

Ni-Co-P/ α -Si₃N₄ 複合めっき材の X 線応力測定[†] — 応力勾配を考慮した Ni-Co-P 相の残留応力測定 —

増田 秀夫* 鷹合 滋 樹*
比良 光 善* 広瀬 幸 雄**

X-Ray Stress Measurement of Composite Plating (Ni-Co-P/ α -Si₃N₄) — Residual Stress Measurement of Ni-Co-P Phase under the Consideration of the Stress Gradient —

by

Hideo MASUDA*, Shigeki TAKAGO*, Mitsuyoshi HIRA* and Yukio HIROSE**

Ni-Co-P/ α -Si₃N₄ composite plating excels in wear- and corrosion resistance. It is important to evaluate the residual stress due to the misfit of mechanical and physical properties between plating and substrate during the manufacturing and industrial using. However, in the case of plating specimen which have stress gradient, the $\sin^2\psi$ method is not adequate to use because this material shows severely curved $\sin^2\psi$ diagram.

In this study, a fundamental investigation was carried out to apply the X-ray residual stress measurement of the plating material. Fourth kinds of specimens with different thickness of film were prepared. X-ray elastic constants were obtained using the non-linear analysis. Influence of the film thickness on curvature of $2\theta\text{-}\sin^2\psi$ diagram was simulated. Residual stress in the plating layer was analyzed under the assumption that the stress state is equivalent biaxial.

Some experimental results were observed: $\sin^2\psi$ diagrams were severely curved, and shape of diagrams shows varied by the film thickness and X-ray penetration depth. There is the steep stress gradient in the direction of depth. As the results, X-ray elastic constants of all specimens were independent from the thickness of film. Therefore, the value is constantly. A value of residual compressive stress calculated from present method is greater than value of $\sin^2\psi$ technique. Compressive stress decreased with the film thickness.

Key words : Composite plating, Residual stress, X-ray elastic constants, Stress gradient, Experimental stress analysis, X-ray stress measurement

1 緒 言

めっきや各種の皮膜には成形時に残留応力が発生し、それによるマイクロクラックの発生や基板からの剥離などに影響を与えることが知られている。¹⁾ Bragg の回折条件を利用した X 線応力測定法²⁾ は非破壊・非接触による残留応力測定法として有効な方法である。それとともに、薄膜や複合材料においては他の方法では不可能な極表面層の応力状態の解明に威力を発揮している。³⁾ X 線応力測定法の中でも $\sin^2\psi$ 法は材料が等方均質である場合、回折角 2θ と $\sin^2\psi$ との間に直線関係が得られることを利用し、その傾きから残留応力を測定する方法である。しかし、材料が異方性を有する場合、X 線侵入深さ内の表面層で三軸応力状態がはたらいっている場合、また深さ方向に応力勾配^{4)~7)} が存在する場合、 $\sin^2\psi$ 線図は非線形を示す。本研究では従来の単相めっきである硬質 Cr めっき等に比べ、耐摩耗性を向上させた Ni-Co-P/ α -Si₃N₄ に上述の手法を適用した。本めっき材は分散強化型の二相材料であるため、相毎の機械的性質の差によるマイクロ応力が発生し、複雑な応力状態となることが予想され、この場合 X 線の弾性定数が単相体とは異なってくるという問

題も生じる。⁸⁾ これらの影響を系統的に解明する必要があると思われるが、本報ではそのための第一報として、X 線応力測定法を適用するために、 α -Si₃N₄ を含まない材料を作製し、X 線の弾性定数などの基礎的検討⁹⁾ を行った。さらに、非線形な $\sin^2\psi$ 線図に対し応力勾配を考慮^{10)~13)} した等二軸応力状態の応力解析法を提案した。 $\sin^2\psi$ 線図の湾曲性および X 線侵入深さにおよぼす膜厚の影響については、シミュレーションを行うことで確認した。最終的には、実機材に使用されているバレル研磨処理を行っためっき層の残留応力におよぼす膜厚の影響について検討した。得られた実験結果については従来の $\sin^2\psi$ 法による解析法と比較した。

2 薄膜材の X 線応力測定理論 (等二軸状態)

