

多変数フーリエ積分に関する基礎的・応用的研究

著者	佐藤 秀一
著者別表示	Sato Shuichi
雑誌名	平成18(2006)年度 科学研究費補助金 基盤研究(C) 研究成果報告書
巻	2005-2006
ページ	6p.
発行年	2007-04-01
URL	http://doi.org/10.24517/00034735



多変数フーリエ積分に関する基礎的・応用的研究

課題番号 17540154

平成15年度-平成16年度科学研究費補助金（基盤研究(c)）

研究成果報告書

平成19年4月

研究代表者 佐藤秀一 金沢大学教育学部准教授

多変数フーリエ積分に関する基礎的・応用的研究

課題番号 17540154

平成15年度-平成16年度科学研究費補助金（基盤研究(c)）

研究成果報告書

平成19年4月

研究代表者 佐藤秀一 金沢大学教育学部准教授

金沢大学附属図書館



1300-04213-3

1

著 者 寄 贈

研究組織

研究代表者： 佐藤秀一 金沢大学教育学部准教授

研究経費

平成17年度	直接経費 500000 円	間接経費 0 円	合計 500000 円
平成18年度	直接経費 500000 円	間接経費 0 円	合計 500000 円
総計	直接経費 1000000 円	間接経費 0 円	合計 1000000 円

研究発表

(I) 学会誌等

- (1) Shuichi Sato, Singular integrals and Littlewood-Paley functions, Selected papers on differential equations and analysis. Transl. from the Japanese. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). Translations. Series 2. American Mathematical Society 215, 57-78 (2005); translation from Sugaku 55, No.2, 128-147 (2003).
- (2) Dashan Fan and Shuichi Sato, Singular and fractional integrals along variable surfaces, Hokkaido Mathematical Journal 35 (2006), 61-85
- (3) Shuichi Sato, Weighted estimates for maximal functions associated with Fourier multipliers, Studia Sci. Math. Hungarica (校正済)
- (4) Shuichi Sato, Non-regular pseudo-differential operators on the weighted Triebel-Lizorkin spaces, preprint.
- (5) Dashan Fan and Shuichi Sato, A note on the singular integrals associated with a variable surface of revolution, preprint.
- (6) Shuichi Sato, Estimates for singular integrals and extrapolation, preprint.

(7) Shuichi Sato, Estimates for singular integrals along surfaces of revolution, preprint.

(8) Shuichi Sato, Estimates for singular integrals associated with manifolds of finite type and extrapolation, preprint.

研究成果

(1) 変化する回転面に付随したある種の特異積分および fractional integral を考えて、それらの $L^p - L^q$ 有界性を考察した。特異積分の有界性を示す際には積分核の斉次部分には H^1 条件と相殺条件を仮定する。また、この特異積分に付随したある種の最大関数の L^p 有界性を仮定する。証明には単位球面上の Hardy 空間に対する アトム分解を用いる (Singular and fractional integrals along variable surfaces).

(2) Bochner-Riesz 型のある種の Fourier multiplier から定義される最大関数に対していくつかの加重不等式が証明された。次のような一般化された Bochner-Riesz 平均を考える：

$$S_t^\lambda(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \gamma(t, \xi))_+^\lambda \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi.$$

通常の Bochner-Riesz 平均から定義される最大関数に対するいくつかの既知の加重不等式をこの一般化された Bochner-Riesz 平均から定義される最大関数 S_*^λ の場合に拡張した。

特に、最大関数 S_*^λ に対する加重不等式を $\gamma(t, \xi) = t^{-1}|\Phi(\xi)|$, $\gamma(t, \xi) = |\Phi(t^{-1}\xi)|$ の場合に証明した。ここで Φ は \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への写像である種の正則性を満足するものである。 h が \mathbb{R}^n 上の正の 1 次斉次関数で、原点を除いて無限回微分可能ならば、適当な Φ をとると $|\Phi(\xi)| = h(\xi)$ とできることが知られている (Weighted estimates for maximal functions associated with Fourier multipliers).

(3) ある種の擬微分作用素 T_σ を考え、その加重 Triebel-Lizorkin 空間、加重 Besov 空間上での有界性を調べた。特に、Sobolev 空間 H_p^s ($p \geq 2$) 上で T_σ が有界になるための Bourdaud による σ の正則性に関する条件が本質的に改良された。証明のアイディアは論文：

S. Sato, A note on weighted estimates for certain classes of pseudo-differential operators, Rocky Mountain J. Math. 35 (2005), 267-284

の方法を利用するところにある (Non-regular pseudo-differential operators on the weighted Triebel-Lizorkin spaces).

(4) 滑らかさの正則性を持たない積分核から定義される, 変化する回転面に沿った Calderon-Zygmund 型の特異積分に対して, ある種の積分核の大きさに関する条件のもとに, Lebesgue 空間 L^p 上での有界性が示された. これにより, 特に, 2次元の場合に, Grafakos-Stefanov の斉次特異積分に対する結果が R. Fefferman 型の非斉次特異積分の場合に拡張された. この結果が高次元の場合に拡張するかどうかはこれからの研究課題のひとつである. 変化する回転面に沿った Calderon-Zygmund 型の特異積分の評価の場合は, 固定された回転面に沿った Calderon-Zygmund 型の特異積分の評価と違い, Fourier 変換を用いた方法が同じようなやり方では使えなくなる. このため, 証明には Fourier 変換の評価を直接的に用いるのではなく, この特異積分に付随する変化する回転面に沿った最大関数の Lebesgue 空間における有界性を用いる. また, Littlewood-Paley 理論がこの問題に適合された形で用いられる. 変化する回転面の場合, 相対性がうまく機能しないため, 特異積分の Lebesgue 空間 L^p 上での評価は p が 2 より大きい場合と小さい場合とで違いが出る. これが本質的なことなのか, 克服できることなのかはこれからの研究課題のひとつである. 回転面が固定され手いる場合は, Fourier 変換および相対性が有効に機能し, 変化する回転面の場合よりもより広い空間上での有界性が, より弱い条件のもとで示される (A note on the singular integrals associated with a variable surface of revolution).

(5) 滑らかさの正則性を持たない積分核から定義される Calderon-Zygmund 型の特異積分に対してある種の積分核の大きさに関する条件のもとに, Lebesgue 空間 L^p 上での精密なノルム評価が得られた. 積分核の L^q 可積分性で q が 1 に近づく時の特異積分作用素の精密な L^p 評価を証明することにより, 補外法 (extrapolation) が適用できることになった.

これにより, 積分核の最小の大きさを仮定するだけで, 特異積分作用素の L^p 有界性が証明された. この結果はさらに Radon 特異積分作用素の場合に拡張された. A. Al-Salman and Y. Pan は論文 *Singular integrals with rough kernels in $L \log L(S^{n-1})$* において少し違った方法で同様の結果を示している. 我々の方法は積分核の大きさに対応した予想される最良の L^p ノルム評価を証明することにより, 補外法の応用を可能とするものであり, 新しい証明方法である. さらに, この方法により A. Al-Salman and Y. Pan の結果を一部改良することができた (*Estimates for singular integrals and extrapolation*). 証明方法は基本的には, J. Duoandikoetxea and J.L. Rubio de Francia (*Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates*) の方法によるが, キーポイントは積分核の L^q 可積分性に対応した Littlewood-Paley 分解を用いることである. この方法は他のいくつかの種類の特異積分作用素にも適用できることがわかった (*Estimates for singular integrals along surfaces of revolution; Estimates for singular integrals associated with manifolds of finite type and extrapolation*).

以下に (I) に関連したいくつかの論文を添付する.