生徒の学習前提思考にもとづく授業の設計

—中２「数の集合と計算」（剰余系を中心に）—

菅村　暾*・中村　道夫**・吉田　貞介***

I　研究のねらい

日頃，授業に臨み，生徒に接しながら痛感することの一つに生徒の能力差の問題がある。よく，「能力に応じた指導は…」ということを耳にするが，通り一ぺんの指導では，この問題を満足に解決することは不可能である。

そもそも，生徒の能力を把握することは，なかなか，難事であって，緻密な観察と分析によって，はじめて可能となるものである。能力の高い生徒，低い生徒では，同一の課題に対しても，つまずきの状況が異なる。いまひとつの分析は，生徒は，その能力に応じて，高度のあるいは，低次の論理構成を行う。これらの分析を可能ならしめる手法として，最近，教育工学において取り上げられたものに，"生徒の学習前提思考の調査」がある。（こゝで，学習前提思考の調査とは，課題に対する生徒の論理的構成能力や，思考のつまづきを学習指導以前に把握するためのものである。）

従来からの授業設計では教材面からの分析が中心にあって，生徒の論理的構成能力があまり生かされていなかった。今回の研究では授業の実施前に，できるだけ生徒のもつ思考の枠組みや，問題解決のプロセスを読みとり，それを授業の設計段階に生かしていく手法を解明する点をねらいとした。

II　研究の方法

1　題　　材

今回は，〈中２「数の集合と計算—（剰余系を中心に)〉の指導を中心にして実施した。この題材は，中学一年における「数の集合」に続くものであり，「数の集合と拡張」や，その集合における「新しい計算の規則性の発見」を内容とするもので「計算を通して，数の集合の構造について考える」単元である。

2　研究の対象

河北郡宇ノ気中学校，第２学年（２クラス)。第１回（９月24日）２年１組男子21人女子18人)，異質グループ（４人）の学習活動を中心にした学習指導とその評価を行う。

第２回（10月17日）２年２組（男子20人女子20人)，等質グループ（４人）—上位，中位，下位別のグループ分けによる，補助ワークシートを活用した学習活動とその評価の測定を行う。

3　研究の手順

研究をすゝめるにあたり，つぎのような設計実施，評価の手順で試みた。

(1)　単元の系統と構造の概略
(2)　目標内容のマトリックスとそのよみとり
(3)　第１次の単元構成
(4)　教師サイドからの思考のモデル図略案
(5)　調査プログラムの作成
(6)　生徒の学習前提思考の調査とその分析
(7)　単元構成の修正と第２次案づくり
(8)　授業細案の作成
(9)　評価問題の作成
(10)　授業実施
(11)　学習結果の評価測定とその分析
(12)　授業設計の修正

*金沢大学教育学部
**宇ノ気町立宇ノ気中学校
***石川県教育センター

(13)　別の学級での授業実施

今回の研究報告では一連の授業設計・実施・評価のうち，特に(5)，(6)，(8)に重点をおいてまとめた。

III　研究の概要

1　生徒の学習前提思考調査

目標分類，単元構成，思考のモデル図など，これらの一連の設計は，どちらかといえば，指導者サイドの考えによるところが大であり，果してそれが，生徒たちに充分受け入れられるかどうかは，疑問であり不安が残る。

そこで，これらの設計をふまえた上で，さらに，広い意味でのレディネスとして，指導以前の課題に対して，かれら自身で，どれ位まで思考が可能か，また，どんな思考の傾向があり，どんなつまずきや思考の弱さがあるのかを把握するために実施したのが，生徒の学習前提思考調査である。これによって，思いもかけない生徒のすばらしい発想や，逆にまた，以外なところでのつまずきを発見することによって，単元構成の見直しや，生徒サイドにたった授業細案づくりができるものと思う。

(1)　調査プログラムの作成

・作成のねらい――「剰余系」の学習指導にあたって，上記の観点から指導以前における生徒の論理的構成能力を把握し，単元構成の見直しや，生徒サイドに立った授業細案の作成に役立てる。

・作成の手順――まず，単元レベルにおける目標のマトリックスを作成し，それにもとづき目標の分析と，行動目標の決定をしていく[1]。その際，単に内容面からだけでなく，能力形成面からもつかんでいく。あとの学習前提思考の調査を作成するための基礎的な分析の部分のみを，表―1にのせてある。これから第1次の単元構成の略案を作り，さらに各社の教科書等を参考にして，学習のプログラムを作成した。すなわち，剰余系の学習をするにあたり，「整数の類別の作業」→「整数の剰余による類別（正の整数，0，負の整数）の発見とその特徴」→「剰余数の要素間の新しい計算の発見」→「剰余系の意味の把握」→「剰余系の計算」の各ステップでの生徒自らによる論理的構成力を把握するための調査プログラムを作成した。これが表―2である。

(2)　前提思考の調査方法

・抽出生徒は，性格的に明るく，意見を割合よく出す生徒である。
・グループは，男女別として，3人（上位，中位，下位）のグループを男女別に2組ずつつくった。
・話し合いは，各グループ別々の部屋で調査用プログラムのプリントをもとにして，フリートンキングさせる。
・教師は，原則として，話し合いの中には不介入とする。
・話し合いの時間は1時間とし，すべてテープに録音する。
・録音の処理方法は，話し合いの内容を生徒のことばのまゝ文章化し，さらに，それをもとにして個人のコミュニケーション関係がわかるような流れ図（図―1）を作成する。
・話し合いの内容分析としては，論理の展開における適切な要素，不適切な要素の把握を中心に行なう。

(3)　生徒の学習前提思考の分析

上記のような観点から，話し合いの内容を分析し，それをグラフ化したものが図―2である。この図は表―2の調査問題を学習のステップ順にプログラム化し，それを図のタテ軸にとった。（下段には不適切と思われる考え方をぬきだしてある）一方，ヨコ軸には時系列をとり発言順にドットをうって線で結んでいった。グラフの事例は，調査問題にもとづき，上位の生徒がリーダーシップをとり，話し合いがかなり発展していったグループのものである。

