氏　　　名	中　根　和　昭
生 年 月 日	
本　　　籍	愛知県
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博甲第156号
学位授与の日付	平成７年９月26日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第４条第１項）
学位授与の題目	The Schrödinger Operator with Random Vector Potentials （乱雑なベクトルポテンシャルを持つシュレーディンガー作用素について）
論文審査委員	（主査）　中　尾　慎太郎 （副査）　一　瀬　　孝，土　谷　正　明 　　　　　髙　信　　敏，田　村　博　志

学位論文要旨

Nonlinear electromagnetism is a theory of generalized random fields in four dimensional Euclidean space-time obtained by solving a system of coupled stochastic partial differential equations. The fields are homogeneous with respect to the Euclidean group. Recently, in [S. Albeverio and H. Tamura, preprint], they consider a coupled theory of the confining nonlinear electromagnetic field and a charged scalar field within the quenched approximation. And they consider the propagator of matter field in approximation. The propagator is the expectation value of the resolvent kernel of the Schrödinger operator with the vector potential of the electromagnetic field. They define it as an element of $L^p(\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d),\mu)$ where μ is the probability measure which characterizes the nonlinear electromagnetic field. And they examined the asymptotic behavior of the propagator and showed that the correlation length is zero. However, they did not define the operator.

In this paper we consider the semi-group with random vector potential formally represented by $e^{t/2(\partial-iA)^2}$ on $L^2(\mathbf{R}^d)$, $d \geq 3$, $A \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$. The word "formally"reflects the fact we have not given a simultaneous definition of the operator $e^{t/2(\partial-iA)^2}$ for every A in the support of the measure μ on $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$. We define the semi-group on $L^2(\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d),\mu)$ μ-almost surely and show it is a strongly continuous symmetric contraction semi-group. Then there exists a generator of the semigroup that is self-adjoint. And we can show this operator is gauge covariant.

電磁場の量子論の構成の方法として Schwartz の急減少関数族の dual 空間 $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^4;\mathbf{R}^4)$ に入れた Gauss 型確率測度によって定義するものがあるが，これは相互作用のない model に対応している．相互作用を導入する方法としては，確率測度を定義する characteristic functional に複合 Poisson 的な部分を付け加えることが考えられる．近年 [S. Albeverio and H. Tamura, preprint] はこの相互作用が導入された確率測度 μ に対して $x,y \in \mathbf{R}^4$ を固定するごとに resolvent kernel $((\partial-iA)^2+m)^{-1}(x,y)$, $A \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^4;\mathbf{R}^4)$, $m>0$, を確率1で構成した．彼らは超関数である vector potential $A \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^4;\mathbf{R}^4)$ を十分滑らかなある関数列 $A^n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^4;\mathbf{R}^4)$ で近似し，その近似列により定義された $((\partial-iA^n)^2+m)^{-1}(x,y)$ が $L^p(\mu)(p>1)$ で Cauchy 列であることを示し，その極限として $((\partial-iA)^2+m)^{-1}(x,y)$ を定義した．しかし，除外集合が空間の点 x, y に依らずにとれることはまだ証明されていない．よって，このままでは $L^2(\mathbf{R}^4)$ 上の作用素として $(\partial-iA)^2$ を定義することができない．そこでこの論文では resolvent kernel の

かわりに semi-group $T_t^A = e^{t/2(\partial - iA)^2}$, $t > 0$, を同様の近似列を用いて確率1で構成することにより，その生成作用素として $(\partial - iA)^2$ を $L^2(\mathbf{R}^d)$, $d \geq 3$, の自己共役作用素として意味づけることを考察した.

この論文では次元 $d \geq 3$ とする. $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{d-1}) \in \mathbf{R}^d$, $f = (f_0, f_1, ..., f_{d-1}) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ に対して,Sf を

$$(Sf)_\nu(x) = \sum_{\rho=0}^{d-1} \int_{\mathbf{R}^d} S_{\nu\rho}(x-y) f_\rho(y) dy,$$

とする. ただし,

$$\begin{aligned} S_{0\nu}(x-y) &= \partial_\nu(-\Delta)^{-1}(x,y) = -\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{x_\nu - y_\nu}{|x-y|^d}, \\ S_{j0}(x-y) &= -\partial_j(-\Delta)^{-1}(x,y) = \frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{x_j - y_j}{|x-y|^d}, \\ S_{ij}(x-y) &= (\delta_{ij}\partial_0 + \sum_{k=1}^{d-1} a_{ijk}\partial_k)(-\Delta)^{-1}(x,y), \\ &= -\frac{\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}} \frac{(x_0 - y_0)\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{d-1} a_{ijk}(x_k - y_k)}{|x-y|^d}, \end{aligned}$$

