

# カッツの転送作用素及びLie-Trotter積公式とその 周辺の問題

著者	一瀬 孝
雑誌名	平成12(2000)年度 科学研究費補助金 基盤研究(B) 研究成果報告書
巻	1999-2000
ページ	14p.
発行年	2001-03-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/48235">http://hdl.handle.net/2297/48235</a>

KAKEN
2000
78

金沢大学

# カツの転送作用素及び Lie-Trotter 積公式 とその周辺の問題

(課題番号 11440040)

平成11年度-平成12年度科学研究費補助金(基盤研究(B)(2))

## 研究成果報告書

平成13年3月

研究代表者 一瀬 孝

金沢大学附属図書館 (金沢大学理学部 教授)



8000-96505-4

学

RAKEN  
2000  
78

カツの転送作用素及び Lie-Trotter 積公式  
とその周辺の問題

(課題番号 11440040)

平成11年度—平成12年度科学研究費補助金 (基盤研究(B)(2))

研究成果報告書

平成13年3月

研究代表者 一 瀬 孝

(金沢大学理学部 教授)

はしがき

本研究の最初の動機は、B.Helffer (1994-5) のカツの転送作用素に関する仕事と Rogava (1993) の作用素ノルムに関するリー・トロッター積公式に関する仕事であった。本研究課題では、この2年間平成9年度-10年度に始めた研究課題「カツの転送作用素とシュレーディンガー半群との差のノルム評価に関する研究」を更に発展させた成果が得られた。研究代表者・分担者の思想の根底には「スペクトル」という共通の水脈があり、シュレーディンガー作用素論との関連に基づいて本研究は進められた。以下はその研究成果報告書である。

・研究組織

研究代表者： 一瀬 孝 (金沢大学理学部教授)  
研究分担者： 高信 敏 (金沢大学自然科学研究科助教授)  
田村 博志 (金沢大学理学部助教授)  
林田 和也 (金沢大学理学部教授)  
中尾慎太郎 (金沢大学理学部教授)  
田村 英男 (岡山大学理学部教授)  
谷島 賢二 (東京大学大学院数理科学研究科教授)  
小栗栖 修 (金沢大学理学部助教授)  
小俣 正朗 (金沢大学理学部助教授)  
藤曲 哲郎 (金沢大学理学部教授)

・研究経費

平成11年度	3100千円
平成12年度	2900千円
計	6000千円

・研究発表 (1) 学会誌等

一瀬 孝 Takashi Ichinose

1. *Norm estimate for Kac's transfer operator with applications to the Lie-Trotter product formula,*  
In: *Mathematical Methods of Quantum Physics, Essays in Honor of Professor Hiroshi Ezawa* (Proceedings of the 2nd Jagna International Workshop, January 4-8, 1998), pp. 145-154, Gordon and Breach Publ. 1999.

2. (with Satoshi Takanobu)  
*The norm estimate of the difference between the Kac operator and the Schrödinger semigroup II: The general case including the relativistic case,*  
 Electronic Journal of Probability, **5**, Paper no. 5, pages 1–47 (2000).  
 (Journal URL <http://www.math.washington.edu/ejpecp/>  
 Paper URL <http://www.math.washington.edu/ejpecp/paper5.abs.html>)
3. *On norm estimate for the Kac operator with applications,*  
 to appear in a Special Volume in Honor of Professor Takeyuki Hida.
4. *Norm convergence of the Lie–Trotter–Kato product formula and imaginary-time path integral,*  
 to appear in Proceedings of International Conference on Feynman Integrals and Related Topics, Seoul, July 12–15, 1999.
5. (with Hideo Tamura)  
*The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,*  
 to appear in Commun. Math. Phys.
6. (with Hideo Tamura)  
*On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound,*  
 to appear in Proceedings of Partial Differential Equations, Clausthal, July 24–28, 2000.
7. (with Hideo Tamura, Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov)  
*Note on the paper “The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound” by Ichinose and Tamura,* to appear.
8. (with Pavel Exner)  
 Geometrically induced spectrum in curved leaky wires,  
 to appear J. Phys. A.

高信 敏 Satoshi Takanobu

1. (with Takashi Ichinose)  
*The norm estimate of the difference between the Kac operator and the Schrödinger semigroup II: The general case including the relativistic case,*  
 Electronic Journal of Probability, **5** (2000), Paper no. 5, pages 1–47.
2. (with Hiroshi Sugita)  
*A limit theorem for Weyl transformation in infinite-dimensional torus and central limit theorem for correlated multiple Wiener integrals,*  
 J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **7** (2000), 99–146.

