

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月14日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540170

研究課題名（和文） 直交関数展開における調和解析の研究

研究課題名（英文） A study of harmonic analysis in orthogonal expansions

研究代表者

勘甚 裕一 (KANJIN YUICHI)

金沢大学・機械工学系・教授

研究者番号：50091674

研究成果の概要（和文）：古典的なハーディの不等式を，エルミート展開，ラゲール展開およびメラー変換に対して考察し類似の不等式を得た．顕著なことは，エルミート展開とラゲール展開に対して得られた不等式が，古典的な場合とは異なり，可積分関数の空間で成り立つことである．また，ハンケル変換に対して，古典的なペーリーの不等式が成り立つことを示した．さらに，正のラゲール展開係数を持つ関数は，原点付近の局所2乗可積分性があれば，全域的に2乗可積分であることを示した．

研究成果の概要（英文）：We have obtained Hardy type inequalities for the Hermite expansion, the Laguerre expansions and the Mehler transforms, which are analogues of the classical Hardy inequality on the Hardy space. For Hermite and Laguerre expansions, the inequalities hold on the space of integrable functions. Also, the Paley type inequality for the Hankel transform has been obtained. Moreover, we have showed that the functions with positive Laguerre coefficients have the property that local square integrability at the origin implies global square integrability.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：実解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：ハーディの不等式，ペーリーの不等式，実ハーディ空間，ラゲール展開，エルミート展開，ハンケル変換，メラー変換

## 1. 研究開始当初の背景

単位円盤上のハーディ空間において成り立つ，よく知られた，ハーディの不等式をエルミート多項式展開とラゲール多項式展開に対して示した：Y. Kanjin, Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre

expansions, Bull. London Math. Soc. 29(1997), 331-337 が本研究の契機である．この結果は，R. Radha (2000), R. Radha - S. Thangavelu (2004), R. Balasubramanian and R. Radha (2005) 等による多次元エルミート多項式展開におけるハーディの不等式の研究を引き起こした．研究代表者勘甚は，

Radha-Thangavelu の結果の考察から、このハーディの不等式が大きく改良出来るものと推測した。これが、エルミート多項式展開とラゲール多項式展開のハーディの不等式を見直す動機となった。見直しは、勘甚代表による平成 19 年度～平成 20 年度科学研究費補助金による研究から始められ、その期間にほぼ成果が固まり、本研究期間において学術雑誌に出版された。

積分変換についてのハーディの不等式は、フーリエ変換に関するものが古典的で、ハンケル変換に関するものは勘甚により得られていた。これを動機にメーラー変換に関するハーディの不等式を得ようとする研究が本研究で始められた。

また、ハーディ空間において成り立つもう 1 つの著名な不等式であるペーリーの不等式を、直交関数展開に対して示すことが、本研究代表者や佐藤邦夫によってヤコビ多項式展開とフーリエーベッセル級数展開に関して行われ、成果が得られていた。一方、積分変換のような連続変換については、フーリエ変換においてすら、ペーリー型の不等式は知られていなかった。そこで、フーリエ変換を含む有用な積分変換であるハンケル変換について、ペーリー型の不等式を考察することが興味深い問題と考えられ、前述の平成 19 年度～平成 20 年度科学研究費補助金による研究から始められ、これもその期間に成果が固まり、本研究期間において学術雑誌に出版された。

本研究で、直交多項式展開を扱う中で、フーリエ級数における古典的な 2 つの結果に注目することになった。ウィーナーとペーリーの結果である。これは、正のフーリエ係数を持つ関数は、原点付近での局所 2 乗可積分性 (有界性) が大域的 2 乗可積分性 (有界性) を導くと言うものである。この性質がヤコビ多項式展開においても成り立つことが、Mhaskar と Tikhonov によって示された。このことから、この性質がラゲール多項式展開においても成り立つのではないかと推測し、その性質の研究が本研究で開始された。