2.1 薄膜の X 線侵入深さ

薄膜を有する材料に対する X 線侵入深さは次式を満たす深さと定義する。⁷⁾

$$R = \frac{\int_0^{T_f} I(z) dz}{\int_0^{\infty} I(z) dz} \quad (1)$$

ここで、 T_f は薄膜の X 線侵入深さ、 $I(z)$ は深さ z の位置

[†] 原稿受理 平成 11 年 10 月 18 日 Received Oct. 18, 1999

* 学生会員 金沢大学大学院 〒920-1192 金沢市角間町, Graduate Student, Kanazawa Univ., Kakuma-machi, Kanazawa, 920-1192

** 正会員 金沢大学自然科学研究所 〒920-1192 金沢市角間町, Dept. of Mat. Sci. & Eng., Kanazawa Univ., Kakuma-machi, Kanazawa, 920-1192

で回折した X 線の強度, t は膜厚を表す. 比 R については式の簡潔性を理由に本論文では $R = 1-1/e (= 0.63, e$ は自然対数の底) を使用した. 右辺の分母は膜全体から得られる回折 X 線強度を表し, 分子は深さ T_f までの範囲の強度を表している. バルク材の場合, 分母は 0 から ∞ までの積分であるが, 薄膜の場合は膜厚までとする. 式 (1) より, T_f について解くと側傾法の場合, 次式が得られる.⁷⁾

$$T_f = \frac{\sin \theta \cos \psi}{2\mu} \cdot f(t) \quad (2)$$

ここで, θ は Bragg 角, ϕ および ψ は Fig. 1 に示すようにひずみの方向に関する角度を表す. μ は線吸収係数である. 上式が任意の膜厚を有する薄膜の X 線侵入深さを与える式である. ここで, $f(t)$ は膜厚に関する補正項を表し, 次式で与えられる.⁷⁾

$$f(t) = \log \left[\frac{1}{1 - \{1 + \exp(-t/T)R\}} \right] \quad (3)$$

$f(t)$ は, 薄膜とバルク材では侵入深さは異なることを意味している.

2・2 等二軸状態の薄膜の X 線応力測定の基礎式

薄膜の応力状態が等二軸状態と仮定できる場合, $\epsilon_{\phi\psi}$ と応力 σ_{ij} の関係は次式のように表すことができる.

$$\epsilon_{\phi\psi} = \frac{s_2}{2} \sigma_{11} \cdot \sin^2 \psi + 2s_1 \sigma_{11} \quad (4)$$

s_1 および $s_2/2$ は X 線の弾性定数を表し, 次式で与えられる.

$$s_1 = -\frac{\nu}{E}, \quad \frac{s_2}{2} = \frac{1+\nu}{E} \quad (5)$$

ν は X 線のポアソン比, E はヤング率である. 本論文では, さらに次式のように σ_{ij} が深さの一次関数で表される場合を考える. ただし, z は深さ方向を正とする.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij0} + A_{ij} \cdot z \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{110} & 0 \\ 0 & \sigma_{110} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{bmatrix} \cdot z \end{aligned} \quad (6)$$

σ_{ij0} は薄膜表面の応力成分を表し, A_{ij} は応力勾配を表す. σ_{ij} や $\epsilon_{\phi\psi}$ が z に依存する場合に測定される X 線のひずみは, X 線侵入深さ範囲内の平均値になる. さらに, 回折

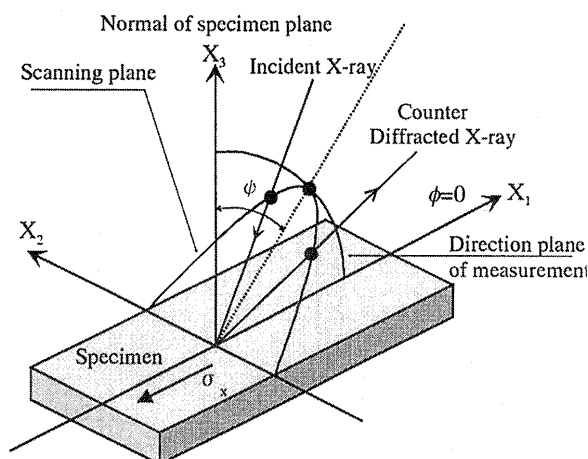


Fig. 1. Coordinate system of the side-inclination method.