下位生徒の×印などが，時々欠けているのは，要素の不認知の場合を示し，―×などは，他の生徒の説明を聞いて，わかった場合である。Ⓣ

表一1　行動目標の分析表（関係分のみ）

整数の集合Iは，ある1つの自然数でわると，同じ“余り”（余りは0または，正の数になるようにする）によっていくつかの部分集合に類別されることを明らかにする。	内容	整数の集合Iの要素を5でわったとき，同じ“余り”によって整数を分類すると，5つの部分集合に類別できる。
	能力	5● 整数を5でわり余りが0か正の整数になるようにすると，“余り”は0，1，2， 13○ 3，4の5通りの場合にわけられることを計算から見い出す。 6○ 整数を5でわり，同じ余りの整数によって5つの部分集合にわけてみる。 19○ どの二つの部分集合にも，共通な要素（整数）はないことをつかむ。

“剰余系”について，そのもつ意味と特徴を“5による剰余系”の説明を通して明らかにする。	内容	整数全体の集合の要素を5でわり，余りを0と正の整数で表すと，“余り”は“0，1，2，3，4”の5とおりになる。整数を“余り”が同じ5つの部分集合に類別しその代表要素0，1，2，3，4の集合{0，1，2，3，4}が“5による剰余系”である。
	能力	4● “5による剰余系”の意味を整数を5でわったときの同じ余りによる整数の類別 5○ からつかむ。 7● “5による剰余系”から類推し，他のいろいろな数についての剰余系を求め，そ 14○ の特徴をつかむ。 9○ “剰余系”は，ふつうの数以外のものを要素にもつ集合であることをつかむ。

剰余系についても，その要素の間で新しい計算が考えられることを明らかにする。	内容	“5による剰余系”を例にとると，加法では②+③=⓪，③+④=②となり，数の集合での加法とは結果がちがってくる。
	能力	6● 円周を5等分し“⓪，①，②，③，④”と目もりをつけた円周上での加法と数直 線上での加法について，その計算結果の目もりの数から剰余系の加法と数の集 9● 合での加法との相異点をみつける。 13○ 円周上の目盛りを利用した“5による剰余系”の加法を通して，剰余系での加法 18○ の結果の特徴を見い出し，一般的な加法についての計算のきまりをつかむ。

剰余系は，加法，乗法について閉じていることを明らかにする。	内容	“5による剰余系”について，加法の計算方法から類推して乗法についても考えると，加法，乗法ともに，その和，積はいずれも“5による剰余系”の要素となっている。一般に，“剰余系”は，加法，乗法について閉じている。
	能力	7● “5による剰余系”の要素a，bについて，加法，乗法を計算する。 13○ 加法ⓐ+ⓑ=（a+bの和を5でわったときの余りとして求める。 14● 乗法ⓐ×ⓑ=（a×bの積を5でわったときの余りとして求める。 4○ 5でわる理由を円周上での計算からつかみ，余りの数から計算について“閉じている。”ことに気づく。

減法，除法は，それぞれ加法，乗法の逆算であり素数による剰余系について閉じていることを明らかにする。	内容	減法（ⓑ−ⓐ），除法（ⓑ÷ⓐ）はそれぞれⓧ+ⓐ=ⓑ，ⓧ×ⓐ=ⓑとなるⓧを求める計算の式になおすと逆算として考えられる。
	能力	3● 減法や除法は，加法，乗法の逆算としての見方で計算を考えてみる。 16● “5による剰余系”では，減法③−④=ⓧから，ⓧ+④=③と式をなおし，ⓧ=④ 13○ を求め，除法①÷③=ⓨから③×ⓨ=1と式をなおし，ⓨ=②となることをつかむ。

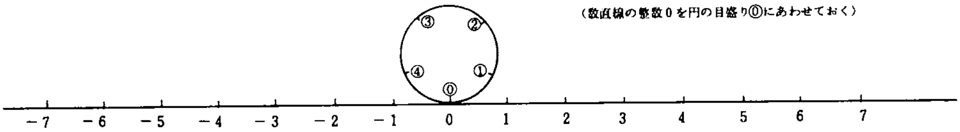
剰余系の考え方は，日常生活の中にも，いろいろ利用されていることを明らかにする。	内容	“剰余系”の考え方は，カレンダーの曜日や，時計の文字板，テレビチャンネルなど，ダイヤル式のスイッチにもみられる。
	能力	14○ “剰余系”の考え方が，日常生活の中に使われているものを想起する。 16● 剰余系の考え方で，きょう（水曜日）から80日後の曜日を求める。いま（午前9時）から100時間後の時刻を求める。 テレビチャンネルとダイヤルの回転の目盛数との関係

表―2　「剰余系」の学習に関する前提思考調査問題

「剰余系」の学習に関する前提思考調査問題

下の図のように，円周の長さが5である円に，整数が円周の目盛りとちょうど重なりあう数直線を，正の方向，負の方向ともに，無限にまきつけていくと整数はそれぞれ円周の目盛り⓪，①，②，③，④のどこへ対応するか。また，各目盛りに集まる整数の特徴や，各目盛りどうしの数の関係について，いろいろ調べてみよう。

(数直線の整数0を円の目盛り⓪にあわせておく)