## 2. 研究の目的

研究目的の 1 つは、積分変換の 1 つであるメーラー変換に関して、古典的なハーディの不等式の類似を得ることである。ここで言う古典的ハーディの不等式とは、フーリエ変換に関するもので、実ハーディ空間に属する関数  $f$  のフーリエ変換  $F(f)(\xi)$  を考えたとき、その絶対値  $|F(f)(\xi)|$  を  $|\xi|^{-2p}$  で除したものを  $-\infty$  から  $\infty$  まで積分したものが有限値であることを主張するものである。ここで、 $0 < p \leq 1$ 。この主張がメーラー変換でも同様な形で成り立つことを示すのが目的であ

る。

研究目的の 2 つめは、正のラゲール展開係数を持つ関数は、“局所性が大局性を導く” という性質を持つことを示すことである。具体的には、区間  $[0, \infty)$  上の関数のラゲール多項式展開を考えて、その展開係数が正であるような関数を対象にする。このような関数は、原点を含む近傍 (どれだけ小さくてもよい) で 2 乗可積分であれば、全区間で“ほぼ” 2 乗可積分であると予想される。これを、“ほぼ” の意味を確定し、正確な定理を定式化し証明するのが目的である。

前述の研究開始当初の背景で触れてあるように、勘甚代表による平成 19 年度～平成 20 年度科学研究費補助金による研究から始められ、最終的に本研究期間において学術雑誌に出版された研究目的が 2 つある。1 つは、エルミート展開とラゲール展開に関するハーディの不等式の見直しである。ここでの、古典的なハーディの不等式とは、実ハーディ空間に属する関数のフーリエ級数展開を考えたとき、第  $n$  番目のフーリエ係数の絶対値を  $|n|+1$  で除したものを、すべての  $n$  に渡って総和したものが収束し、その和は元の関数の実ハーディ空間のノルムで押さえられるというものである。エルミート展開については、実直線上の実ハーディにおいて古典的な場合と同様の不等式が勘甚によって得られていた。ただし、古典的な場合と違い、エルミート係数の絶対値を  $(n+1)$  で除すのではなく、 $(n+1)$  の  $29/36$  乗で除すという形で得られた。ラゲール展開については、半直線上の実ハーディ空間において、古典的な場合と同様にラゲール係数を  $(n+1)$  で除した形で、ハーディ型の不等式が得られた。研究目的は、エルミート展開におけるハーディの不等式の  $(n+1)$  に現れる指数を  $3/4$  にイプシロン (いくらでも小さい正の数) だけ加えたものに改良することと、ラゲール展開に関するハーディの不等式が、最良なものであるか否かを再考察することである。

もう 1 つの研究目的は、古典的な実ハーディ空間におけるペーリーの不等式をハンケル変換に関して定式化し、それを証明することである。具体的に述べれば、半直線上の実ハーディ空間に属する関数の指数  $\mu$  のハンケル変換を考える。そのハンケル変換は、また半直線を定義域としている。このハンケル変換の定義域である半直線に、共通部分を持たないような部分区間  $I_n, n=1, 2, 3, \dots$  を考える。これらの部分区間の間隔がアダマール間隔を持つとする。このとき、ハンケル変換の、この部分区間上における絶対 2 乗積分の総和が、元の関数の実ハーディ空間のノルムの 2 乗で押さえられることを証明するのが目的である。

### 3. 研究の方法

ハーディの不等式に関しては、これまでの結果を得るために使った道具はアトム分解であった。これを簡単な  $(L^1, L^\infty)$ -duality におきかえて証明を試みるのが、単純ではあるが、研究方法のアイデアである。

一方、予想として  $\alpha=0$  のラゲール展開の場合のハーディの不等式を得るには、異なる手法が必要と考えられる。これには、本研究代表者と佐藤圓治がラゲール展開に関する端数積分の定理を得たとき用いた移植作用素が有効な方法を提供すると考えられるので、この方法を用いる。

ペーリーの不等式については、これまでのヤコビ展開などの研究経験から、ハンケル変換についても  $(H^1, BMO)$ -duality を用いるのが、有効な研究方法である。

正の展開係数を持つ関数の“局所性が大局性を導く”という性質の研究には、問題とする直交系における、一般化された平行移動の持つ性質と結合係数が正であるという性質が重要である。問題解決にこれらの性質を使うという方法を採用する。