X 線の強度は材料による吸収によって深さに依存するので, その平均値は回折線強度を重みとする加重平均に対応すると仮定する. この平均値を $\langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle$ で表すと, 以下のように表される.⁴⁾

$$\langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle = \frac{\int_0^{T_f} \epsilon_{\phi\psi} \exp(-z/T) dz}{\int_0^{T_f} \exp(-z/T) dz} \quad (7)$$

ここで, T はバルク材のときの X 線侵入深さを示す. ここでの積分区間は表面から X 線侵入深さまでの範囲と考える. 指数項は回折線強度を表す. 式 (4), (7) より次式が得られる.

$$\langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle = \frac{s_2}{2} \langle \sigma_{11} \rangle \cdot \sin^2 \psi + 2s_1 \langle \sigma_{11} \rangle \quad (8)$$

ここで, $\langle \sigma_{ij} \rangle$ は次式のように加重平均応力を表す.⁴⁾

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{\int_0^{T_f} \sigma_{ij} \exp(-z/T) dz}{\int_0^{T_f} \exp(-z/T) dz} \quad (9)$$

式 (8) および (9) は, 応力が深さに対して任意の関数をとる場合の一般式を与えている. そして, 式 (6) のような直線的な応力勾配の場合には, 式 (9) は次式のように表される.⁴⁾

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij0} + A_{ij} \cdot W_f \cdot T \quad (10)$$

W_f は重み係数を表し次式で与えられる.⁵⁾

$$W_f = \frac{1 - \{f(t) + 1\} \exp\{-f(t)\}}{1 - \exp\{-f(t)\}} \quad (11)$$

式 (9) および (10) より, $\langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle$ は σ_{ij0} と A_{ij} によって次式のように表される.

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle &= \frac{s_2}{2} \sigma_{110} \cdot \sin^2 \psi + 2s_1 \sigma_{110} \\ &+ \left\{ \frac{s_2}{2} A_{11} \cdot \sin^2 \psi + 2s_1 A_{110} \right\} \cdot W_f \cdot T \end{aligned} \quad (12)$$

式 (12) はまた, 薄膜からバルク材までの任意の厚さを有する材料の基礎式を与えている. 例えば, 応力勾配が存在しない場合 ($A_{ij} = 0$) には, $\sin^2 \psi$ 法の基礎式と, また $t = \infty$ (且つ $R = 1-1/e$ のときにはバルク材に対する基礎式と一致する.

実際に回折実験において測定されるのは, 2θ であるため, 基礎式を回折角 (2θ) で表しておく. 応力勾配が存在する材料から測定される回折角を $\langle 2\theta_{\phi\psi} \rangle$, と書くこと $\langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle$ によって次のように表される.

$$\langle 2\theta_{\phi\psi} \rangle = -2 \langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle \tan \theta_0 + 2\theta_0 \quad (13)$$

式 (12), (13) より次式が得られる.

$$\begin{aligned} \langle 2\theta_{\phi\psi} \rangle &= -2 \tan \theta_0 \frac{s_2}{2} \sigma_{110} \cdot \sin^2 \psi \\ &- 4 \tan \theta_0 s_1 \sigma_{110} - 2 \tan \theta_0 \\ &\times \left\{ \frac{s_2}{2} A_{11} \cdot \sin^2 \psi + 2s_1 A_{110} \right\} \times W_f \cdot T + 2\theta_0 \end{aligned} \quad (14)$$

2・3 等二軸状態の薄膜の X 線応力解析法

応力成分を求めるには, 式 (12) に対して, 最小自乗法を適用する. まず, X 線のひずみ ($\langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle$) から次式のような $\langle c \rangle$ を求め, さらに式 (12) を代入する.

$$\langle c \rangle = \left\{ \langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle_{\phi=0} + \langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle_{\phi=90} \right\} = 2\sigma_{110} X_1 + 2A_{110} X_2 \quad (15)$$

また, $X_1 \sim X_2$ は次式で表される.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{s_2}{2} \sin^2 \psi + 2s_1 \\ X_2 &= X_1 W_f T \end{aligned} \quad (16)$$

式 (15) に対して σ_{110} , A_{11} を未知数のパラメータと考えて, 最小自乗法に基づく微分補正法¹⁴⁾ を適用すれば初期推定値を用いた収束計算を経て σ_{110} , A_{11} が推定できる.

以上の応力計算を行うためには $2\theta_0$ が既知である必要がある. 次節には, $\sin^2 \psi$ 線図から $2\theta_0$ を決定する方法を示す.