3. (with Hiroshi Sugita)  
*Random Weyl sampling for robust numerical integration of complicated functions*,  
Monte Carlo Methods Appl., **6** (2000), 27–48.

田村 博志 Hiroshi Tamura

1. (with Kei-ichi Ito)  
 *$N$  dependence of upper bounds of critical temperatures of 2D  $O(N)$  spin models*,  
Commun. Math. Phys, **202** (1999), 127–168.
2. *A remark on operator-norm convergence of Trotter–Kato product formula*,  
Integr. Equ. Oper. Theory, **37** (3) (2000), 350–356.

林田 和也 Kazuya Hayasida

1. (with Masao Nakatani)  
*On the Dirichlet problem of prescribed mean curvature equations without  $H$ -convexity condition*,  
Nagoya Math. J., **157** (2000), 177–209.
2. *On some improperly posed problem for a degenerate nonlinear parabolic equation*,  
Z. Anal. Anwendungen, **19** (2000), 395–413.
3. *A slight modification to: “On some improperly posed problem for a degenerate nonlinear parabolic equation”*,  
Z. Anal. Anwendungen, **19** (2000), 889–890.

田村 英男 Hideo Tamura

1. *Magnetic scattering at low energy in two dimensions*,  
Nagoya Math. J., **155** (1999), 95–151.
2. *Norm resolvent convergence to magnetic Schrödinger operators with point interactions*,  
Rev. Math. Phys. (in press).
3. (with Hiroshi Ito)  
*Aharonov–Bohm effect in scattering by point-like magnetic fields at large separation*,  
Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. (in press).
4. (with Takashi Ichinose)  
*The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound*,  
to appear in Commun. Math. Phys.

5. (with Takashi Ichinose)  
*On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound*,  
to appear in Proceedings of Partial Differential Equations, Clausthal, July 24–28,  
2000.
6. (with Takashi Ichinose, Hiroshi Tamura and Valentin A. Zagrebnov)  
*Note on the paper “The norm convergence of the Trotter–Kato product formula with  
error bound” by Ichinose and Tamura*, to appear.

谷島 賢二 Kenji Yajima

1.  *$L^p$ -boundedness of wave operators for two-dimensional Schrödinger operators*,  
Commun. Math. Phys., **208** (1999), 125–152.
2. (with Artbazar Galtbavar)  
*The  $L^p$ -continuity of wave operators for one dimensional Schrödinger operators*,  
J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **7** (2000), 221–240.
3. *On the behavior at infinity of the fundamental solution of the time dependent  
Schrödinger equations*,  
to appear in Reviews in Math. Phys.
4. (with Sandro Graffi)  
*Absolute continuity of the Floquet spectrum for a nonlinearly forced Harmonic os-  
cillator*,  
Commun. Math. Phys., **215** (2000), 245–250.
5. (with André Martinez)  
*On the fundamental solution of semiclassical Schrödinger equations at resonant  
times*,  
to appear in Commun. Math. Phys.

小栗栖 修 Osamu Ogurisu

1. (with Pavel Exner and Masao Hirokawa)  
*Anomalous Pauli electron states for magnetic fields with tails*,  
Lett. Math. Phys., **50** (1999), 103–114.
2. (with Masao Hirokawa)  
*Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field*,  
to appear in J. Math. Phys.

小俣 正朗 Seiro Omata

1. (with Koji Kikuchi)  
*A free boundary problem for a one-dimensional hyperbolic equation,*  
 Adv. Math. Sci. Appl. **9** (1999), 775-786.
2. (with Yoshihiko Yamaura)  
*A free boundary problem for quasilinear elliptic equations. II.  $C^{1,\alpha}$ -regularity of free boundary,*  
 Funkcial. Ekvac. **42** (1999), 9-70.