(問イ) 数直線上の整数と円の目盛りとの対応を表にまとめよ。

円の目盛り	⓪	①	②	③	④
整数					

(問ロ) 上の表から考えると，各目盛りに集まった整数は，それぞれどんな共通の特徴（性質）をもった数といえるか。

（ことばで述べなさい）

⓪の組の数	
①の組の数	

つぎに⓪～④の目盛りの組の数の間の関係について調べてみよう。

(問ハ) ⓪の組に属する2つの整数（要素）をたすと，どの組の数（要素）になるか。式の例をあげて求めよ。

i）式の例 ＿＿＿＿＿＿＿＿

ii）(⓪の組の要素) ＋ (⓪の組の要素) ＝ ＿＿＿＿

iii）なぜ ii）の結果に，つねになるかことばで説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(問ニ) 上と同じように，つぎの場合を考えよ。

i）(②の組の要素) ＋ (④の組の要素) ＝ ＿＿＿＿

・式の例 ＿＿＿＿＿＿＿＿

・なぜ，i）の結果が求められるか。そのわけをことばで説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

ii）(①の組の要素) ＋ (④の組の要素) ＝ ＿＿＿＿

・式の例 ＿＿＿＿＿＿＿＿

・なぜ，ii）の結果が求められるか。そのわけをことばで説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(問ホ) (ハ)，(ニ)から考えて，⓪，①，②，③，④，の各組の要素の代表を目盛り⓪，①，②，③，④の数で代表させることにすると，これら⓪，①，②，③，④の間に新しい加法の計算が考えられる。すべての計算式をあげ結果を求めよ。

（例）⓪＋①＝

・上の計算式で計算結果の求め方について計算方法を②＋④，④＋④について説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(問ヘ) (ハ)(ニ)(ホ)から考えて，⓪，①，②，③，④の間に，新しい乗法の計算が考えられないか。計算式をあげて確かめよ。