2・4 無ひずみ状態の回折角 $2\theta_0$ の決定方法¹⁰⁾

$2\theta - \sin^2 \psi$ 線図が測定 ϕ 方向によって変化しない場合を考える. この状態は, $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ かつ $\langle \sigma_{12} \rangle = 0$ の場合に対応し, 上記の関係式は以下のように簡略化できる.

$$\begin{aligned} \langle 2\theta_{\phi\psi} \rangle_{\phi>0} &= \langle 2\theta_{\phi\psi} \rangle_{\phi<0} \\ &= -2 \tan \theta_0 \langle \sigma_{11} \rangle \left\{ \frac{s_2}{4} \sin^2 \psi + s_1 \right\} + 2\theta_0 \end{aligned} \quad (17)$$

よって, $\sin^2 \psi = -4s_1/s_2 = 2\nu/(1+\nu)$ のとき $\langle 2\theta_{\phi\psi} \rangle = 2\theta_0$ であるから, $2\theta - \sin^2 \psi$ 線図において前述の $\sin^2 \psi$ 値に対応する 2θ 値が $2\theta_0$ に等しいことになる. 以上が $2\theta_0$ 決定の一般解法である.

2・5 $\sin^2 \psi$ 線図が非線形な場合の X 線の弾性定数¹²⁾

次に, X 線の弾性定数について示す. X 線侵入深さ内の極表面層で, $\sin^2 \psi$ 線図を湾曲させるような応力勾配が存在すると仮定する. σ_{11} 方向の単軸負荷 $\sigma_{A\phi\psi(110)}$ を与えた場合, 各応力成分のうち σ_{110} のみが変化するため, 式 (12) を単軸状態 ($\sigma_{220} = 0$) とし, $\sigma_{A\phi\psi}$ で微分すると, $\phi = 0$ のとき次式が得られる.

$$\frac{\partial \langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle}{\partial \sigma_{A\phi\psi}} = \frac{1+\nu}{E} \sin^2 \psi - \frac{\nu}{E} \quad (18)$$

さらに, 式 (18) を $\sin^2 \psi$ で微分すると次式が得られる.

$$\frac{1+\nu}{E} = \frac{\partial}{\partial \sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial \langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle}{\partial \sigma_{A\phi\psi}} \quad (19)$$

また, 式 (18) において $\psi = 0$ の場合を考えると次式が得られる.

$$-\frac{\nu}{E} = \left(\frac{\partial \langle \epsilon_{\phi\psi} \rangle}{\partial \sigma_{A\phi\psi}} \right)_{\psi=0} \quad (20)$$

以上より, 応力勾配の影響により $\sin^2 \psi$ 線図が非線形を示す材料の X 線の弾性定数が得られる.

3 数値シミュレーション

ここでは, 本研究で用いた材料に対応した Table I に示した条件でシミュレーションを実行した. 等二軸応力

Table I. Constants used for the numerical simulation.

Diffraction angle at stress free $2\theta_0$, deg	133.684
Young's modulus E , GPa	238
Poisson's ratio ν	0.280
Linear absorption coefficient μ , μm^{-1}	0.12786
Wave length, nm	0.229293
Value of R	$R=1-1/e$
Number of ψ angles	7
Film thickness, μm	2,5,10, ∞

状態の応力テンソルとして次のような場合を考えた.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1000 & 0 \\ 0 & -1000 \end{bmatrix} z \quad (21)$$

複合めっき (Ni-Co-P/ α - Si_3N_4) における Ni-Co-P 相の 220 回折を Cr-K α 線で測定する場合を想定し, また測定は側傾法で行うこととして計算を行った.

まず, 式 (21) の応力値と Table I の定数を式 (14) に代入して $\langle 2\theta_{\phi\psi} \rangle$ を計算して求めた. このとき, 膜厚には $t = 5, 10\mu\text{m}$ およびバルク材を想定した. ψ 角は $\sin^2 \psi$ が 0 から 0.6 まで 0.1 間隔になるように 7 点とった. 計算結果より, 膜厚が大きくバルク材に近づくにつれ, 湾曲が著しく大きくなっていることが確認できる. また, 膜厚が数 μm 以下の薄膜材の場合, 湾曲が小さくても急激な応力勾配が存在することがわかる.

