The application of the Wilson renormalization group to the elementary particle physics

著者	相馬 亘
journal or publication title	博士学位論文要旨　論文内容の要旨および論文審査結果の要旨／金沢大学大学院自然科学研究科
volume	平成8年6月
page range	87-90
year	1996-06-01
URL	http://hdl.handle.net/2297/16010

氏　　　名	相 馬　　亘
生 年 月 日	
本　　　籍	千葉県
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	博甲第167号
学位授与の日付	平成８年３月25日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第４条第１項）
学位授与の題目	ウィルソン繰り込み群の素粒子物理への応用 (The application of the Wilson renormalization group to the elementary particle physics)
論文審査委員	（主査）　青 木 健 一 （副査）　鈴 木 恒 雄，久 保 治 輔 松 原 克 己，田 村 博 志

学位論文要旨

The non-perturbative Wegner-Houghton renormalization group is analyzed by the local potential approximation in O(N) scalar theories in d-dimensions ($3 \leq d \leq 4$) and the standard model. In the O(N) scalar theories the leading critical exponents ν are calculated in order to investigate the effectiveness of the local potential approximation by comparing them with the other non-perturbative methods. We show analytically that the local potential approximation gives the exact exponents up to $O(\epsilon)$ in ϵ-expansion and the leading in $1/N$-expansion. We claim that this approximation offers fairly accurate results in the whole range of the parameter space of N and d. It is a great advantage of our method that no diverging expansions appear in the procedure. In the standard model we will give the Higgs-top mass bounds. Firstly we concentrate on the perturbative calculation using the leading-log series summation tequnique to the effective potential in the standard model. Next we apply the local potential approximated Wegner-Houghton equation to the standard model.

素粒子物理において摂動的繰り込み群は、QCD での漸近的自由性の発見や、最近の超対称統一理論でのゲージ結合定数の統一など、様々な成功を上げている。しかし全ての現象に対して摂動的方法が適応できるわけではなく、カイラル対称性のダイナミカルな破れや、量子重力などのように、非摂動的な側面が本質的な役割を担っている現象が存在する。現在そのような問題に対して、格子モンテカルロの方法や、Schwinger-Dyson 方程式などの方法があるが、どれも一長一短で、決定的な非摂動的方法は存在していない。この論文では、非摂動的方法の一つである、Wilson 繰り込み群の素粒子物理への応用について考える。第１章では、この Wilson 繰り込み群が、現在の素粒子物理のなかで、どのようなところに位置付けられるのかを議論する。

Wilson 繰り込み群は'70 年代の始めに発見され、主に物性系に対して応用され様々な研究がなされてきた。平均場理論、Landau 理論、スケーリング則などの研究から繰り込み群に至る経緯には、学ぶべきところが多いので、この論文の主旨とははずれるが、第２章で簡単にレビューをする。

Wilson 繰り込み群は、Wegner と Houghton によって連続的 Wilson 繰り込み群が定式化されたが、それは有効作用に対する汎関数微分方程式として与えられるため、実用的な利用は難しいと思われていた。その後 Hasenfratz によって、スカラー理論に対して、有効作用を局所ポテンシャルで近似する方法

が用いられ、相関関数に対する臨界指数などが計算された。だがそれは、有効ポテンシャルに対する非線形偏微分方程式で与えられるため、素粒子物理で扱う複雑な模型に対して適応した場合、連立非線形偏微分方程式となり、その解析は絶望的である。だが有効ポテンシャルを場で展開し、その展開係数に対する連立常微分方程式に簡略化すれば、一気に展望が開けてくる。だがこの近似がどれぐらい良いのか悪いのかを判断せずに、やみくもに複雑なモデルを扱っても意味がない。そこで、第3章の前半では、繰り込み群の理解が最も進んでいる O(N) スカラー理論への適応を考える。O(N) スカラー理論に対する、局所ポテンシャル近似された Wegner-Houghton 方程式は

$$\frac{dV(\rho;t)}{dt} = \frac{A_d}{2}\left[\ln(1+V'+2\rho V'') + (N-1)\ln(1+V')\right] + d{\cdot}V + (2-d)\rho V' \qquad (1)$$