### 4. 研究成果

得られた成果は次のとおりである。(1) と (2) は、平成 19 年度～平成 20 年度科学研究費補助金(勘甚代表)の研究においてほぼ成果が得られ、その成果報告書にも記述した内容ではあるが、本研究期間において学術雑誌に出版されたので、重複する部分もあるが下に記述する。

(1) エルミート展開とラゲール展開のハーディの不等式

①エルミート展開に関して次が成り立つ。可積分関数の作る関数空間に属する関数のエルミート係数の絶対値を  $(n+1)$  の  $3/4+\varepsilon$  乗したもので割った項を  $n=0, 1, 2, \dots$  に渡って総和したものは、収束しその和は元の関数の可積分関数のノルムで押さえられる。ただし、 $\varepsilon$  は任意の正の定数である。この結果において注目すべき点は、実ハーディ空間より広い空間である可積分関数の空間でハーディの不等式が成り立つ点である。

②ラゲール展開に関して次が成り立つ。ラゲール展開の指数  $\alpha$  が正の場合と、 $\alpha=0$  の場合では様相が異なる。 $\alpha$  が正の場合は次の通りである。可積分関数の空間に属する関数を考える。その関数における、ラゲール展開の係数の絶対値を  $(n+1)$  で除した項を  $n$  について総和したものは、収束しその和は元の関数の可積分関数のノルムで押さえられる。 $\alpha=0$  の場合は次のようになる。半直線上の実ハーディ空間に属する関数のラゲール係数の絶

対値を  $(n+1)$  で割った項を  $n=0, 1, 2, \dots$  に渡って総和したものは収束し、その和は元の関数の実ハーディ空間のノルムで押さえられる。このように、ラゲール展開もエルミート展開同様に、フーリエ級数展開とは違った挙動を示すことが明らかになった。

(2) ペーリーの不等式

次の結果を証明することが出来た。半直線上の実ハーディ空間に属する関数の指数  $\mu$  のハンケル変換を考える。このハンケル変換の定義域である半直線に、共通部分を持たないような部分区間  $I_n, n=1, 2, 3, \dots$  を考える。ただし、各部分区間の長さは、任意であるが一定であるものとする。これらの部分区間の間隔がアダマール間隙を持つとする。このとき、ハンケル変換の、この部分区間上における絶対 2 乗積分の総和は、元の関数の実ハーディ空間のノルムの 2 乗で押さえられる。

(3) メーラー変換のハーディの不等式

指数  $m(\leq 1/2)$  で次数が  $-1/2+ix$  のルジャンドル関数を用いて定義されるメーラー変換に関して、フーリエ変換のハーディの不等式に類似の不等式を得た。考える空間は  $0 < p \leq 1$  の実ハーディ空間である。メーラー変換の場合、原点付近と無限遠点付近ではやや異なる挙動を示すことが明らかになった。これはフーリエ変換の場合とは違っている。ただし、指数  $m$  が負の半整数の場合で、 $1/2 < p \leq 1$  の場合にはフーリエ変換と全く同じ形で成り立つことも分かった。これらの成果は学術雑誌に投稿予定である。

(4) 正のラゲール展開係数をもつ関数の性質

正のラゲール展開係数を持つ関数は、“局所性が大局性を導く”という性質を持つことを示すことができた。つまり、区間  $[0, \infty)$  上の関数のラゲール多項式展開を考えて、その展開係数が正であるような関数を対象にする。このような関数は、原点を含む近傍(どれだけ小さくてもよい)で 2 乗可積分であれば、全区間で、この関数に  $\exp(-x)$  を乗じたものが、2 乗可積分であることを示すことができた。この成果は投稿準備中である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① Sato, S., Nonisotropic dilations and the method of rotations with weight, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, in press
- ② Ishizaki, K., Thoge, K., On logarithmic order of an entire function in terms of the coefficients, Proc. Amer. Math. Soc., 査読有, in

