氏　　名	山　代　隆　章
生 年 月 日	
本　　籍	富山県
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	博甲第157号
学位授与の日付	平成７年９月26日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第４条第１項）
学位授与の題目	退化する楕円型モンジュ・アンペール方程式のコーシー問題におけるある評価について （On some estimate of Cauchy problem for degenerate elliptic equations of Monge-Ampère type）
論文審査委員	（主査）　林　田　和　也 （副査）　藤　本　坦　孝，一　瀬　　孝 中　尾　愼太郎，小　俣　正　朗

学位論文要旨

Let L be a linear elliptic operator and Ω be a domain in $\mathbf{R}^N$. Let Γ be a Cauchy surface on $\partial\Omega$ and Ω' be a bounded subdomain of Ω such that $\overline{\Omega'} \subset \Omega \cup \Gamma$. Let u be a solution of $Lu = 0$ in $\overline{\Omega}$. Then under some assumptions on L and Γ it is known that there are two positive constants C and α with $\alpha < 1$ such that

$$(*) \qquad \|u\|_2 \leq C(\|u\|_1)^{\alpha}(\|u\|_3)^{1-\alpha},$$

where $\| \ \|_i$ $(i = 1, 2, 3)$ are some norms on Γ, Ω' and Ω, respectively. In particular, $\|u\|_1$ is the norm of Cauchy data of u on Γ.

Naturally the following question arises : Does the estimate similar to $(*)$ hold too for solutions of nonlinear elliptic equation?

In this paper we show an estimate better than $(*)$ for the degenerate elliptic equation of Monge-Ampère type with two variables, which is a typical equation of nonlinear elliptic equations.

偏微分方程式は，線型偏微分方程式と非線型偏微分方程式の大きく２つの分野に分けることが出来る．非線型偏微分方程式は更に semilinear（半線型），quasilinear（準線型），fullynonlinear（完全非線型）の３種類に分類出来る．

一般に，線型，非線型はそれぞれ独自に研究がなされているのであるが，線型の場合に起こりうる結果が，非線型の場合にも起こりうるかどうかを調べることは非常に興味のあることである．

そこで我々は，線型の楕円型・放物型方程式におけるコーシー問題の解の ill-posed 評価に注目してみた．Ω を $\mathbf{R}^n$ の有界領域，Γ を $\partial\Omega$ の一部とする．また，$\Omega' \subset \Omega$ を $\overline{\Omega'} \subset \Omega \cup \Gamma$ なるよう選ぶ．ここで，L を２階線型楕円型作用素とするとき，Γ 上で $u = f$, $\partial_\nu u = g$ を満たし，Ω' で $Lu = 0$ を満たす u を見つける問題をコーシー問題という．ただし，∂_ν は Γ 上の外法線方向の微分とし，f, g を与えられた関数とする．また，ill-posed 評価とはある領域で与えられた方程式の解が，そこでのあるノルムが有界な範囲という条件の下で，その領域の部分境界 (Cauchy sruface) 上のデータ (Cauchy data) により，その解のある評価が部分境界の近くで出来るというものである．well-posed 評価とはその領域上の解のあるノルムが有界な範囲という条件が不要な場合をさす．

コーシー問題において解の一意性がいえるかどうかが大きな問題の1つである．これは，$f=0$, $g=0$ のとき $u=0$ が示されれば解決する．これを示すには，$\|\ \|_{\Omega'}$ を Ω' 上のあるノルム，$\|\ \|'_{\Gamma}, \|\ \|''_{\Gamma}$ をそれぞれ Γ 上のあるノルムとするとき，

(1) $$\|u\|_{\Omega'} \leq C(\|f\|'_{\Gamma} + \|g\|''_{\Gamma})$$

が成立することを言えばよい．

このとき一般に C は，$\|u\|_{\Omega} \leq M$ （$\|\ \|_{\Omega}$ は Ω 上のあるノルム）なる M に依存して決まる．即ち，