・③×④についてその結果を求め，計算方法について説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

・乗法の計算式を⓪，①，②，③，④の間ですべてつくりその結果を求めよ。

(問ト) つぎに⓪，①，②，③，④の間で減法，除法が考えられないか。

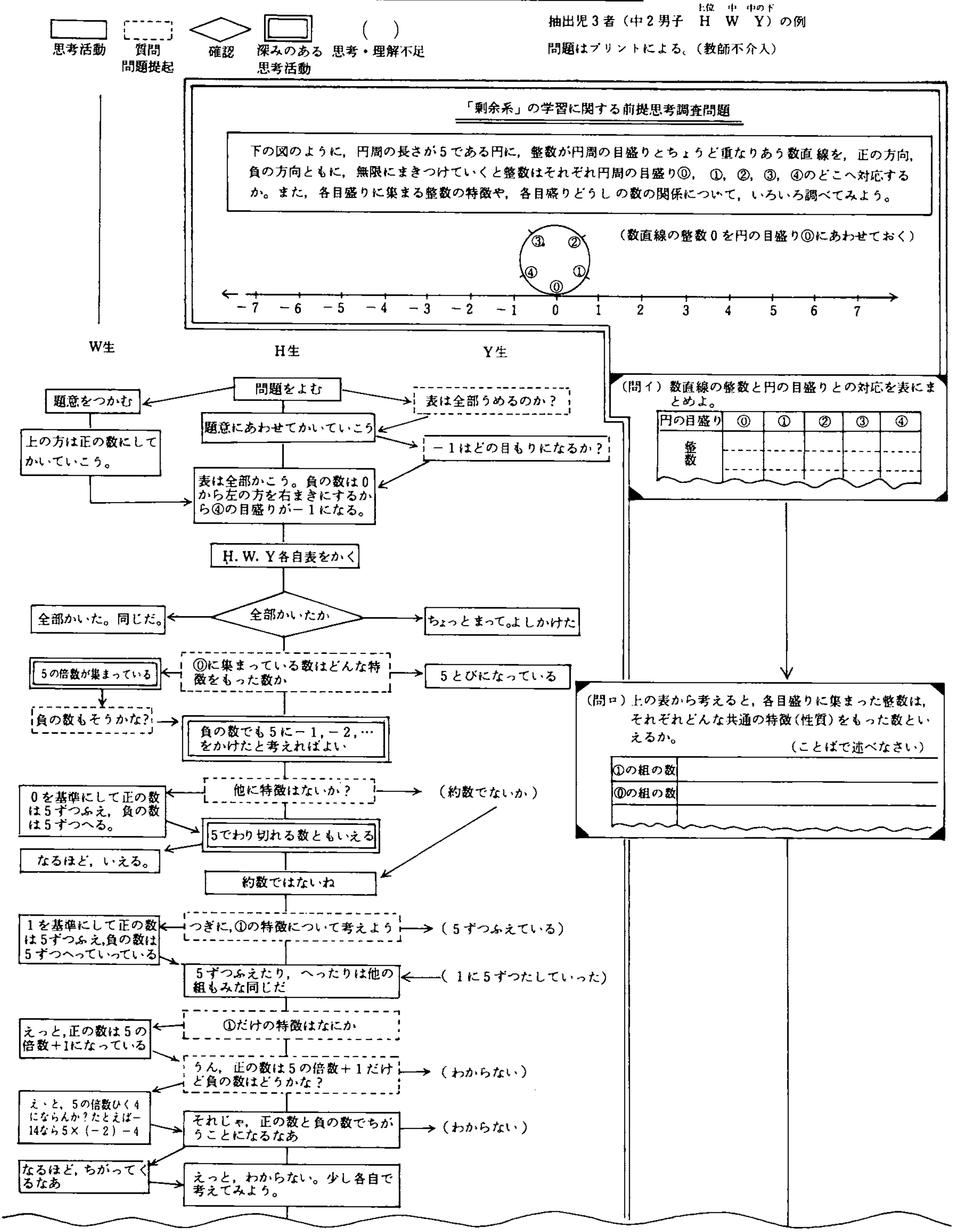
・②－③，①－④の結果を求め，その計算方法を説明せよ。

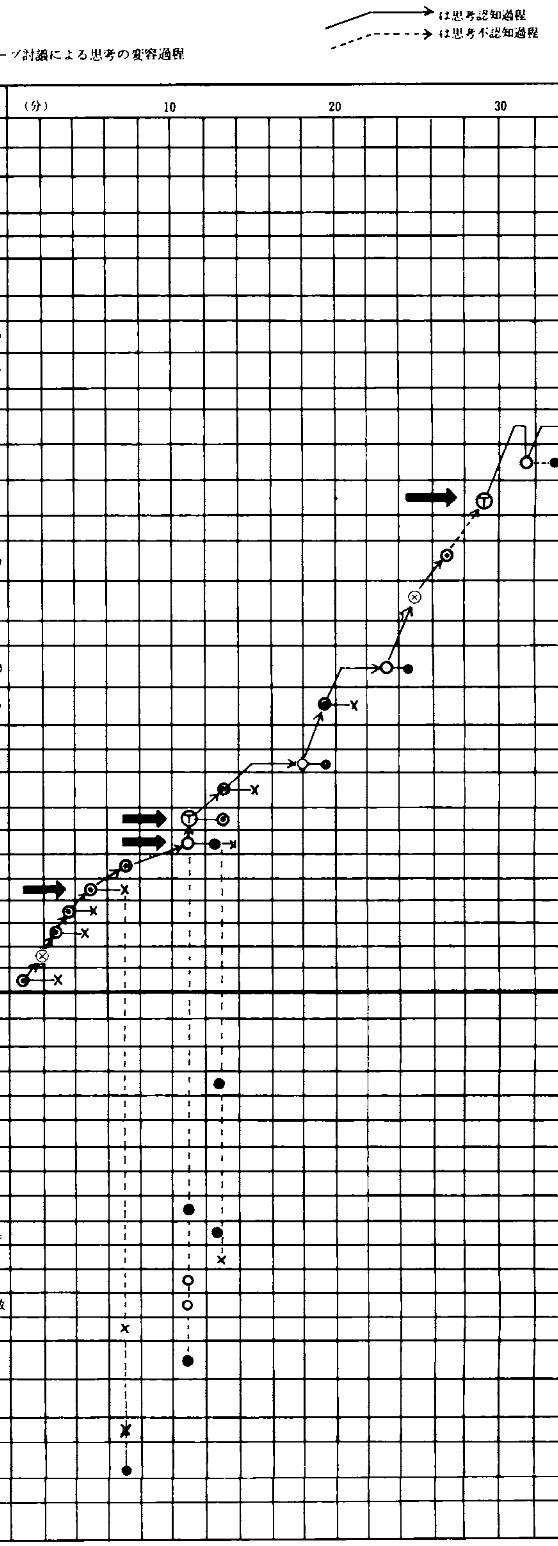
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

・②÷③，①÷②の結果を求め，その計算方法について説明せよ。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