(2) 口頭発表

一瀬 孝 Takashi Ichinose

1. (with 高信 敏)  
 Norm estimates for Kac's transfer operator and the Lie-Trotter product formula in norm, 研究集会 "Recent Progress in Stochastic Analysis", 金沢大学理学部 (1999年3月4日)
2. Norm convergence of the Lie-Trotter-Kato product formula and imaginary-time path integral, International Conference on Feynman Integrals and Related Topics, Yonsei University, Seoul/Korea (1999年7月15日)
3. On the norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound, Oberseminar of Prof. H. Kalf, Mathematisches Institut, Universität München, Munich/Germany (2000年7月14日)
4. (with Hideo Tamura)  
 On the norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound, Poster Session, The 13th International Congress of Mathematical Physics ( $M \cap \Phi$ ), Imperial College, London/United Kingdom (2000年7月22日)
5. (with Hideo Tamura)  
 On the norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound, Plenary lecture, International Conference 2000 "Partial Differential Equations Clausthal", Clausthal/Germany (2000年7月27日)
6. On the norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound, Mathematical Physics Seminar, Czech Technical University, Prague/Czech (2000年7月31日)
7. (with 田村 英男)  
 On the norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound, 研究集会 "Infinite Dimensional Stochastic Analysis and Related Fields", 九州大学大学院数理学研究科 (2000年10月6日)



8. (with 田村 英男)  
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 (2000年12月5日)
9. (with Hideo Tamura)  
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, Workshop on Spectral and Inverse Spectral Theories of Schrödinger Operators, International Center, Goa/India (2000年12月14日)
10. On the norm convergence of the selfadjoint Trotter–Kato product formula with error bound, 「学習院大学スペクトル理論セミナー」, 学習院大学理学部数学教室 (2001年1月20日)

田村 博志 Hiroshi Tamura

1. Trotter–加藤の積公式のノルム収束の早さについて, 研究集会 “Recent Progress in Stochastic Analysis”, 金沢大学理学部 (1999年3月4日)
2. (with 伊東恵一 (摂南大工))  
 $2D O(N)$  Spin Model の繰り込み群による扱い, 研究集会「繰り込み群の数理科学での応用」, 京都大学数理解析研究所 (1999年7月22日)
3. Trotter–Kato の積公式の Norm 収束に関連した例, 「学習院大学スペクトル理論セミナー」第41回, 学習院大学理学部数学教室 (2000年1月22日)
4. Self-avoiding walk and classical  $N$  vector Heisenberg model, Mathematical Physics Seminar, Centre de Physique Théorique, CNRS-Luminy, Marseille/France (2000年6月26日)

田村 英男 Hideo Tamura

1. Error estimate in operator norm for exponential product formula, The 4-th Workshop on Differential Equations, Chonnam National University, Kwangju/Korea (1999年7月)
2. Scattering by magnetic fields at large separation, 摂南大学研究集会 (2000年2月)
3. 2次元磁場散乱とアハラノフ・ボーム効果, 金沢大学数理学談話会 (2000年7月)
4. Scattering by point-like magnetic fields at large separation, 「作用素論セミナー」, 京都大学数理解析研究所 (2000年7月)
5. Scattering by point-like magnetic fields at large separation, 東京大学関数解析セミナー, 東京大学大学院数理科学研究科 (2000年7月)

6. (with Takashi Ichinose)  
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, Poster Session, The 13th International Congress of Mathematical Physics ( $M \cap \Phi$ ), Imperial College, London/United Kingdom (2000年7月22日)
7. (with Takashi Ichinose)  
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, Plenary lecture, International Conference 2000 “Partial Differential Equations Clausthal”, Clausthal/Germany (2000年7月27日)
8. (with 伊藤宏)  
Aharanov-Bohm effect in scattering by magnetic fields at large separation, 「数理解物理2000 量子力学の展望」, 学習院大学百年記念館 (2000年9月)
9. (with 伊藤宏)  
2次元磁場散乱とアハラノフ・ボーム効果, 日本数学会秋季総合分科会, 京都大学 (2000年9月)
10. 2次元磁場散乱とアハラノフ・ボーム効果, 東京工業大学大岡山談話会 (2000年10月)
11. (with 一瀬 孝)  
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, 研究集会「Infinite Dimensional Stochastic Analysis and Related Fields」, 九州大学大学院数理学研究科 (2000年10月6日)
12. (with 一瀬 孝)  
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 (2000年12月5日)
13. (with 伊藤 宏)  
Scattering by magnetic fields at large separation in two dimensions, 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 (2000年12月6日)
14. (with Takashi Ichinose)  
On the norm convergence of the Trotter–Kato product formula with error bound, Workshop on “Spectral and Inverse Spectral Theories of Schrödinger Operators”, International Center, Goa/India (2000年12月14日)
15. (with 伊藤宏)  
Scattering by magnetic fields at large separation in two dimensions, 「微分方程式の総合的研究」, 東京大学大学院数理学研究科 (2000年12月)
16. Magnetic scattering by several point-like fields at large separation, 「学習院大学スペクトル理論セミナー」, 学習院大学理学部数学教室 (2001年1月20日)