(2) $$\|u\|_{\Omega'} \leq C(M)(\|f\|'_{\Gamma} + \|g\|''_{\Gamma})$$

という評価になる．この評価を ill-posed 評価という．線型の楕円型や放物型方程式の解を評価するとき，一般には ill-posed な評価になってしまう．これらについては多くの結果がある（例えば J.R.Cannon[1],L.Hörmander[3], K.Miller[4] など）．そこで我々は fullynonlinear 型の典型的な Monge-Ampère 型方程式について，その評価が出来るかどうかを考えてみた．

ある領域上で我々は次の退化楕円型 Monge-Ampère 型方程式の解を考える：

(3) $$\partial_x^2 u \partial_y^2 u - (\partial_x \partial_y u)^2 + g(x,y,u) = f\ (\geq 0).$$

当然，非線型の場合にも同様な評価が出来るかどうかは大いに興味のあるところである．しかし，驚くべきことに Monge-Ampère 方程式の解の評価をしたところ，(2) よりもむしろ (1) に近い形の評価になってしまった．これは線型の場合には起こり得ないことである．以下，この結果とその証明の概略について述べる．

D を (x,y)-平面の有界領域とし，その境界を ∂D とする．Γ を ∂D の連結な開部分集合とする．我々は，$D \subset \{y > 0\}, \Gamma \ni O$(原点) と Γ が C^1 クラスであることを仮定する．

我々は，$\rho > 0$, $D_\rho = D \cap \{y < \rho\}, \Gamma_\rho = \Gamma \cap \{y < \rho\}, l_\rho = D \cap \{y = \rho\}$ と定義する．

また，我々は次の2つを仮定する:

(H.1) 任意の $0 < \rho < \rho' \leq a$ を満たすρ, ρ' に対して，任意の開線分 l_ρ が $|l_\rho| \leq |l_{\rho'}| \leq 1/2$ を満たすような実数 a $(0 < a < 1)$ が存在する．

(H.2) (H.1) の仮定の下で，$\varphi(0) = 0, \varphi(\pm c) \geq a, \{(x, \varphi(x)); |x| \leq c\} \subset \Gamma$ と $\{|x| \leq c\}$ で $\varphi''(x) > 0$ を満たすような $c > 0$ と関数 $\varphi(x) \in C^2(\{|x| \leq c\})$ が存在する．

我々は (3) において，ある正の定数 K に対して g が

$$g(x,y,z) \leq Kz^2$$

を満たすと仮定する．このとき (3) は次の形に変形される．

(4) $$(\partial_x \partial_y u)^2 - \partial_x^2 u \partial_y^2 u \leq Ku^2.$$

我々は $L^\infty(D_\rho)$ と $L^\infty(\Gamma_\rho)$ のノルムを $\|\ \ \|_\rho$, $\langle\ \ \rangle_\rho$ と書くことにする．

我々の目的は次を証明することである．

定理 1

(H.1) が成立すると仮定する．u は $C^2(\overline{D_a})$ に属し D_a で (6.2) の解であると仮定する．ε を

$$\varepsilon = \langle u \rangle_a + \langle \partial_x u \rangle_a + \langle \partial_y u \rangle_a + \langle \partial_x \partial_y u \rangle_a + \langle \partial_y^2 u \rangle_a$$

とおき，

$$\varepsilon \max(e^a, e^{\sqrt{2Ka}}) \leq 1$$

を満たすとする．そのとき，次が成立する：

$$\|u\|_{\frac{a}{2}} + \|\partial_x u\|_{\frac{a}{2}} \leq Ca^{-2}\varepsilon^{\frac{1}{6}},$$

ただし，C は，$a, K, \varepsilon, \Gamma$, D に無関係な正の定数である．

次に (H.2) を仮定する．x_0 を $0 < |x_0| < c/2$ と $|\varphi'(x_0)| < 1/2$ を満たすような実数とする．点 $(x_0, \varphi(x_0))$ の周りで，次の直交変換を行う：

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - \varphi(x_0) \end{pmatrix},$$

