cases, i.e., the cases of type II, III. In this study, we have settled the conjecture affirmatively by showing TD-pairs of type II, III are certain kind of tensor products of L-pairs. As a result, it is shown that a character formula holds not only for TD-pairs of type I, but also for those of type II, III.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

 キーワード： 離散的対称空間  $P$  かつ  $Q$  多項式スキーム Bose-Mesner 代数 Terwilliger 代数 Leonard 対 Tridiagonal 対 Askey-Wilson 多項式 アフィン量子群

## 1. 研究開始当初の背景

P かつ Q 多項式スキームを compact symmetric space of rank 1 の離散版とみなしその分類の提唱がなされたのは、1970年代後半の坂内英一氏のオハイオ州立大学の講義にさかのぼる。坂内氏のこの提唱は豊富な実例に基づいてのものであったが、その後、P かつ Q 多項式スキームの Bose-Mesner 代数の表現論が Leonard, Bannai-Ito によって整備され、現在では P かつ Q 多項式スキームの分類問題は代数的組合せ論の中心的課題として位置付けられている。最近では、Bose-Mesner 代数よりも更に精密な Terwilliger 代数が Terwilliger によって導入され、その表現がアフィン量子群との関連で研究されており、分類に必要な表現論的道具はほぼ整えられつつある。すなわち、P かつ Q 多項式スキームについては表現論的な道具が完成されつつあり、分類そのものに本格的に取り掛かる機運が高まっている。一方で、P かつ Q 多項式スキームの higher rank 版に関しては、現状では何も手が付けられていない。

## 2. 研究の目的

以上の背景のもと、本研究では rank 1 から higher rank へ移行することに挑戦した。すなわち higher rank の compact symmetric space の離散版について

- association scheme の枠組みで定義し、
- なるべく多くの実例を集め、
- Bose-Mesner 代数の表現論を構築する

ことを目指した。

## 3. 研究の方法

上の目的を達成するために、実際には c), b), a) の順序で研究を進めた。rank 1 から higher rank への移行は、現在のところ、表現論的に行う方が筋道が見えてくるからである。

rank 1 の場合には Terwilliger 代数の表現がアフィン量子群と関連することに注目する。すなわち rank 1 で generic な場合には、Terwilliger 代数の標準加群には、アフィン量子群がある意味で作用するので、compact symmetric space of rank 1 の q 類似を、表現論のレベルでは association scheme の枠組みで考えることが可能である。ここで幾何学的構造と表現との間にある種の双対性が成立することを予想して、higher rank への移行を試みる。Bose-Mesner 代数の表現論は Terwilliger 代数の主表現に帰着

する。Terwilliger 代数の標準加群では、rank 1 の場合において主表現から higher endpoint の既約表現へ移行することは、higher rank の場合における Terwilliger 代数の主表現へ移行すること、すなわち higher rank の場合における Bose-Mesner 代数の表現に移行することに相当するのではないかという仮説を立て、そのもとで研究を進めた。

## 4. 研究成果

上の仮説の裏付をとるために、既知の P かつ Q 多項式スキームについて Terwilliger 代数の標準加群に現れる既約表現を調べた。すると既約表現は generic な q に対してさえも退化している場合が多く、特に第二種と呼ばれる退化ケースでは、Borel を含むある部分代数の表現にまでは持ち上がるが(この部分代数を  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  と書く)、アフィン量子群  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$  の表現にまでは持ち上がらない。そこでこの部分代数  $U_q'$  の有限次元既約表現をすべて決める必要が生じ、この問題をまず解決した。この結果は論文

Tomoya Hattai and Tatsuro Ito,  
On a certain subalgebra of  
 $U_q(\widehat{\mathfrak{mathfrak{sl}}_2})$  related  
to the degenerate  $q$ -Onsager algebra

としてまとめ、現在投稿中である。

更に、実例では Racah ケース (q=1 の場合) が実際に生じ、この場合は P かつ Q 多項式スキームの Terwilliger 代数の有限次元既約表現がまだ完全には決定されていないことが実際の計算に響いてくる (generic な q に対しては決定されているにもかかわらず q=1 の場合は指標公式さえも未解決であった)。そこで P かつ Q 多項式スキームの Terwilliger 代数の有限次元既約表現の決定問題で残された部分に取り組み(すなわち q=1, q=-1 の場合に取り組み)、これを解決した。実質的に行ったことは、q=1, q=-1 の場合(即ち II 型, III 型の場合) TD 対は「L 対のある種のテンソル積」になることを示し、その分類を完成させたことである。副産物として TD 対に関する指標公式が証明された。分類の手順は以下のとおりである。

1) ウェイト分解をもとにした「良い」基底を見つけ、その基底に関して L 対のテンソル積を定義し(これを pre TD 対と呼ぶ)、それが TD 関係式を満たすことを示す。

2) このようにした構成された pre TD 対に対して、Drinfel'd 多項式を定義し、その零点をもとめ、テンソル積構造との関係を明らかにする。

3) pre TD 対の既約性の判定条件を Drinfel'd 多項式の言葉で書き上げる .