$0 \leq \nu \leq d-1$, $1 \leq i, j \leq d-1$. ここで δ_{ij} は Kronecker の delta で a_{ijk} は実定数とする. また ψ は Lévy-Khinchin formula によって与えられる $\mathbf{R}^d$ 上の関数：

(1) $$\psi(\lambda) = \int_{\mathbf{R}^d} (1 - e^{i\langle\alpha,\lambda\rangle} + \frac{i\langle\alpha,\lambda\rangle}{1+|\alpha|^2}) d\nu(\alpha) + \frac{1}{2}\langle\lambda, \mathbf{A}\lambda\rangle - i\langle m, \lambda\rangle,$$

ただし ν は $\nu(\{0\}) = 0$, $\int_{\mathbf{R}^d}(|\alpha|^2 \wedge 1) d\nu(\alpha) < \infty$ なる $\mathbf{R}^d$ 上の測度, $\mathbf{A}$ は $d \times d$ の半正値の対称行列, $m \in \mathbf{R}^d$ である.

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ 上の汎関数 $C(\cdot)$ を

(2) $$C(f) = \exp\left(-\int_{\mathbf{R}^d} \psi(Sf(x)) dx\right)$$

とする. もし ψ がある定数 $c_1 > 0$ と $\frac{d}{d-1} < \eta \leq 2$ に対して

$$|\psi(\lambda)| \leq c_1 |\lambda|^\eta, \qquad \text{for} \quad |\lambda| \leq 1,$$

を満たすならば (2) の右辺の積分は収束し, また $C(\cdot)$ は characteristic functional となる. よって, Bochner-Minlos の定理により $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ 上に Borel 確率測度 μ が一意的に存在し

(3) $$C(f) = \int_{\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)} e^{i\langle f, A\rangle} d\mu(A),$$

となる. 今, $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ 上の transformation $\{\theta_z\}_{z \in \mathbf{R}^d}$ を

$$\theta_z A \equiv A(\cdot - z), \qquad A \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d),$$

とすると, (3) により定義される確率測度 μ はこの transformation に対して不変であり, 更に ergodic であることがわかる. この論文では ψ について更に以下の仮定をする：

(A) ψ は有界な非負値関数である.

C^∞ 関数 $I:\mathbf{R}\to[0,1]$ を

$$I(s)=\begin{cases}1, & |s|\le\frac{1}{4},\\ 0, & |s|\ge\frac{1}{2},\end{cases}$$

そして, $l\in\mathbf{N}$ に対して

$$I_l(s)=\begin{cases}1, & |s|\le l-1,\\ I(|s|-l+1), & l-1\le|s|\le l,\\ 0, & |s|\ge l,\end{cases}$$

とする. この関数 I を使って, $\varepsilon>0$ に対して

$$\rho_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^d\|I\|_{L^1}^d}\prod_{\nu=0}^{d-1}I(\frac{x_\nu}{\varepsilon}),$$

とする. ただし $\|\cdot\|_{L^1}$ は $L^1(\mathbf{R}^d,dx)$ ノルムとする. また関数 w_l を

$$w_l(x)=\prod_{\nu=0}^{d-1}I_l(x_\nu),$$

とする. 以下では $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$, $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$ を それぞれ $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^d$ に値をとり compact support をもつ C^∞ 関数全体とする. そのとき

$$\rho_\varepsilon\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^d),\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\rho_\varepsilon=\delta,\qquad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d),$$

$$w_l\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^d),\qquad 0\le w_l\le1,\qquad w_l\uparrow1\qquad \text{as}\quad l\to\infty.$$

各 $A\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$ に対して近似列 A^n $(n\in\mathbf{N})$ を

$$A_\nu^n(x)=w_n(x)\langle\rho_{1/n}(x-\cdot),A_\nu\rangle,\qquad \nu=0,1,2,...,d-1$$

によって定義する. A^n は

$$A^n\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d),\qquad \lim_{n\to\infty}A^n=A,\qquad \text{in}\quad \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$$

を満たしていることが分かる.

次の Lemma が成立する. ここでは簡単のため $T_t^{A,n}$ とは $e^{t/2(\partial-iA^n)^2}$ を表すものとする.

Lemma.
$T>0$ を固定する. 任意の $t\in[0,T]$, $f\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^d)$ に対して $\{T_t^{A,n}f\}_{n=1}^\infty$ は $L^2(\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)\times\mathbf{R}^d,\mu\times dx)$ の Cauchy 列であり, 更にこの収束は, $t\in[0,T]$ について一様である. つまり

$$\sup_{t\in[0,T]}\|T_t^{A,n}f-T_t^{A,m}f\|_{L^2(\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)\times\mathbf{R}^d)}\to0\quad m,n\to\infty.$$

この Lemma と以下に述べる一般論から n を無限大にしたときの極限として形式的には $e^{t/2(\partial-iA)^2}$, $A\in\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$ と書かれる, semi-group T_t^A が存在する.