ただし，$\sin\theta = \varphi'(x_0)/\sqrt{1+\varphi'(x_0)^2}$ とする．即ち，$\xi(\eta)$-軸が $(x_0, \varphi(x_0))$ における Γ の接線（法線）となる．我々は $\rho > 0$ に対して，$E_\rho = D \cap \{(\xi,\eta); 0 < \eta < \rho\}$ であるように E_ρ を定義する．我々は (ξ,η)-軸を持った新しい平面における領域として，D を見る．(H.2) の仮定の下で，次のことが簡単に確かめられる: $0 < |x_0| < c/2$, $|\varphi'(x_0)| < 1/2$, $0 < \tilde{a} < a/2$, $D_{\tilde{a}} \subset D_{\frac{a}{2}} \cap E_{\frac{a}{2}}$ を満たし，(H.1) が D_a と E_a の両方で成立するような x_0, a, $\tilde{a}$ が存在する．我々は $\beta = \sin\theta$ と書く．

$\langle\ \rangle_\Gamma$ を $L^\infty(\Gamma)$ のノルムとする．これらの仮定の下で次を得る．

定理 2

u を定理 1 における関数とする．$\tilde{\varepsilon}$ を

$$\tilde{\varepsilon} = \langle u\rangle_\Gamma + \langle\partial_x u\rangle_\Gamma + \langle\partial_y u\rangle_\Gamma + \langle\partial_x\partial_y u\rangle_\Gamma + \langle\partial_y^2 u\rangle_\Gamma$$

と定義し，

$$\tilde{\varepsilon}\max(e^a, e^{\sqrt{2K}a}) \le 1$$

を満たすものとする．そのとき次が成立する：

$$\|u\|_{\tilde{a}} + \|\partial_x u\|_{\tilde{a}} + |\beta|\|\partial_y u\|_{\tilde{a}} \le Ca^{-2}(\tilde{\varepsilon} + |\beta|\langle\partial_x^2 u\rangle_\Gamma)^{\frac{1}{8}},$$

ただし，C は $a, \tilde{a}, K, \varepsilon, \Gamma, D, x_0, \beta$ に無関係な正の定数である．

次に，定理 1 の証明の概略を示す．$0 < \rho \le a$ とし，u を定理 1 における関数とする．$(\ ,\ )_\rho$ を $L^2(D_\rho)$ の内積とする．

$\lambda \le -1$ に対して，$v(x,y) = e^{\lambda y}u(x,y)$ とおく．このように v を作り v に関する計算に帰着する方法は，線型方程式については最初に L.Nirenberg[5] によって行われた．最近，準線型楕円型方程式については K.Hayasida[2] によって適用された．このとき (4) より $k \ge 0$ のとき次が成り立つ：

$$\begin{aligned} &((\partial_x\partial_y v)^2, |\partial_x v|^k)_\rho - (\partial_x^2 v\partial_y^2 v, |\partial_x v|^k)_\rho - 2\lambda(\partial_x v\partial_x\partial_y v, |\partial_x v|^k)_\rho \\ &+\lambda^2((\partial_x v)^2, |\partial_x v|^k)_\rho + 2\lambda(\partial_y v\partial_x^2 v, |\partial_x v|^k)_\rho - \lambda^2(v\partial_x^2 v, |\partial_x v|^k)_\rho \le K(v^2, |\partial_x v|^k)_\rho. \end{aligned} \tag{5}$$

(5) 式の各項に対し部分積分を行い，下記の不等式

$$\int_{\Gamma_a} |f|^{1+k}|g|d\sigma \le \frac{1+k}{2+k}\int_{\Gamma_a}|f|^{2+k}d\sigma + \frac{1}{2+k}\int_{\Gamma_a}|g|^{2+k}d\sigma,$$

$$\int_{\Gamma_a} |f|^k g^2 d\sigma \le \frac{k}{2+k}\int_{\Gamma_a}|f|^{2+k}d\sigma + \frac{2}{2+k}\int_{\Gamma_a}|g|^{2+k}d\sigma,$$

$$\int_0^a (1,f)_\rho d\rho = \int_0^a \rho'(1,f)_\rho d\rho = a(1,f)_a - \int_0^a \rho\partial_\rho(1,f)_\rho d\rho = (a-y,f)_a \ge \frac{a}{2}(1,f)_{\frac{a}{2}},$$