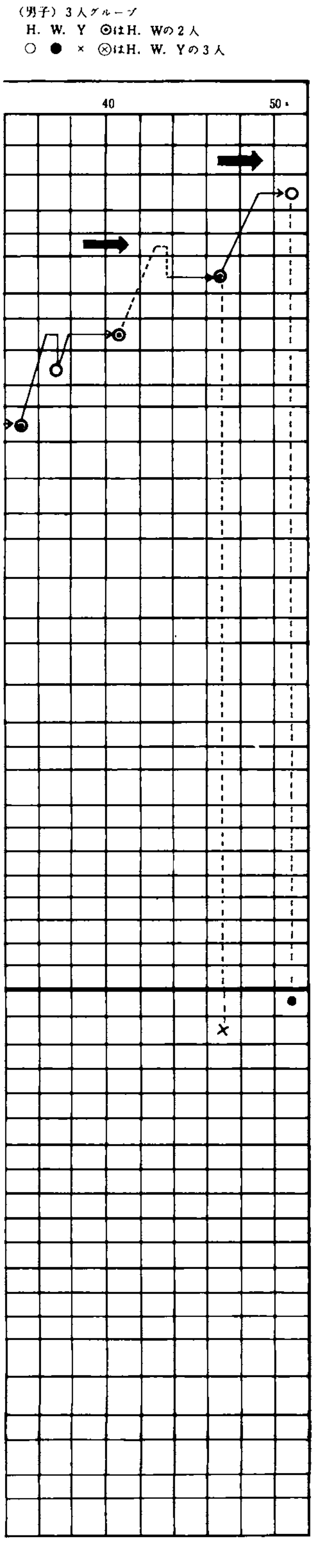
図—1　生徒のコミュニケーション関係図





図―2　グループ討議による思考の変容過程

	認知要素 ＼ 思考変容過程	
㋣ ㋩〜㋬の発展として 減法、除法を考える。		
	除法は乗法の逆と考えて，例えば②÷③＝x→③×x＝②からx＝④	㉓
	②÷③の解を表の要素関係から求める例 12÷(－2)＝－6 →－6は④の組の要素だから②÷③＝④	㉒
	減法は加法の逆と考えて②－③＝x→x＋③＝②からx＝④	㉑
	②－③の解を表の要素関係から求める例 7－8＝－1，12－8＝4から－1や4は④の組の要素だから②－③＝④	⑳
㋬ ㋭による計算の類推		
	形式的な計算方法の意味の理解　③×④→3×4＝12→12÷5＝2…余り②	⑲
	表の要素関係から求める方法③×④→(－2)×9＝－18，－18は②の組の要素だから③×④＝②	⑱
㋭ 計算の形式化 余りに目をつけた		
	形式的な計算方法の意味の理解　②＋④→2＋4＝6→6÷5＝1…余り①	⑰
	表の要素関係から求める方法②＋④→7＋9＝16，16は①の組の要素だから②＋④＝①	⑯
	⓪①②③④の各組のそれぞれの要素の代表を⓪①②③④で表すことにする。	⑮
問㋩㋥ 加法を中心に組の間の要素関係をつかむ		
	①の組の要素＋④の組の要素→(5の倍数＋1)＋(5の倍数＋4)→(5の倍数＋5)→5の倍数→⓪の組の要素（数のしくみから考える）	⑭
	表の要素関係から求める(①の組の要素)＋(④の組の要素)→6＋9＝15→15は⓪の組の要素，だから解は（⓪の組の要素）	⑬
	②の組の要素＋④の組の要素→(5の倍数＋2)＋(5の倍数＋4)→(5の倍数＋6)→(5の倍数＋1)→①の組の要素	⑫
	表の要素関係から(②の組の要素＋④の組の要素)の解を求めると，①の組の要素になる。	⑪
	5の倍数＋5の倍数→5の倍数（数のしくみから考える）	⑩
	表の要素関係から(⓪の組の要素＋⓪の組の要素)を求めると⓪の組の要素になる。	⑨
㋺ 表の特徴をつかむ	①②③④の組の数は5でわると，それぞれ1，2，3，4余る数である。	⑧
	①②③④の組の数は5の倍数にそれぞれ1，2，3，4を加えた数	⑦
	⓪の組の数は5で割りきれる数	⑥
	⓪の組の数は5の倍数である。	⑤
㋑ 問題把握と表づくり	円の目盛りと数直線との対応（負の整数）	④
	⓪の目盛りと対応する整数	③
	円の目盛りと数直線との対応（正の整数）	②
	題意の把握（円と数直線との関係，整数の無限性）	①
不完全・不適切要素	②÷③→2÷3→分数になって解は求められない。	
	②－③→㊀，㊂という組はない。	
	③×④→3×4＝12→12÷5＝2…余り②5進法と考える。	
	①②③④の組の負の数はそれぞれ5でわると－4，－3，－2，－1余る。	
	①②③④の組の負の数は－5でわると余りがそれぞれ1，2，3，4になる。	
	①②③④の組の負の数は－5の倍数に1，2，3，4をそれぞれたした数	
	①②③④の組の負の数は5でわると余りは4，3，2，1になる。	
	①②③④の組の負の数は，それぞれ5の倍数ひく4，3，2，1	
	①②③④の組の正の数は，それぞれ5の倍数たす1，2，3，4になる数	
	①②③④の組の組の正の数は，それぞれ5でわると余りは1，2，3，4になる。	
	⓪①②③④の組の数は，それぞれ5とびの数（5ずつたしていった数）	
	①②③④の組の数は，それぞれの組の数に4，3，2，1をたすと5の倍数	
	①②③④の組の数は，それぞれの組の数から1，2，3，4をひくと5の倍数	
	⓪の組の数は5の約数	
	⓪①②③④の組の数は，それぞれ0，1，2，3，4を基準にして，正の数は5ずつふえ，負の数は5ずつへっていく。	
	⓪の組の要素＋⓪の組の要素→⓪の組の要素だから同じ組の要素をたすと，その組の要素になる。(例)④の組の要素＋④の組の要素→④の組の要素	
	⓪の組の数の特徴は数が5とびになっている。	
	⓪の組の数は，0を基準にして正の数は5ずつふえ，負の数は5ずつへっていく。	
	⓪の組の数は，正の数，負の数の絶対値が等しい。	
	⓪①②③④の組の数は，各組とも㊀→㊇へは5ずつふえ，㊇→㊀は5ずつへっている。	



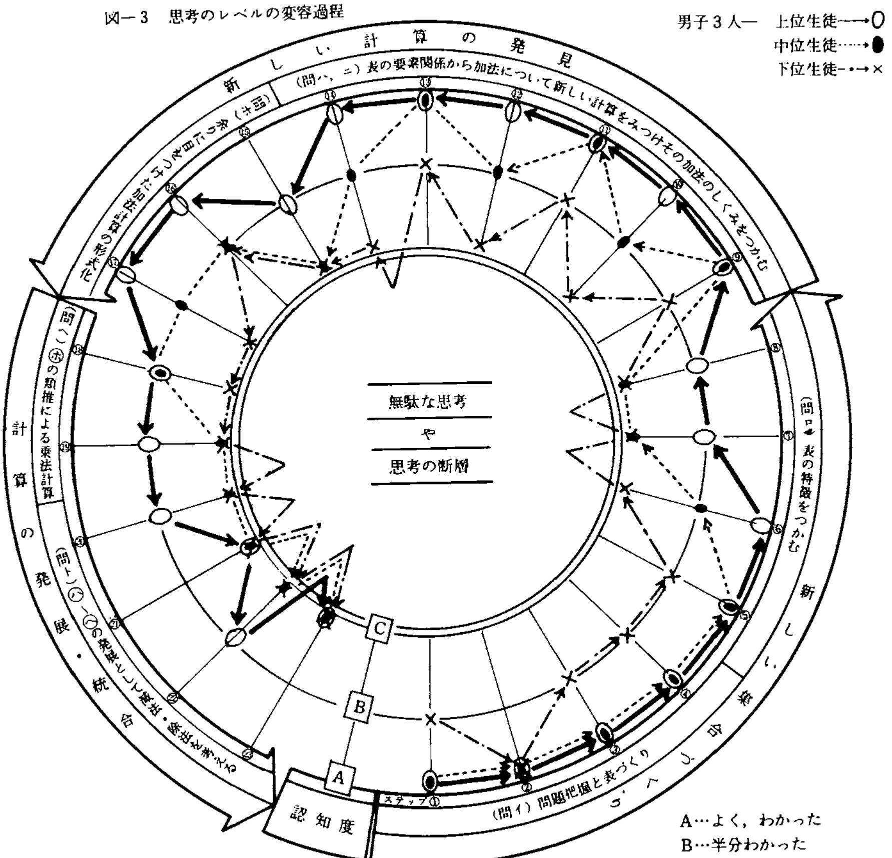
は，教師によるキーワードであり，方向づけを示している。また，下方に…で示してあるのが，不完全，または不適切要素と考えられるものである。つぎに，具体的な例で，このグラフを分析してみると，例えば，ステップ⑤で，中位，下位生が「5の倍数（5で割れる数）の集合」の特徴に対して，「5ずつの増加，減少」や，「5とび」などというとらえ方をしているのは，不完全，不適切な把握とみることができる。