17. Magnetic scattering by several point-like fields at large separation, Workshop on Spectral Theory and Inverse Problem, 東京都立大学 (2001 年 2 月)

谷島 賢二 Kenji Yajima

1. The  $L^p$ -continuity of wave operators for two dimensional Schrödinger operators, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach/Germany (1999 年 8 月)
2. The  $L^p$ -continuity of wave operators for two dimensional Schrödinger operators and its applications, International Conference on Differential Equations in honor of Professor Lars Gårding, Lund University, Lund/Sweden (1999 年 8 月)
3. Smoothness and boundedness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Conference on Asymptotic Methods in Mathematical Physics, University of Bologna, Italy (1999 年 9 月)
4. シュレーディンガー方程式の基本解について, 夏の学校「数理物理 2000」, 学習院大学百年記念館 (2000 年 9 月)
5. (with Gouping Zhang)  
Smoothing property of Schrödinger equations with potentials superquadratic at infinity, 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 京都大学数理解析研究所 (2000 年 12 月 6 日)
6. Smoothing property of Schrödinger equation with potentials super-quadratic at infinity, Workshop on “Spectral and Inverse Spectral Theories of Schrödinger Operators”, International Center, Goa/India (2000 年 12 月 15 日)

#### ・研究成果

本研究課題「カッツの転送作用素及び Lie-Trotter 積公式とその周辺の問題」は、偏微分方程式論としてのシュレーディンガー作用素論、及び統計力学の格子模型との双方にかかわっている。主に以下の4つのテーマを取り扱った。

- (1) カッツ (Kac) の転送作用素に関する作用素ノルム評価
- (2) 作用素ノルムでの自己共役 Lie-Trotter 積公式
- (3) 統計力学の格子模型
- (4) その他の関連する研究

(1)  $H = H_0 + V \equiv -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$  を下に有界なポテンシャル  $V(x)$  (従って一般性を失うことなく,  $V(x) \geq 1$  と仮定してよい) を持つ Schrödinger 作用素とする。このとき,  $K(t) = e^{-tV/2}e^{-tH_0}e^{-tV/2}$  をカッツの転送作用素と呼ぼう。これは, Mark Kac が 1966

Brandeis Lecture で扱った統計力学のある格子模型の転送作用素とみなせる作用素である (以下の (3) 参照) . カッツの転送作用素  $K(t)$  のスペクトルの性質を知るために, シュレーディンガー半群  $e^{-tH}$  との差の  $L^2$  作用素ノルム評価を求める問題を考えた.

最初の結果は, B. Helffer (1994-5) による, 擬微分作用素カルキュラスを用いたもので, 関数  $V(x)$  が  $C^\infty$  関数であって 2 階以上の導関数が有界であるとき (粗く言うと, 遠方で  $O(|x|^2)$  のように振り舞う関数の場合に), 小さい  $t > 0$  に対して,

$$\|K(t) - e^{-tH}\|_2 = O(t^2), \quad t \downarrow 0$$

を証明した.

その後, この結果は, 一瀬・高信 (1997) によって Feynman-Kac-Iô 公式を用いた確率解析的手法により, また, 作用素論的手法により 百目鬼・一瀬・田村英男 (1998) によって拡張され, より一般の Hölder 連続な関数のポテンシャル  $V(x)$  で, 粗く言うと, 遠方で  $O(|x|^\rho)$ ,  $\rho > 0$ , のように振り舞う関数の場合に, 更に, 有界な磁場  $\nabla \times A(x)$  をも許容する Schrödinger 作用素  $H = H_0(A) + V \equiv \frac{1}{2}(-\nabla - A(x))^2 + V(x)$  の場合に, それぞれ,  $L^p, L^2$  作用素ノルム評価  $O(t^{1+2/p})$  を以て証明された.