4 実験方法

4・1 供試材および試験片

本研究で用いた試験片の断面 SEM 写真 (膜厚 $20\mu\text{m}$) を Fig. 3 に示し, めっき組成を Table II に示す. めっき厚さは, Table III に示すとおり 4 種類用意した. 試験片形状は $L60\text{mm} \times W10\text{mm} \times T3\text{mm}$ である. なお, 基板は急冷凝固 Al 粉末から, 粉末冶金製造された Al-Si-Cu-Mg-Fe 合金を用意した. X 線の弾性定数の測定には電解

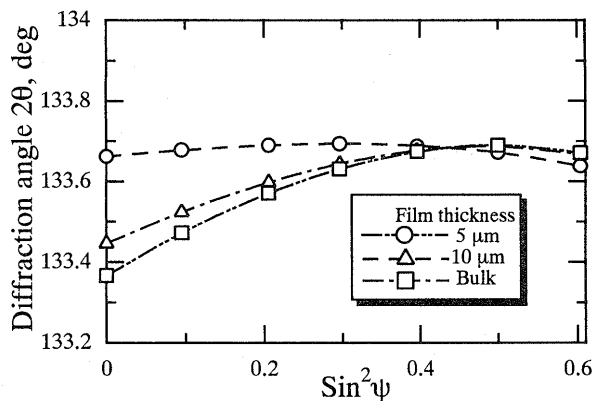


Fig. 2. $2\theta - \sin^2 \psi$ diagram obtained by simulation.

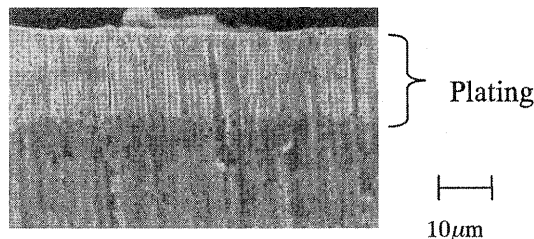


Fig. 3. Section photograph of plating by scanning electron micrographs.

Table II. Experimental material of plating.

Substrate	Al	
Plating	Matrix (Ni-Co-P)	Ni : Bal.
		Co : 15~35wt%
		P : 4~6.5wt%

めっき処理後、ベーキング (473K) した状態で測定し、残留応力測定にはベーキングを経て製造の最終工程であるバレル研磨処理を施した状態のものを使用した。

Fig. 4 に、式 (2) より求めた本めっきに対する侵入深さを示す。膜厚によって侵入深さが異なるのは、式 (3) が変化するためであり、膜厚が小さいとき、侵入深さも小さくなることを確認できる。また、膜厚が 20 μ m 以上では、バルク材の値とほぼ一致することがわかる。

4・2 X 線応力測定条件

X 線応力測定は、平行ビーム法を光学系とする応力測定専用機 (Rigaku MSF-2M) を用いて行った。X 線回折条件を Table IV に示す。残留応力測定においては $\sin^2\psi$ 線図における湾曲を詳細に調べるために ψ を 13 点とした。Fig. 5 に膜厚 50 μ m のときのプロファイルを示す。プロファイルから $\psi = 36^\circ$ の方向に格子面法線方向を取る結晶粒のわずかな分布がみられるものの、測定範囲においていずれも明瞭なプロファイルが測定されており、比較的ランダムな分布を示していることがわかる。そこで、弾性的等方性を仮定して本法を適用した。

5 実験結果および考察

5・1 非線形な $\sin^2\psi$ 線図の X 線的弾性定数

Fig. 6(a) に、膜厚 10 μ m のときの各負荷における

Table III. Film conditions of plating.

Material	Film thickness, μ m
Specimen	5, 10, 20, 50

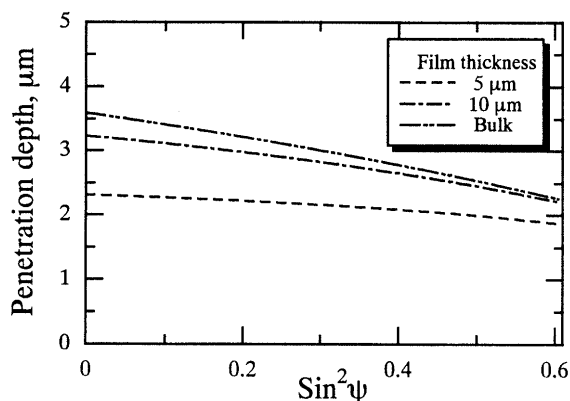


Fig. 4. Relationship between X-ray penetration depth and $\sin^2\psi$.