で与えられる。ここで $A_d = \pi^{-d/2}2^{1-d}/\Gamma(d/2)$ で d-次元球の表面積である。また$\rho = \phi_\alpha^2$でありϕ_αは O(N) 対称性を持つスカラー場であり、$'$ はρでの微分を表わす。始めに N=1 の 3 次元スカラー理論を数値的に解析する。なぜなら、三次元スカラー理論には、非自明な固定点が存在するため、その近傍での振る舞いを解析するには、通常の摂動的な取扱は信頼できない。そのため非摂動的な取扱が必要となるからである。その際、有効ポテンシャルの展開の仕方を、

$$\text{ケース：A} \qquad V = \sum_{m=0}^{\mathrm{M}} \frac{a_m(t)}{m!}\rho^m \qquad (2)$$

$$\text{ケース：B} \qquad V = \sum_{m=0}^{\mathrm{M}} \frac{b_m(t)}{m!}(\rho-\rho_0(t))^m \qquad (3)$$

$$\text{ケース：C} \qquad V = \sum_{m=0}^{\mathrm{M}} \frac{c_m(t)}{m!}(\rho-\rho_0)^m \qquad (4)$$

の様に原点からの展開、常にポテンシャルの最小値からの展開、展開点を原点からずらした展開という三種類の展開方法を用いて解析する。そこでそれらを用いて、相関関数に対する臨界指数と非自明な固定点を紫外固定点とした場合の、赤外領域での有効ポテンシャルの振る舞いを調べた結果、常にポテンシャルの最小値から展開するという、ケース B の方法が展開の次数に対して、安定した振る舞いを示すことが確認できた。

次に、ここで得た結果を手掛かりとして、次元が 3 ～ 4 の O(N) スカラー理論に対して適応し、数値的な解析を行って相関関数に対する臨界指数を求めて、図 1 の結果を得ると共に、解析的な議論でϵ-展開と $1/N$-展開と比較した。そうすることによって、これらの方法の両方をカバーする能力があることが解った。このような解析から、この近似は最低次の近似でありながら、理論の本質的な部分をつかむ能力があることが確認できた。

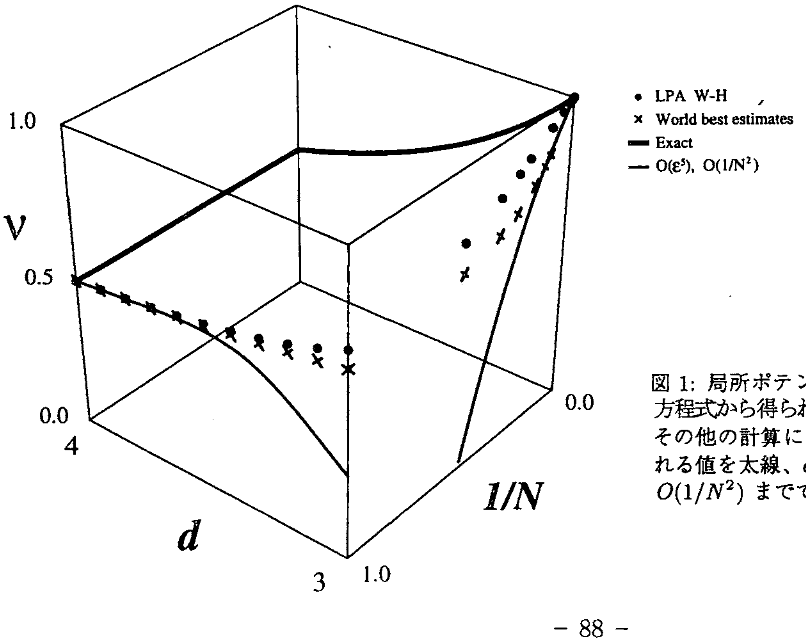

図 1: 局所ポテンシャル近似された Wegner-Houghton 方程式から得られた結果を黒丸、格子モンテカルロなどのその他の計算によって得られた値を×、近似なしで得られる値を太線、ϵ-展開で $O(\epsilon^5)$ まで、$1/N$-展開で $O(1/N^2)$ までで知られている値を実線で書いてある。