4) II 型, III 型の TD 対がすべてこのようにして得られ, その同型類は Drinfel'd 多項式により定まることを示す .

特記すべき点は, I 型, II 型の TD 対についてはただ 1 種類の Drinfel'd 多項式で足りるのに対して, III 型の TD 対については 2 種類の Drinfel'd 多項式を用意する必要があることである . 以上の結果は別表に記したようにいくつかの研究集会で発表したが, 現在 2 編の論文として執筆中である . 部分的な予備の結果は論文

Tatsuro Ito and Jugo Sato, TD-pairs of type II with shape  $1, 2, \dots, 2, 1$

としてまとめ, 現在投稿中である . この論文は, type II かつ shape  $1, 2, \dots, 2, 1$  というかなり特殊な TD 対を分類したものであるが, この結果が breakthrough となって II 型, III 型の TD 対一般の分類の完成につながった .

以上が本研究の成果であるが, 当初の研究目的に照らし合わせてみると, a), b), c) のうち c) の準備段階で終わってしまった感が否めない . しながら, 研究目的として a), b), c) を掲げ, 実際には a), b), c) の順序で研究を進めるといふ我々のやり方を変える必要はないと考える . 目標は遙か彼方であるが, 我々は着実に前進しており, 本研究の成果をもとにして引き続き, 既知の P かつ Q 多項式スキームについて Terwilliger 代数の標準加群に現れる既約表現を調べ続けるつもりである . (まだ発表するには至らないが, かなりの実例について調べ, 興味ある事実が出て来ている .) そのことにより higher rank の compact symmetric space の離散版における Bose-Mesner 代数の表現論のあるべき姿を捉え, higher rank の実例を rank 1 の部分構造として取り出し, 「幾何学的構造と表現との間にある種の双対性が成立する」という予想をまず実例において検証するつもりである . しかる後に, higher rank の compact symmetric space の離散版を定義し, その表現論を rank 1 の場合を手本にし, かつそれを含む形で確立したいと思う .

最後に別表の論文

伊藤達郎, TD 対と q-Onsager 代数, 数学, 65 (2013), 69-92. 査読有

に触れておく . この論文は, P かつ Q 多項式スキームの Terwilliger 代数の既約表現についてこれまで知られていることを, q が generic な部分に限って概説したものである . 本研究を始めるにあたって既知の部分をか

のような形で概観しておいたことは有形無形に非常に役立った .

## 5 . 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

1 . 伊藤達郎, TD 対と q-Onsager 代数, 数学, 65 (2013), 69-92. 査読有

2 . T.Ito, K.Nomura and P.Terwilliger, A classification of sharp tridiagonal pairs, Linear Algebra Appl. 435 (2011) 1857-1884. 査読有

3 . T.Ito and P.Terwilliger, Mock tridiagonal systems, Linear Algebra Appl. 435 (2011), 1997-2006. 査読有

[学会発表](計 7 件)

1 . T.Ito, The classification of TD-pairs, RIMS 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, 京都大学数理解析研究所, 6 March, 2014

2 . T.Ito, The classification of TD-pairs of Type II, 12th Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics, KAIST, Daejeon, Korea, 23 January, 2014

3 . T.Ito, The classification of TD-pairs of Type II, Workshop on Algebraic combinatorics, Hebei Normal University, 21 November, 2013

4 . T.Ito, The Pfaff-Saalschutz summation formula revisited, Workshop on Algebraic Combinatorics, Shanghai Jiao Tong University, 21 August, 2012

5 . T.Ito, 置換群, アソシエーションスキーム, ターウィリガー代数, 第 24 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2012 年 7 月 28 日

6 . T.Ito, Finite dimensional irreducible representations of certain subalgebras of the quantum affine algebra  $U_q(\widehat{sl}_2)$ , Workshop on Algebraic Combinatorics, Shanghai Jiao Tong University, 16 September, 2011

7 . T.Ito, アフィン量子群のある種の部分代数の有限次元既約表現について, 第 23 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2011 年 7 月 31 日

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

伊藤 達郎 (ITO TATSURO)  
金沢大学・数物科学系・教授  
研究者番号：90015909

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：