Table IV. X-ray conditions for stress measurement.

Characteristic X-ray	Cr-K α
Filter	V
Counter	Scintillation counter
Tube voltage, kV	30
Tube current, mA	10
Irradiated area, mm ²	4 \times 6
Fixed time, sec	4
Diffraction line, hkl	Ni 220
Range of $\sin^2\psi$	0~0.6
Number of ψ angles	13

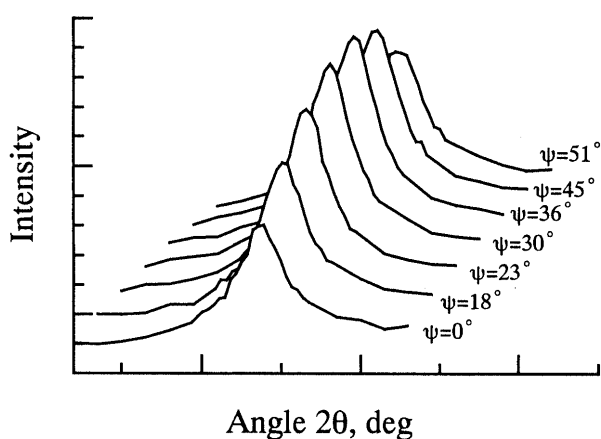


Fig. 5. Diffraction profiles of Ni 220.

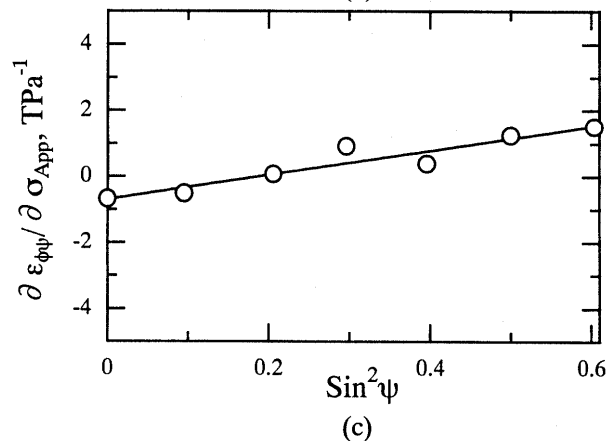
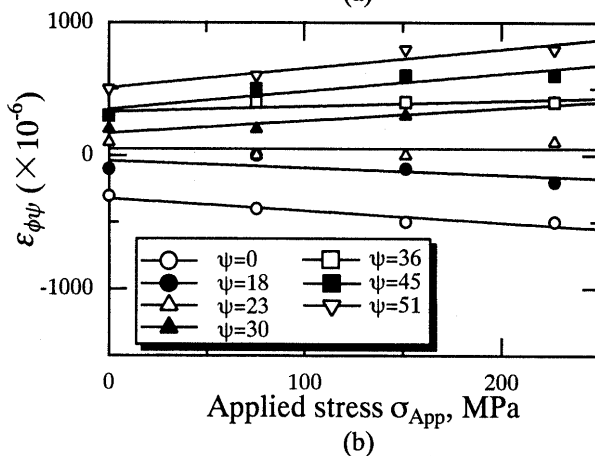
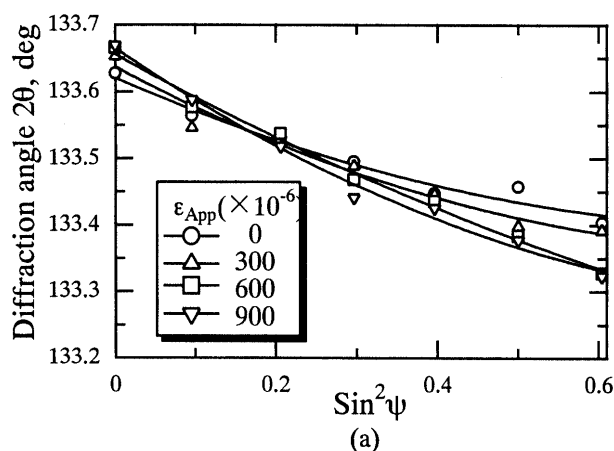


Fig. 6. $2\theta\sin^2\psi$ diagram.