を適用することにより，次式が得られる．

$$\begin{aligned} (\int_{D_{\frac{a}{2}}} |\partial_x v|^{2+k}dxdy)^{\frac{1}{2+k}} \ \le\ & (6/a)^{\frac{1}{2+k}}[(\int_{\Gamma_a}|\partial_x v|^{2+k}d\sigma)^{\frac{1}{2+k}} + (\int_{\Gamma_a}|\partial_y v|^{2+k}d\sigma)^{\frac{1}{2+k}} \\ &+ (\int_{\Gamma_a}|v|^{2+k}d\sigma)^{\frac{1}{2+k}} + (\int_{\Gamma_a}|\partial_y^2 v|^{2+k}d\sigma)^{\frac{1}{2+k}} \\ &+ (\int_{\Gamma_a}|\partial_x\partial_y v|^{2+k}d\sigma)^{\frac{1}{2+k}} + 2(\int_{\Gamma_a}|v|^{2+k}d\sigma)^{\frac{1}{2+k}}]. \end{aligned} \tag{6}$$

(6) において，$k \to \infty$ とすると次式が成立する：

$$\|\partial_x v\|_{\frac{a}{2}} \le \langle\partial_x v\rangle_a + \langle\partial_y v\rangle_a + 3\langle v\rangle_a + \langle\partial_y^2 v\rangle_a + \langle\partial_x\partial_y v\rangle_a.$$

これより直ちに，次がいえる．

$$\|v\|_{\frac{a}{2}} + \|\partial_x v\|_{\frac{a}{2}} \leq C[\langle v\rangle_a + \langle \partial_x v\rangle_a + \langle \partial_y v\rangle_a + \langle \partial_x\partial_y v\rangle_a + \langle \partial_y^2 v\rangle_a],$$

ただし， C は $a, K, \varepsilon, \lambda, \Gamma$, D に無関係な正の定数である．ここで， v を u に戻すと

$$\begin{aligned} \exp(\frac{\lambda a}{2})(\|u\|_{\frac{a}{2}} + \|\partial_x u\|_{\frac{a}{2}}) &\leq C\lambda^2[\langle u\rangle_a + \langle \partial_x u\rangle_a + \langle \partial_y u\rangle_a + \langle \partial_x\partial_y u\rangle_a \\ &+ \langle \partial_y^2 u\rangle_a], \end{aligned}$$

となる．よって，$\lambda = -\frac{1}{a}\log(\frac{1}{\varepsilon})$, とおくことにより，

$$\|u\|_{\frac{a}{2}} + \|\partial_x u\|_{\frac{a}{2}} \leq Ca^{-2}\exp(\frac{5}{6}|\lambda|a)\varepsilon = Ca^{-2}\varepsilon^{\frac{1}{6}},$$

が成立する．よって，求める不等式が得られた．

次に，定理２の証明の概略を示す．$\alpha = \cos\theta$ と書くと次の関係が得られる．

$$\begin{cases} \partial_\xi u = \alpha\partial_x u + \beta\partial_y u, \\ \partial_\eta u = \alpha\partial_y u - \beta\partial_x u, \\ \partial_\xi\partial_\eta u = -\alpha\beta\partial_x^2 u + (\alpha^2 - \beta^2)\partial_x\partial_y u + \alpha\beta\partial_y^2 u, \\ \partial_\eta^2 u = \beta^2\partial_x^2 u - 2\alpha\beta\partial_x\partial_y u + \alpha^2\partial_y^2 u. \end{cases} \tag{7}$$