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間, X を可分な Hilbert space とする. X 上の有界線形作用素全体を $\mathcal{L}(X)$ と書くことにする.

Definition.
$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の $\mathcal{L}(X)$ 値確率過程 $\{T_t\}_{t\ge0}$ が

$$P(\{T_t\}_{t\ge0}\text{ is a strongly continuous symmetric contraction semi-group })=1,$$

を満たすとき，それを X 上の P に関する strongly continuous symmetric contraction semi-group process と呼ぶ.

Theorem 1.

$\{T_t^n\}_{t\geq 0}(n = 1, 2, \cdots)$ を X 上の P に関する *strongly continuous symmetric contraction semi-group process* の列とする.$\mathcal{D}$ を X の可算で稠密な部分集合とする. そのとき任意の $f \in \mathcal{D}, \varepsilon > 0, T > 0$ に対して

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} P(\|T_t^n f - T_t^m f\|_X > \varepsilon) = 0.$$

が成り立つものとする. このとき X 上の P に関する *strongly continuous semi-group process* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} P(\|T_t^n f - T_t f\|_X > \varepsilon) = 0$$

を全ての $f \in X$ に対して満たす.

このようにして定義されたsemi-group processT_t^A に対して，その生成作用素を $\mathcal{G}_A$ と書くことにすると，明らかに $\mathcal{G}_A$ は自己共役作用素である.

Theorem 2.

$L^2(\mathbf{R}^d)$ における自己共役作用素 $\mathcal{G}_A$ が 確率測度 μ に関してほとんど全ての $A \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^d)$ で存在する.

それは $\lambda \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ に対して gauge covariant であることがわかる. すなわち

Theorem 3.

$\lambda \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$e^{i\lambda}\mathcal{G}_A e^{-i\lambda} f = \mathcal{G}_{A+\partial\lambda} f, \quad \mu - \text{a.s.}$$

更に μ が ergodic であることより，$\mathcal{G}_A$ の spectrum について次のことが成り立つ.

Theorem 4.

$\sigma(A)$, $\sigma_{pp}(A)$, $\sigma_{ac}(A)$, $\sigma_{sc}(A)$ を $\mathcal{G}_A$ の *spectrum, point spectrum, absolutely continuous spectrum, singular continuous spectrum* とする. すると，$\mathbf{R}$ の 閉部分集合 σ, σ_{pp}, σ_{ac}, σ_{sc} が存在して

$$\sigma = \sigma(A), \sigma_{pp} = \sigma_{pp}(A), \sigma_{ac} = \sigma_{ac}(A), \sigma_{sc} = \sigma_{sc}(A) \quad \mu - \text{a.s.}$$

となることが分かる.

参考文献

[AT] S. Albeverio and H. Tamura, On the propagator of a scalar field in the presence of confining nonlinear electromagnetic force, preprint.

学位論文の審査結果の要旨

平成７年７月25日に第１回学位論文審査委員会を開催し，また平成７年８月９日の口頭発表の後，第２回学位論文審査委員会を開き，協議の結果以下の通り判定した。

量子化された電磁場の中を動く荷電粒子の量子論をユークリッド時空で考察するとき，この電磁場を記述するシュレーディンガー作用素を研究することは非常に重要である。このとき，電磁場は量子化されているので，シュレーディンガー作用素のベクトルポテンシャルとして超関数に値をとる確率変数を考えなければならない。それ故，このシュレーディンガー作用素の数学的定式化は明らかではない。本論文では，相互作用のあるモデルに対応する超関数値確率変数をベクトルポテンシャルとするシュレーディンガー作用素を取り扱っている。ベクトルポテンシャルを滑らかな関数列で近似し，対応する対称半群の列が確率１で収束することを示し，その極限である対称半群の生成作用素として，このシュレーディンガー作用素を数学的に定式化した。この定式化を用いて，電磁場のゲージ変換の下でのシュレーディンガー作用素の変換が，電磁場の古典論で良く知られたゲージ共変性を確率１でみたすことを注意した。また，対象としている電磁場がエルゴード性をもつことを示し，シュレーディンガー作用素の各スペクトルの存在領域が殆ど確実に一致することを示した。

以上の研究成果は，非線型電磁場の量子論に十分意義があり，今後の研究の進展に寄与することが期待されるものである。従って，本論文は博士論文に値するものと判定する。