$\sin^2\psi$ 線図を示す。図より、 $2\theta\text{-}\sin^2\psi$ 線図が非線形を示すことから、2・5節に示した本法を適用し、X線の弾性定数を求めた。(b)に負荷応力とひずみ $\varepsilon_{\phi\psi}$ について示し、(c)には図(b)で得られた傾きと $\sin^2\psi$ との関係を示した。従来の $\sin^2\psi$ 法では非線形を一次近似し求めていたが、本法では図に示すように良好な直線関係が得られ、これらを一次近似しX線の弾性定数を求めた。すべての試験片のX線の弾性定数と膜厚の関係をFig. 7に示す。図中の縦棒は68.3%の信頼限界である。 $s_2/2$, s_1 ともに膜厚 $50\mu\text{m}$ 以下の範囲では実験誤差内で、膜厚によらず一定である結果が得られた。

5・2 応力勾配を考慮した残留応力

前節で求めたX線の弾性定数を用いて応力解析を行ったところ、膜厚 $10\mu\text{m}$ の場合、次の関係が得られた。

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} -1145 & 0 \\ 0 & -1145 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 785 & 0 \\ 0 & 785 \end{pmatrix} z \text{ (MPa)} \quad (22)$$

この関係を図で表すとFig. 8 (a)のようになる。従来の $\sin^2\psi$ 法ではFig. 8 (b)のように平均の応力が求まるのみであるが、応力勾配を考慮した本法では表面の応力をより正確に求められたことが確認でき、めっき内部の応力状態を(a)のように求めることができた。界面付近に引張の応力が働いているが、これは基地材とめっき材で熱膨張係数や弾性定数などが異なるためと考えられる。

Fig. 9に応力勾配を考慮して求めた残留応力と膜厚の関係を示す。図中には、比較のため $\sin^2\psi$ 法による結果

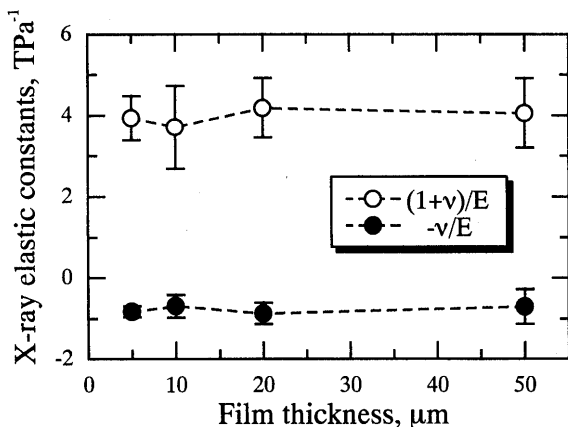


Fig. 7. Relation between X-ray elastic constants and film thickness.

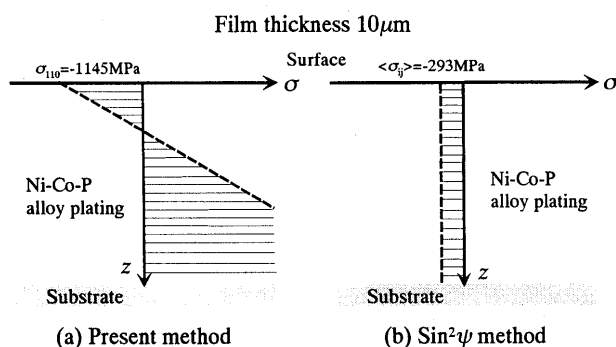


Fig. 8. Residual stress distribution in plating section.

を併記した。本法の結果によると製造の最終工程であるバレル研磨の影響を受け、極表面に大きな圧縮残留応力を有しており、また膜厚の増加に対し、圧縮応力が減少している。この違いは、表面がいずれも同じバレル研磨仕上げで統一していることから、膜・基板間の界面の影響の差異にあると思われる。めっき蒸着時に基板とめっきの物理的・機械的特性のミスフィットによるひずみが存在し、膜厚が小さい材料において、その影響が顕著になったと考える。表面応力の点から考えると、膜厚が小さくなるほど残留応力は表面圧縮が大きくなり、材料の疲労強度特性、耐摩耗性の向上が期待できる。