⑦⑧のステップでは，中位生は，「正の整数」については，「5の倍数＋1」と把握できたが，「負の数」については，つかむことができなかった。また，下位生は「正，負」すべての整数について，その特徴を把握することができなかった。つまり，⑦，⑧のステップでは，上位，中位，下位児の思考の差が，はっきりとあらわれている。また，上位の生徒にも「5の倍数＋1」から，「5でわると余りが1になる」という見方への転換には，やや抵抗がみられた。

ステップ⑮での①は，5による剰余類の要素の代表として，⓪，①，②，③，④を約束したとき，その要素間に，どんな計算式が成り立つかを考えさせる思考の方向づけとしてのキーワードである。

つぎに，個人の思考の深まり具合いを見ることにした。図―2のグループ活動の2日後に，同じプログラムのプリントを各自に解かせた。それらの解答と，グループによるフリートーキングの生の声とを合わせ，認知の深化の度合いを測定した。それをグラフ化したのが図―3である。この図では思考の深まり具合いをA，B，Cの3段階に分け，円形の折れ線グラフで明示することにした。その際に，無駄な思考（不適切な要素）や，思考の断層などの場面も分析し円の中央部にかきあらわすようにしてある。図を見てもわかるように，はじめ比較的順調にいっていたのが，⑥，⑦，⑧あたりで下降している。また⑲以降ぐっとさがってしまっている。このような円形グラフに表示してみると，かなり各ステップでの上位，中位，下位児の個人的

図—3　思考のレベルの変容過程



な認知の度合いがはっきりしてくるのである。

ステップ⑭以上では下位生徒自からの思考の発展はみられないことがわかる。

また，ステップ㉑，㉓での減法，除法は上位生徒でも（問イ）整数の類別表からは求められるが，加法，乗法の逆算としての求め方は把握できなかった。

以上のような事柄が図—2のグラフから具体的に読みとることができる。

(4)　能力差を考慮した授業案作成

学習に関する前提思考の調査を終え，その分析の結果から単元構成を実施した。（資料略）つぎに授業細案の作成を実施するのだが，今回の研究では特に生徒の能力差を考慮した細案づくりに留意した。まず生徒の思考の変容とつまづきをおさえた。「剰余系の意味」についての指導略案をつくり，9月下旬に実際の授業で試行してみた。その結果，略案は上位群の学習前提思考にウェイトをおいた指導案になっていたため，内容がもりだくさんになって，中，下位群にとっては，ゆとりのない依頼心の強い学習になっていた。その反省に立って第2回の授業細案を作っていった。（修正指導案の具体的事例は後述する）この修正案によって10月下旬他のクラスで授業を実施した。この指導案は中位，下位群の学習前提思考をも充分分析し，各生徒（上

位，中位，下位）の思考過程や学習活動による可能な認知要素をまえもって予測し，上位群には，巾広い思考による問題解決の場を与え，発見や創造性を伸ばすように配慮し，中位群，下位群には，かれらに適する思考のフレームを考え，キーワード入りの補助プリントを作ることによって，解決の手がかりを自からみつけ意欲をもって学習にとりくめるよう留意した。そして，この補助プリントを活かすように指導細案づくりにも留意した。また，このようなプログラム学習的な授業過程をくむと，こどもの探究力や学習意欲の面で問題が生ずる恐れがあるので，授業設計の段階で発見学習の手法を多くとり入れてみたのである(2)。

(5) 修正指導案の具体事例

〈中学2年数学学習指導案〉

単元名　数の集合と計算

指導計画（総時数　14時限）

第1次　計算の意味と可能性……4時限
第2次　剰余系　……4時限（本時1/4）
第3次　計算のしくみ　……3時限
第4次　大小関係　……2時限
問　題　……1時限

本時の学習

① 主題名　剰余系

② 主題の指導目標
剰余系の意味について明らかにする。

③ 行動目標Ⓒ
剰余系の意味を"5による剰余系"を例として，具体的に説明できる。

④ 下位行動目標

R1 整数の集合や，その部分集合（自然数，0，正の整数，負の整数，奇数，偶数の特徴）が指摘できる。

2 円周の5つの目盛りと，まきつける数直線上の整数との対応がよみとれる。

3 2の対応関係を円周の目盛り⓪①②③④にあわせて，整数を類別し表にすることができる。

4 3の表は，整数全体の集合を表そうとしていることを指摘できる。

5 ⓪の組の数の特徴（5の倍数，5でわると余りが0になる）が指摘できる。

6 5の類推から①②③④の組の整数の特徴（5でわった余りが，それぞれ1，2，3，4となる）が指摘できる。

7 整数の集合は，5でわったとき同じ余りによって5つの部分集合に類別できることを指摘できる。

8 ⓪～④の各組ともにいえる共通の特徴（2数の差が5の倍数）が指摘できる。

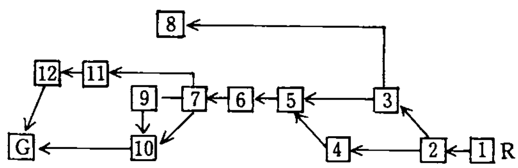
9 任意の整数が，⓪～④のどの組に入るか計算で指摘できる。

10 "剰余系"―"5による剰余系"についてその用語と意味をつかむことができる。

11 カレンダーの各曜日に集まる数の特徴（7でわった余りが同じ）を指摘できる。

12 カレンダーの曜日あてを計算で求めることができる。

⑤ 下位行動目標の相互関係図



Ⅳ 結果の考察と今後の研究課題

今回の研究の大きな目的である生徒の思考の枠組みや，問題解決のプロセスを事前に出来うる限りよみとり，それに基づいての授業設計がうまくできたかどうかを最後に考察し，全体のまとめとしたい。

従来からの授業の設計はとかく教材面に片寄りすぎるきらいがあった。それに対してこの研究では，生徒の学習前提能力を事前に調べ，学習者のもつ力をとらえることからはじめた。そのため3人の小グループに対してバズをさせ，それを記録する手法を試みたのである。その結果予期以上のものがえられた。