平成 11 年度 - 12 年度の本研究において, 一瀬は高信敏と共に, 確率解析的方法により,  $H_0$  が相対論的 Schrödinger 作用素  $H_0^* \equiv \sqrt{-\Delta + 1} - 1$  を含む一般の Lévy 過程に付随した作用素である場合に対応する転送作用素に対して,  $L^p$  作用素ノルム評価を証明した (Electronic J. Prob. 2000, 一瀬の学会誌等の論文リスト中 [2]). この成果は, 非相対論的・相対論的 Schrödinger 作用素の場合を統一的に扱った一瀬・高信の前論文 (Nagoya Math. J. 1998) の結果を含むばかりではなく, ある意味で, 上述の (磁場のある場合を除いた) すべての場合を包括するより一般のポテンシャルに対し, 精密な  $L^p$  作用素ノルム評価を与えたものである.

(2) 非有界作用素に関する自己共役 Lie-Trotter 積公式, または, Trotter-Kato 積公式は, ふつう Hilbert/Banach 空間の強位相で収束するものであったが, 最近あるかなり一般の状況で作用素ノルムでも収束することが分かってきた. 以下では,  $A, B$  を Hilbert 空間上の一般の 2 つの下に有界な (必ずしも有界はでない) 自己共役作用素とする.

最初の結果は, 次のような Rogava (1993) によるものである:  $A$  の定義域が  $B$  の定義域に含まれ,  $C \equiv A + B$  も自己共役であるとき,

$$\begin{aligned} \|(e^{-tB/n} e^{-tA/n})^n - e^{-tC}\| &= O(n^{-1/2} \log n), \quad n \rightarrow \infty, \\ \|(e^{-tA/2n} e^{-tB/n} e^{-tA/2n})^n - e^{-tC}\| &= O(n^{-1/2} \log n), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

この結果に刺激され, 一瀬・田村英男 (1998) は,  $B$  が  $A^\alpha$ -有界 ( $0 < \alpha < 1$ ) という Rogava より強い条件のもとではあるが, 作用素ノルムでの Lie-Trotter 積公式を, Rogava より良い誤差評価  $O(n^{-1} \log n)$  を証明した. 同じ頃, Neidhardt-Zagrebnoy (1998) は我々の上記の論文より 1 つ前の論文 (Integr. Equat. Op. Theory 1997) の結果に刺激されて,  $B$  が  $A$ -有界でその相対上界が 1 より小さいときに, 我々と同じ誤差評価  $O(n^{-1} \log n)$  で証明した. ただ, 一瀬・田村英男の結果では, 作用素  $A, B$  が時間  $t$  依存でもよいという一般性の長所がある. また, 一方では, Schrödinger 作用素を Kac の転送作用素と比較す

る (1) の研究から、テレスコープ議論により作用素ノルムでの Lie-Trotter 積公式が誤差評価  $O(n^{-2/\rho})$  で得られていた。ここで気づくことであるが、(2) の一般的抽象的結果は、正の Coulomb ポテンシャルを持つ Schrödinger 作用素に当てはまるものであるが、(1) から得られる結果とは適応するポテンシャル  $V(x)$  のクラスがお互いに別のものになっている。

これらの抽象的結果及び Schrödinger 作用素の場合のどの結果においても、顕著なことに、作用素和  $A + B$ ,  $H = H_0 + V$ ,  $H = H_0(A) + V$  は、D. Guibourg [C. R. Acad. Sci. Paris, **316** (1993), Série I Math., 149–152], Z. Shen [Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **45** (1995), 513–546] の研究結果を用いると、いずれもその定義域上で自己共役になっていることが分かる。

そこで、一般的に作用素和  $A + B$  が  $D[A] \cap D[B]$  上で自己共役でありさえすれば、作用素ノルムでの Lie-Trotter 積公式、Trotter-Kato 積公式が成立するのではないか。このような予想は、田村博志 (Integr. Equat. Oper. Theory 2000) が、Neidhardt-Zagrebnoy(1998) による作用素ノルムでの Lie-Trotter 積公式に関する結果の 1 つが最良の誤差評価を与えていることを注意した論文で、作用素和  $A + B$  が自己共役ではないとき、本質的に自己共役であっても、また、一方の  $B$  が他方の  $A$  に関して 2 次形式有界でその相対上界が 1 より小さくても、作用素ノルムでの Lie-Trotter 積公式は必ずしも成立しない反例を与えたこともその根拠の 1 つになった。そして、この確信に基づいて、将にこのような結果を一瀬は田村英男と共に、Commun. Math. Phys. 出版予定の論文 (一瀬の学会誌等の論文リスト中 [4]) において与えた。