一方、従来の $\sin^2\psi$ 法による解析結果では残留応力はやや引張であり、本法の結果と著しく異なる結果が得られた。湾曲した 2θ と $\sin^2\psi$ の関係を機械的に近似するだけでは、 $\sin^2\psi$ のとり範囲によって著しく測定値が変化することは自明であり、本材のようなめっき表面近傍の応力状態を求めるには不適であると考えられる。

また、膜厚が小さくなるほど圧縮残留応力が大きくなるという報告例¹⁵⁾もあり、本法を適用することの妥当性は高いものと判断できる。

なお、 $\sin^2\psi$ 線図の湾曲には、めっき層における合金成分の濃度勾配による、格子定数の変化も関係する可能性が考えられるので、今後の検討が必要と思われる。また、今回省略した第二相粒子の相応力状態の解明を行う必要もあるが、現在検討中である。

6 結 言

(1) 等二軸応力状態で深さ方向に応力勾配が存在するような薄膜に対するX線応力測定的基础式、応力計算法、 2θ 決定法をNi-Co-Pめっき材に適用することにより、膜厚の相違による $\sin^2\psi$ 線図のシミュレーションを行った。

(2) $\sin^2\psi$ 線図が非線形を示すとき、非線形を考慮しX線の弾性定数を求めることができた。その結果、得られたX線の弾性定数に、膜厚は影響しない結果が得られた。

(3) 応力勾配を考慮し、残留応力を求めた結果、膜厚の増加に対し圧縮残留応力が減少した。また、従来の $\sin^2\psi$ 法を本材料に対し適用したところ、残留応力は本法に比べ著しく小さい値が得られていた。

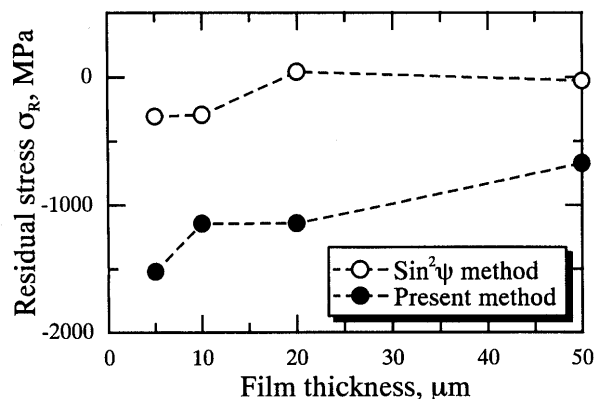


Fig. 9. Influence of film thickness on residual stress.

参 考 文 献

- 1) 榎本英彦, 古川直治, 松村宗順, “複合めっき” (1989) 日刊工業新聞社.
- 2) 日本材料学会編, “改著 X 線応力測定法” (1983) 養賢堂.
- 3) 英崇夫, 藤原晴夫, 西岡一水, 材料, **30**, 247 (1981).
- 4) 佐々木敏彦, 吉岡靖夫, 倉元眞實, 非破壊検査, **32**, 614 (1983).
- 5) 吉岡靖夫, 佐々木敏彦, 倉元眞實, 非破壊検査, **32**, 623 (1983).
- 6) 倉元眞實, 佐々木敏彦, 梅津二郎, 西本圭吾, 吉岡靖夫, 材料, **34**, 499 (1985).
- 7) 佐々木敏彦, 倉元眞實, 吉岡靖夫, 非破壊検査, **42**, 237 (1993).
- 8) 例えば, 田中啓介, 松井元康, 田中 拓, 材料, **42**, 96 (1993).
- 9) 大塚昌明, 松岡秀明, 広瀬幸雄, 石井 仁, 非破壊検査, **44**, 536 (1995).
- 10) 佐々木敏彦, 吉岡靖夫, 倉元眞實, 材料, **34**, 506 (1985).
- 11) 佐々木敏彦, 広瀬幸雄, 日本機械学会論文集, **61**, 1031 (1995).
- 12) 佐々木敏彦, 倉元眞實, 吉岡靖夫, 非破壊検査, **39**, 660 (1990).
- 13) 吉岡靖夫, 佐々木敏彦, 倉元眞實, 材料, **33**, 405 (1984).
- 14) T. R. MacCalla (三浦 功, 田尾陽一共訳), “計算機のための数値計算法概論”, p.225 (1978) サイエンス社.
- 15) 鈴木 寿, 松原秀彰, 松尾 明, 渋谷邦夫, 金属, **49**, 773 (1985).