ここで，

$$\varepsilon' = \langle u\rangle_\Gamma + \langle \partial_\xi u\rangle_\Gamma + \langle \partial_\eta u\rangle_\Gamma + \langle \partial_\xi\partial_\eta u\rangle_\Gamma + \langle \partial_\eta^2 u\rangle_\Gamma,$$

と定義すると，定理１より次の２式が成り立つ：

$$\|u\|_{\tilde{a}} + \|\partial_\xi u\|_{\tilde{a}} \leq Ca^{-2}\varepsilon'^{\frac{1}{6}},$$

$$\|u\|_{\tilde{a}} + \|\partial_x u\|_{\tilde{a}} \leq Ca^{-2}\varepsilon^{\frac{1}{6}}.$$

(7) より次を得る：

$$\|u\|_{\tilde{a}} + \|\partial_x u\|_{\tilde{a}} + |\beta|\|\partial_y u\|_{\tilde{a}} \leq \|u\|_{\tilde{a}} + 2\|\partial_x u\|_{\tilde{a}} + \|\partial_\xi u\|_{\tilde{a}}.$$

よって，次がいえる：

$$\|u\|_{\tilde{a}} + \|\partial_x u\|_{\tilde{a}} + |\beta|\|\partial_y u\|_{\tilde{a}} \leq Ca^{-2}(\varepsilon + \varepsilon')^{\frac{1}{6}}.$$

このとき，(7) よりただちに次式が得られる：

$$\begin{aligned} \varepsilon' &\leq 2[\langle u\rangle_\Gamma + \langle \partial_x u\rangle_\Gamma + \langle \partial_y u\rangle_\Gamma \\ &+ \langle \partial_x\partial_y u\rangle_\Gamma + \langle \partial_y^2 u\rangle_\Gamma] + \beta\langle \partial_x^2 u\rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

これらの不等式をあわせることにより，定理２の証明が完成する．

参考文献

[1] J. R. Cannon, *A Cauchy problem for the heat equation,* Ann. Mat. Pura Appl.(4) 66 (1964), pp.155-165.

[2] K. Hayasida, *On some improperly posed problem for degenerate quasilinear elliptic equations,* J. Math. Soc. Japan. 46(1994), pp. 165-183.

[3] L. Hörmander, *Linear partial differntial operators,* Springer,1963.

[4] K. Miller, *Three circle theorems in partial differential equations and applications to improperly posed problems,* Arch. Rat. Mech. Anal. 16(1964), pp. 126-154.

[5] L.Nirenberg, *Uniquness in Cauchy problem for differential equations with constant leading coefficients,* Comm. Pure. App. Math. 10(1957), pp. 89-105.

学位論文の審査結果の要旨

平成7年7月28日に第1回論文審査委員会を開催し，提出された論文を検討するとともに面接審査を経て，平成7年8月9日に最終審査を行った結果，以下の通り判定した。

線形偏微分方程式論において，Cauchy 問題が well-posed でない場合，例えば楕円型方程式に対して well-posedness の不足を補う形での ill-posed 評価式が多くの研究者によって研究されてきた（Hormander 1959, Miller 1964 など)。別の側面から見れば，それは一意接続性の定理，Hadamard の三円定理などと密接に係わり合っている。しかし非線形微分方程式の分野では，このような ill-posed 評価式について未だ不明の部分が多い。最近，Cauchy 曲面の凸性を仮定すれば，ある種の準線形楕円型方程式の解について ill-posed 評価式が成りたつことが分かってきた。

本論文では Kutev が1989年に境界値問題において取り扱った非線形方程式の中でも厄介な退化型楕円型 Monge-Ampère 方程式について，ill-posed 評価式が成り立つかどうかが研究された。方法は Carleman のそれに従うが，意外にも Cauchy 曲面が領域を殆ど包み込む場合には ill-posed というよりも well-posed に近い評価式が成り立つことが分かった。従来，楕円型 Monge-Ampère 方程式に対してはこのような研究はあまりなされなかった。本論文のこの結果は非線形楕円型方程式の Cauchy 問題の研究において興味あるものと思われる。以上によって，本論文は博士論文に値するものと判定する。