そして最終的な拡張を与えると思われる論文を、田村英男、田村博志、V. Zagrebnoy (マルセイユ, フランス) と共同研究により (一瀬の学会誌等の論文リスト中の [6]) を準備中である。

(3) (1) で述べた結果のもう 1 つの応用として、カツツの転送作用素  $K(t)$  の第 1 固有値  $\mu_1(t)$  の漸近的縮退、または、第 2 固有値  $\mu_2(t)$  との比の評価として、ある正定数  $a$  とともに  $\mu_2(t)/\mu_1(t) = 1 - (\lambda_2 - \lambda_1)t + O(t^{1+a})$ ,  $t \downarrow 0$ , が得られる。ただし、 $\lambda_1, \lambda_2$  は Schrödinger 作用素  $H$  の第 1, 第 2 固有値である。また、パラメータ  $t$  は、 $t^{-1}$  が 1 つのスピンと相互作用するスピン達の実効個数を意味している。カツツの転送作用素  $K(t)$  の第 1 固有値  $\mu_1(t)$  が漸近的縮退するかどうかは、対応する統計力学のカツツの格子模型に相転移があるかどうかにかかわっているのでこのような評価は大変重要なのである。(1) で得た一瀬・高信の精密な結果の然るべき格子模型への応用を検討中である。

田村博志は、伊東恵一 (撰南大) と共に、2 次元格子上の  $O(N)$  スピン系の古典平衡統計力学において、2 点相関関数の指数的減衰を、逆温度が  $\beta \leq cN \log N$  の範囲で示した。これは従来  $\beta \leq cN$  において、成立することが知られていたものを改良したものである。

(4) 田村英男 (岡山大) は伊藤宏 (愛媛大) と共に、磁場を持つ 2 次元シュレーディンガー作用素に対して、2 つの局所的な磁場を引き離れたときのアハラノフ・ボーム効果を散乱振幅の漸近挙動によって確認する興味ある研究も行った。

谷島賢二 (東大数理) は、3 次元以上ではすでに知られていたシュレーディンガー作用素の波動作用素が  $L^p(1 < p < \infty)$  空間においても有界になることを、1 次元あるいは 2 次元の場合に証明した (論文 [1],[2])。また、ある種の時間周期的なポテンシャルをもつ

シュレーディンガー方程式の Floquet 作用素のスペクトルが絶対連続になることを示した (論文 [4]). 更に, 自由シュレーディンガー方程式の基本解の無限遠方でのふるまいはすべての時間に於いて  $x^2$  より小さな摂動に関して安定であること, 調和振動子のそれについてもすべての非共鳴時間において同じことが言えることを示した (論文 [3]). 調和振動子の一次関数より大きな摂動の基本解は共鳴時間において異常な準古典的ふるまいをすることを示した (論文 [5]). 尚, この研究で現れるこのクラスのポテンシャル  $V(x)$  は (1) で考察したポテンシャルの条件を満たしている. また, Schrödinger 作用素論に関して谷島氏との討議は大変有益であった.

小栗栖修は, Pavel Exner (Czech Academy of Science) 及び廣川真男 (岡山大理) と共に, テイルを持つ磁場に対する異常パウリ電子状態について研究し論文を書いた. また, 廣川真男 (岡山大理) と共に, 非有界領域上の量子力学の数学的問題として, 2次元磁場中のスピン  $1/2$  の荷電粒子の基底状態について研究し論文を出版予定である.

高信敏は杉田洋 (九大数理) と共に, 相関のあるウィナー積分に対する中心極限定理に関する研究も行った.

中尾慎太郎は力学系的・確率解析的観点から, 藤曲哲郎は確率解析の観点から, (1) の研究をサポートした. 林田和也, 小俣正朗はそれぞれ個別的な非線形偏微分方程式を研究すると共に, (1), (2) の問題の非線形版を目下検討中である. 自己共役 Lie-Trotter 積公式は放物型偏微分方程式への応用があるが, 林田和也は非線型放物型偏微分方程式の非特性 Cauchy 問題の非適切性についての研究も行った.

以上のように, 本研究は相当の成果を上げてきたとともに, 更に今後の新しい研究の萌芽も得られたように思われる.