- press
- ③ Kobayasi, M., Miyachi, A., Schatten  $p$ -class property of pseudo-differential operators with symbols in modulation spaces, Nagoya Math. J., 査読有, 205(2012), 119-148
  - ④ Kanjin, Y., Hardy's inequalities for Hermite and Laguerre expansions revisited, J. Math. Soc. Japan, 査読有, 63(2011), 753-767
  - ⑤ Fu, Z., Lu, S., Sato, S., Shi, S., On weighted weak type norm inequalities for one-sided oscillatory singular integrals, Studia Math., 査読有, 207(2011), 137-151
  - ⑥ Sato, S., Weak-type  $(1, 1)$  estimates for parabolic singular integrals, Proc. Edinb. Math. Soc., II., 査読有, Ser. 54, No. 1(2011), 221-247
  - ⑦ Kawazoe, T., Liu, J., Miyachi, A., Refinements of the Hardy and Morgan uncertainty principles, Scientiae Mathematicae Japonicae, 査読有, 73(2011), 81-87
  - ⑧ Laine, I., Thogge, K., Tropical Nevanlinna theory and second main theorem, Proc. London Math. Soc., 査読有, 102(2011), 1-40
  - ⑨ Heittokangas, J., Thogge, K., A unit disc analogue of the Bank-Laine conjecture does not hold, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 査読有, 36 (2011), 341-351
  - ⑩ Tohge, K., On Gundersen's solution to the Fermat-type functional equation of degree 6, Complex Variables and Elliptic Equations, 査読有, 56(2010), 233-251
  - ⑪ Kanjin, Y., Sato, K., Paley's inequality of integral transform type, Hokkaido Math. J., 査読有, 38(2009), 233-247
  - ⑫ Sato, S., Estimates for singular integrals along surfaces of revolution, J. Aust. Math. Soc., 査読有, 86 (2009), 413-430
  - ⑬ Kobayashi, M., Miyachi, A., Tomita, N., Embedding relations between local Hardy and modulation spaces, Studia Math., 査読有, 192(2009), 79-96
  - ⑭ Liflyand, E., Miyachi, A., Boundedness of the Hausdorff operators in  $H_p$  spaces,  $0 < p < 1$ , Studia Math., 査読有, 194(2009), 279-292

[学会発表] (計 6 件)

- ① 富田直人, 宮地晶彦, Sharp smoothness

- conditions for bilinear Fourier multipliers, 日本数学会年会 実関数論分科会, 2012年3月29日, 東京理科大学神楽坂キャンパス (東京都)
- ② 藤解和也, On logarithmic order of an entire function in terms of the coefficients, 日本数学会年会 実関数論分科会, 2012年3月26日, 東京理科大学神楽坂キャンパス (東京都)
  - ③ 佐藤秀一, Some non-regular convolution operators, 日本数学会総合分科会 実関数論分科会特別講演, 2010年9月24日, 名古屋大学 (愛知県)
  - ④ Tohge, K., Tropical Nevanlinna theory in a single variable, Workshop on Function Theory and Dynamical Systems, 2010年9月8日, University College London (GB)
  - ⑤ Kanjin, Y., Transplantation theorems for orthogonal expansions, Harmonic Analysis and its Applications at Pohang 2009, 2009年11月26日, 浦項工科大学, (韓国)
  - ⑥ Miyachi, A., Change of variables for weighted Hardy spaces on a domain, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, 2009年5月28日, 北京師範大学 (中国)

[その他]

ホームページ等

<http://www.ms.t.kanazawa-u.ac.jp/~maths/kanjin/kanpaper.htm>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

勘甚 裕一 (KANJIN YUICHI)  
金沢大学・機械工学系・教授  
研究者番号: 50091674

### (2) 研究分担者

佐藤 秀一 (SATO SHUICHI)  
金沢大学・学校教育系・准教授  
研究者番号: 20162430

### (3) 連携研究者

藤解 和也 (TOHGE KAZUYA)  
金沢大学・電子情報系・准教授  
研究者番号: 30260558

新井 仁之 (ARAI HITOSI)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 10175953

宮地 晶彦 (MIYACHI AKIHIKO)  
東京女子大学・現代教養学部・教授  
研究者番号: 60107696