これらの議論を背景にして、第3章の後半では、更に現実的なモデルである素粒子物理での標準模型への応用を考える。そこではヒグスボソンとトップクォークの質量制限に焦点を合わせて議論する。標準模型はLEPでの精密測定や、最近のCDFでのトップクォークの発見などによって、その信頼性は日々増すばかりであるが、ヒグスボソンの質量に関してはまだ何も手掛かりが得られていない。この質量に制限を与えるものに、理論の自明性から制限を与えるものと、真空の安定性から制限を与えるものがある。これらは各々ヒグスボソンの質量の上限と下限を与える。このような議論で従来用いられてきたものは、エネルギースケールがZボソンの質量での制限であったが、それは、トップクォークやヒグスボソンの質量殻での値ではないので、繰り込みの描像に依存している。そこで、繰り込みの描像に依らないように質量殻での値で正しく評価し直す。また摂動論の限界に迫る方法である、有効ポテンシャルのleading log seriesの足し上げという方法を用いた解析も併せて考える。それによって、摂動論ではそれ以上精密に解析できないレベルまで精度を高めた制限を与えることになり図2を得ることが出来た。図

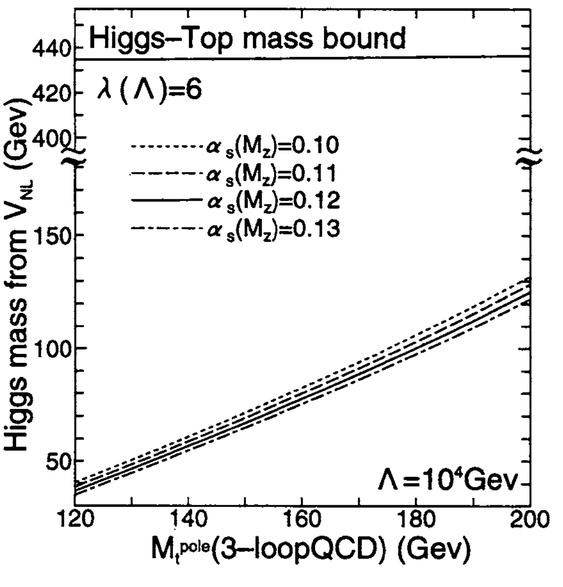

図2: Leading log seriesの足し上げの方法を、標準模型に適応して得られたヒグスボソンとトップクォークに対する質量制限。縦軸はヒグスボソンのプロパゲータの極での値。横軸はQCD補正を考慮して求めた、プロパゲータの極での値。左側の図はカットオフが10^4Gevの場合、右側の図はカットオフが10^{16}Gevの場合

では、上の方で水平にのびている線が理論の自明性からの制限で、ヒグスボソンの質量の上限を与える。また斜めにのびている線は、真空の安定性からの制限で、ヒグスボソンの質量の下限を与える。

だが、ヒグスボソンの上限に対しては、摂動論固有の問題のため、満足のいく制限とは言えない。そこで、局所ポテンシャル近似されたWegner-Houghton方程式で、ポテンシャルをその最小値から展開する、という方法でそれらの制限を与えることを議論する。まず始めに、標準模型をヒグスボソンとトップクォークのみの系に近似して考える。ヒグスボソンのポテンシャルを$V(\rho,t)$トップクォークの湯川結合部分を$G(\rho,t)$とし、$F(\rho,t)=\partial V/\partial\rho$とすると、この系に対する局所ポテンシャル近似されたWegner-Houghton方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{6F_\rho}{1+2F}+\frac{6F_\rho+4\rho F_{\rho\rho}}{1+2F+4\rho F_\rho}-\frac{12G^2+24\rho G G_\rho}{1+\rho G^2}\right] \\ &\quad +2\cdot F-2\cdot\rho F_\rho \qquad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{6G_\rho}{1+2F}+\frac{6G_\rho+4\rho G_{\rho\rho}}{1+2F+4\rho F_\rho}+\frac{2G^3}{(1+\rho G^2)(1+2F)}-\frac{2G(G+2\rho G_\rho)^2}{(1+\rho G^2)(1+2F+4\rho F_\rho)}\right] \\ &\quad -2\cdot\rho G_\rho \qquad (6)\end{aligned}$$

である。ここで$\rho = \phi^{\dagger}\phi$であり$\phi$はヒグス場である。$'$は$\rho$での微分を表す。これらの方程式を、ヒグスポテンシャルの最小値で展開する方法を用いて解析すると、8 次元の演算子まで展開すれば展開次数に対して安定なヒグス-トップ質量制限を求めることができることが解った。またこの系に 4 対フェルミの項を加えて解析を行い、この項がそれらの制限には効かないことも解った。そしてゲージ場をダイアグラム的に加える手法を用いて質量制限を求めて図 3 の結果を得た。