・生徒に一つの課題をあたえた場合，どのよう

⑥ 教授＝学習過程（1枚時フローチャート）

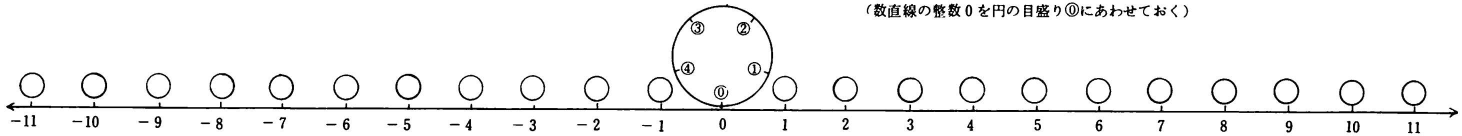
分節	おもな指導内容	学習形態	学習過程	教材・教具・教育機器と留意事項（上位生徒グループ / 中位生徒グループ / 下位生徒グループ）	下位目標行動のチェックポイント□
a 5	〈導　入〉 ・既習事項の確認 （整数の集合とその部分集合）	制御 一斉 (全)	はじめ レディネステスト → NO：補足説明 / YES	(TP₁提示)口頭で下記の既習事項の確認 1）整数の集合を指摘させる。 2）整数の集合の部分集合（自然数，0，正，負の整数，奇数・偶数の特徴）を指摘させる。 中位生徒に指名 下位生徒の認知の確認	・レディネステスト1R（整数と部分集合について）
b 12	1　本時の学習内容の確認 ・"剰余系"の意味 2　円周上の目盛りの数の周期性と数直線上の数の対応関係 3　整数全体の集合を5つの部分集合に類別する。	導かれた発見学習 (全) (全) (個)—(ア)—(全)	本時の学習のねらいをつかむ 曜日あての身近から問題により課題意識をもつ 題意（プリント問題）を把握し問1～4をする。 問1～4ができたか → NO：補足説明 / YES	プリントに明示（TPで提示） ・10月のカレンダーをTP_2で提示し，来年のきょうの曜日を考えさせ，身近かな問題により課題，学習意欲をもたせる。 ・各自の考えを，グループでの話しあいで確認しあわせる。 Ⓣはグループ全体の活動を把握しながら，特に中→下位グループの指導に力点 ・問1～2はTP_3～TP_4で一斉確認 問3～4は発表説明させる。 中・下位生徒の認知の確認に留意	・課題意識をもったか ・円周の目盛りと整数の対応がつかめ表づくりができたか。2 3 ・表が整数の集合をあらわしていることがつかめたか。4
c 20	4　整数全体の集合を5つに類別した部分集合⓪～④の特徴 ・⓪～④の5つの各部分集合は5でわると余りが，それぞれ0，1，2，3，4になる整数の集合 ・⓪～④の名組の数とも2数の差は5の倍数	(個)—(ア)—(個) (ア) (全)	問題（5，6）をする 問題7をする 問5～7ができたか → NO：ヒントと補助説明	・問5は問4から類推させ，整数の類別（余りによる）の特徴について話しあいまとめさせる。 ・できるだけ，自分の力で特徴を見つけさせたい。(能力に応じて)(上位グループ補助プリントなし) 中位グループ対象の思考のフレームを細かくした補助プリントにより問5.7を考えさせる。 下位グループ対象の思考のフレームを細かくし，ヒントを入れた補助プリントにより問5.7 ・問6は2数の差は5の倍数となるという各組共通の特徴を気づかせる。 Ⓣは中，下位グループに自己解決意欲をもたせるよう留意 ・問2の表の特徴から整数は，どんな数でも⓪～④のいずれかに入ることを計算で求めさせる。 ・発表，説明させ，特徴について確認 ・特徴は正負の整数ともに共通にいえることを特に確認 負の整数の類別について質問 正の整数の類別の特徴について質問（能力に応じた質問）	・表の5つの部分集合は5でわると余りが0，1，2，3，4になる整数の集まりであることが負の数についても共通につかめたか。5 6 7 ・各組共通の特徴がつかめたか。8 ・計算の余りに目をつけて計算で整数を類別できるか。9
d 6	5　"剰余系"についての意味 "5による剰余系"を具体例として	(ア)—(全)	問題8で"剰余系"についてまとめる。	・問8とTP_5により，余りによる類別の学習をもとにし，"5による剰余系"の具体例で"剰余系"の意味をつかませる。	・"5による剰余系"の具体例から"剰余系"の意味がつかめたか。10
e 7	6　余りによる整数の類別（応用） ・カレンダーの各曜日に集まる数の特徴 ・カレンダーの曜日あて	(個)—(ア)—(全)	問題9を考える 問題10をする 問9，10ができたか → NO：補足説明 時間がなければ，このコース おわり	・問5から類推させ，各曜日は7でわった余り0,1,2,3,4,5,6で類別されていることを指摘させる。 ・曜日を求める計算を通して余りの大切さに気づかせる。（来年のきょうの曜日も求めさせる） 中位グループ対象の補助プリント（問9.10） 下位グループ対象の補助プリント（問9，10） 中，下位生徒もできるだけ自分で考え解く喜びをもたせたい。 ・グループでの話しあいをもとに発表させ，全体で確認，まとめる。	・カレンダー（10月）の各曜日の数の特徴（7でわった余りが同じ）がつかめたか。11 ・計算で曜日をあてることができるか。12

⑦ 生徒にわたす学習プログラム

（学習目標）　"剰余系"とは？　例えば――"5による剰余系"とは？

(全) （問題）　下の図のように，円周の長さが5である円がある。この円周の目盛りに整数がちょうど重なりあう数直線を，正の方向は左まき（時計の針と反対まわり）負の方向は右まき（時計まわり）に，無限にまきつけていくと整数はそれぞれ円周の目盛り，⓪，①，②，③，④のどこへ対応するか。また，各目盛りに集まる整数の特徴などについて，いろいろ調べていこう。