情報収集, レビューを受けるためのみならず, それと併せて研究成果の発表などのために, 研究代表者・分担者は国の内外の各地へ出かけたが, 口頭発表にその記録がある. 特に, 一瀬は, 平成 11 年 7 月韓国のソウルで開催された International Conference on Feynman Integrals and Related Topics から招待を受け, 本研究課題の Feynman 経路積分にかかわる観点について発表するため, 本研究費から一部サポートを受けて出張した. 平成 12 年 6 月 15 日から 1 ヶ月田村博志助教授を, フランスのマルセイユの CNRS の物理学センターの V. Zagrebnov 教授と Trotter 積公式について討議するため, 本研究費からの一部サポートで派遣した. また, 一瀬は, 平成 12 年 7-8 月連合王国のロンドンで開催された第 13 回国際数理物理学会議 ( $M \cap \Phi$ ) におけるポスターセッション発表のため, 及び, ドイツのクラウスタールで開催された国際会議「2000 年偏微分方程式」における招待講演のため, 本研究費から一部サポートを受けて渡欧した. この 2 つの会議の前後に, Hubert Kalf 教授との討議のため, ミュンヘン大学訪問し, また, プラーハのチェコ科学アカデミー核物理学研究所の Pavel Exner 教授を訪ね共同研究中の問題について討議も行った. 最後に, 平成 12 年 12 月インドのゴアで開催されたワークショップ「シュレーディンガー作用素のスペクトル・逆スペクトル理論」における招待講演のため, 本研究費から一部サポートを受けて出張した. 特に, ゴアのワークショップでは, カッツの転送作用素に関して最初の仕事をした Bernard Helffer 教授 (パリ大, フランス) や量子力学の数学的諸問題の研究で著名な Barry Simon 教授 (カリフォルニア工大, アメリカ) と討議することができたこと, また, 一瀬の以前の仕事と決定的にかかわった Erik

Balslev 教授 (オールフス大, デンマーク), Jean-Michel Combes 教授 (Toulon, フランス) と親しくお互いの最近の研究について話すことができたことは幸いであった。

更に研究代表者一瀬は, 本研究課題, 特に, シュレーディンガー作用素, ディラック作用素及びその周辺のテーマについて, 平成11年8月に, 来日中だった斉藤義実教授 (アラバマ大学バーミングハム校, アメリカ) を, 平成11年10月に Hubert Kalf 教授 (ミュンヘン大学, ドイツ) を, 平成11年11月に J. Dittrich 教授 (チェコ科学アカデミー核物理学研究所) を, 平成11年12月に Kalyan B. Sinha 教授 (インド統計研究所) を, 平成12年10月に Rémi Léandre 教授 (ナンシー大学, フランス) を金沢に招いて討議した。また平成12年10月には, Pavel Exner 教授 (Czech Academy of Science) が来日し, 金沢に招いて共同研究中の問題について再討議した。

また, 7月, 8月の渡欧中, ロンドン, 及び, プラーハにおいて, Zagrebnov 教授 (フランス) と会い共同研究の打ち合わせも行った。

本研究費からのこれらのサポートに対して, ここに感謝の意を表したい。

最後に, 本研究課題の成果の主な部分を述べた次の【1】及び【2】を本研究成果報告書の次頁から先に付けておく。

**【1】 The norm estimate of the difference between the Kac operator and the Schrödinger semigroup II: The general case including the relativistic case,** Electronic Journal of Probability, 5, Paper no. 5, pages 1-47 (2000) ..... 13-34 頁

**【2】 On the norm convergence of the Trotter-Kato product formula with error bound,** to appear in Proceedings of Partial Differential Equations, Clausthal, Germany, July 24-28, 2000 ..... 35-39 頁

【1】は, カッツの転送作用素に関する, 相対論的シュレーディンガー作用素を含む一般的な場合の結果を述べた, 一瀬・高信の論文 (一瀬の学会誌等の論文リストの [2]) の一部, Sections 1, 2 (pp. 1-11), Appendix/References (pp. 37-47), であり, 【2】は, 作用素ノルムに関する Lie-Trotter-Kato の積公式に関するほぼ最終的結果について述べた田村英男との共同研究による論文 (一瀬の学会誌等の論文リストの [4], [6]) のアブストラクト (一瀬の学会誌等の論文リストの [5]) である。