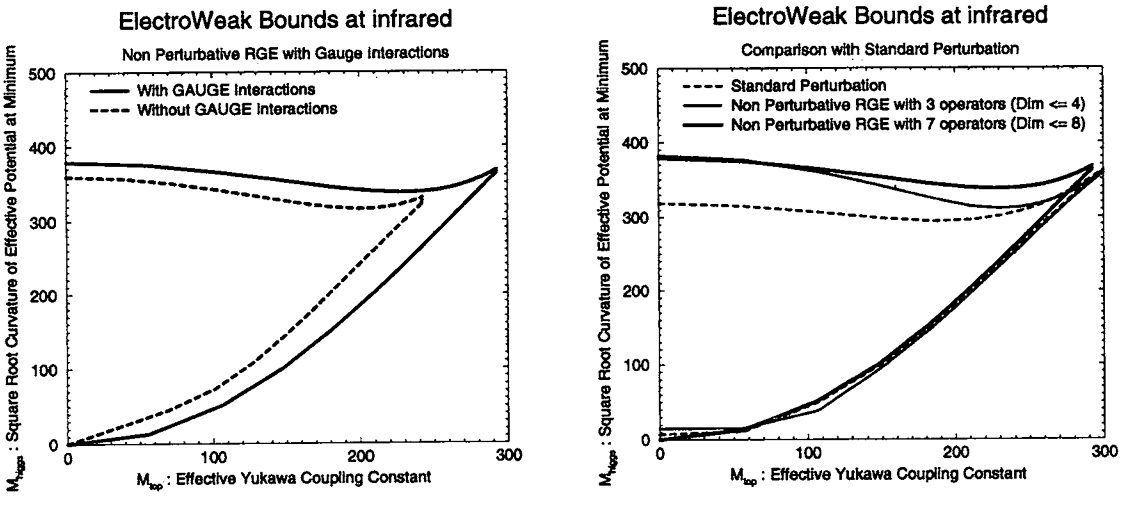

図 3:局所ポテンシャル近似された Wegner-Houghton 方程式を用いて求めたヒグス-トップ質量制限

現在、Wilson 繰り込み群としては、Wegner-Houghton 方程式の他に、Polchinski 方程式が知られている。これは実用的な数値計算などには向いていないが、繰り込み可能性の証明などの場の理論の性質の議論などに用いられている。そこでこの方程式を超対称理論の Wess-Zumino モデルに適応し、non-renormalization theorem の証明を試みる。

学位論文の審査結果の要旨

申請者は，場の理論を非摂動論的な繰り込み群（ウィルソン繰り込み群）により解析する。摂動論的な繰り込み群は既に膨大な研究が行われ，系統的な体系や実際の処方が完成されているが，非摂動論的な繰り込み群については，場の理論の解析方法としては端緒的な段階にあり，特に数値計算まで進められた研究はあまりない。

申請者は，非摂動論的な繰り込み群方程式のひとつとして，経路積分の殻積分から得られる Wegner-Houghton 方程式をとり，相互作用関数空間を局所ポテンシャルに制限する近似をする。時空 3 ～ 4 次元のスカラー場の理論及び 4 次元での素粒子標準模型の相構造を解析し，相転移に伴う臨界指数や，未発見のヒッグス粒子の質量制限を求めた。

実際の計算では，繰り込み群方程式を関数空間内の動的座標系を用いて解く方法が開発され，少ない次元の空間で精度よく解く事が可能になり，広い範囲の模型での計算を行う事が可能となった。臨界指数の結果を，他の非摂動論的方法である θ 展開や $1/N$ 展開の結果と詳細に比較し，局所ポテンシャル近似による方法が，良好で安定した結果をパラメータの全領域で与えるという他にない性質を持つ事が明らかにされた。また，これまで摂動論的にしか議論されていなかった，ヒッグス粒子の質量の上下限について，初めて非摂動論的な結果を与えた。

以上はグループ研究であるが，申請者が中心となって理論的な解析及び数値計算を進めてきた。博士論文ではこれらの研究結果に加え，臨界現象と繰り込み群についての詳細なレビューがされ，申請者が博士の学位を取得するにふさわしい学識を有している事を示している。