（数直線の整数0を円の目盛り⓪にあわせておく）



(個) 問1.　数直線上の○の中に対応する円の目盛りの数を入れなさい。
整数と円の目盛りとの対応関係で，気づいたことが何かないか。
(ア) （　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）

(個) 問2.　数直線の整数と円の目盛りとの対応関係を表にまとめよ。

円の目盛り	⓪	①	②	③	④
	0	1	2		

(ア)で確かめあう。

問3.　上の表（全体）は，どんな数の集合を表わそうとしているか。
(ア)

つぎに，⓪，①，②，③，④の各目盛りに集まっているそれぞれの数の集合について，いろいろその特徴について調べてみよう。

(個) 問4.　⓪の目盛りの組の数は，すべて □ の倍数になっており，つまり □ で割ると余りは（　　）となる数の集合を表している。
(ア)

(ア) 問5.　（問4）の考え方をもとにして，①②③④の各組の数の集合についても，それぞれどんな特徴をもった数の集合かつぎの順序で考え表にまとめ，説明してみよう。

(イ)．各組の正の数は□で割ると余り（0か自然数）はどうなるか。

(ロ)．各組の負の数は□で割ると余り（0か自然数）はどうなるか。

(全) (ハ)．(ロ)の余りも(イ)の余りと同じくなるように計算ができることを説明せよ。

	各組の数の特徴	(ハ)の負の数を割る式の例
⓪の組		
①の組		
②の組		
③の組		
④の組		

(ア) 問6.　（問5）の特徴の他に（問2）の表全体について，⓪～④の5つの組ともに共通にいえる各組の2つの数の間の関係について何か特徴はないか。考えまとめてみよう。
(全)

(個) 問7.　整数32，−43は⓪～④のどの組へ入るか。計算で求めよ。

(全) 問8.　"剰余系"の意味を"5による剰余系"を例にとりまとめよう。

整数の集合 I は，□で割ったときの□によって□の□集合に□される。その各集合から□　，　，　，　を□の要素としてとりだして作った集合｛　　　　｝を"5による剰余系"という。

○ つぎのカレンダーをみて各問に答えなさい。

日	月	火	水	木	金	土
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24/31	25	26	27	28	29	30

（ヒント）問2.の表と比べてみて，似ている点，ちがっている点は，それぞれなにか。

(ア) 問9.　各曜日に集まっている数の集合の特徴はなにか。
(全)

(個) 問10.　35日後，40日後，40日前はそれぞれ何曜日にあたるか。（計算方法も説明せよ）
(ア)
○

にして解決していくかという，解決のプロセスがはっきりしてきた。また，同時にどこでつまづくか，特に学業不振児の壁がはっきりと見えてきた。このことは図―2の変容過程のグラフによってみることができる。タテ軸の学習ステップとヨコ軸の発言系列とによる位置づけを行い，それを線でむすんでいくことにより，思考の難易性がとらえられる。線グラフの傾斜が急なところは比較的解決が容易なところである。それに対してゆるい部分や真横にのびているところは思考のつまづきの生じている箇所と考えられる。図―2におけるステップ⑩，⑭，⑰，⑲，⑳，㉒などがそれにあたる。また，点線で示されている思考の断層部分（⑭→⑮，⑲→㉑など）も明確になってきた。さて，このように事前に学習のステップの通過困難箇所をみつけたならば，これを克服する手だてを授業の設計段階で十分考慮する必要があろう。今回の研究でとり入れた学習前提思考の調査の手法は，このようなつまづき発見のためには有効な方法であった。

・上記の手法を試みるために，今回は3人グループで，学習プログラムにそって自由討議をさせた。その際，特に留意しなければならないことは，グループ構成の問題である。グループを構成する人数，あるいはそれを構成するメンバーの質によって，解決の筋道に大きな差が生じてくるのである。いままで実施した結果からみると，3人の構成がよいようである。2人，4人では発言がひろがらず，あまりうまくいかないようだ。また，グループのメンバーは，学級を構成している要素を考慮して，質のちがった単一モデルを数多く作ることが大切なようだ。たとえば男女の性差。学力の上，中，下位。思考のタイプ。行動力の有無。創造的思考の強弱等を考えておかなければならないだろう[2]。いままではこのような分析をするには，一度どこかの学級で実際に授業にかけて行ってきた。ところがこの方法は単に繁雑なだけでなく，要素が複雑に錯綜していて，本当に欲しいデータがえにくかった。その点このグループごとに特徴をもたせて測定するやり方は，多くのものを獲得することができるのである。

以上のような点ではすぐれた効果が上ったが，一方，今後さらに検討しなければならない面もある。その一つは，学習プログラムがくみやすい単元では良い結果がえられるが，発見や探究に力点を置いたブラックボックスの多い学習過程では，どのような結果になるだろうか。現時点における仮説としては，むしろその方にこそこの方法が生かされるのではないかと考えている。今後さらに実証的な研究を続けたい。

つぎに，今回は手法開発のための研究として実施してきたのでいくらか繁雑なきらいがある。生徒の能力を事前に読みとることは非常に大切であるが，日々の授業に生かしていくためにはもっと簡便な方法を作りださなければならないだろう。それがなければ机上の空論となり，真の意味での授業研究にはならない。学校現場で簡単に使える手法をより一層追求していくことが，今後の大きな課題である。

附　記

本研究を進めるにあたって，石川県教育委員会金沢地方教育事務所の指導主事各位，石川県教育センター研修指導主事，及び長期研修教員各位の指導と援助に深く謝意を表します。また宇ノ気中学校長はじめ職員各位の御理解に深く感謝申し上げます。

注(1)・金沢大学教育学部紀要第22号（1973）第24号（1975）
・金沢大学教育学部教科教育研究第6号（1973）第7号（1974）
・金沢大学教育学部附属教育工学センター，教育工学研究第1号（1976）等を参考にする。

(2)・水越敏行編著『授業の設計と評価の技術』明治図書 1976.
・水越敏行「授業研究の方法論の確立」現代教育科学No. 234（明治図書 1976. 12）等の手法をとり入れる。