

最小化法による多次元アメリカンオプション プライシングの数値解析

小原 功任* 岩崎 宏* 伊藤 好二†

* 金沢大学理学研究域数物科学系 † 金沢大学大学院自然科学研究科

概要. 多次元アメリカンコールオプション価格決定問題は、熱型の初期値障害物問題であり初期値に困難がある。最小化法に基づく数値スキームである離散勾配流法をこの問題に適用し、数値近似解の単調性と数値計算結果を示した。

Estimations to the Multi-Assets American Option Pricing via a Minimizing Method

Katsuyoshi Ohara* Hiroshi Iwasaki* Koji Itoh†

* Faculty of Mathematics and Physics, Kanazawa University

† Graduate School of Natural Science and Technology, Kanazawa University

Abstract. A minimizing method for calculating the American call option is developed. The American option pricing is a heat type obstacle problem but it contains some difficulties on the initial condition. In spite of these difficulties the discrete Morse semiflow, which is a minimizing scheme via the time semidiscretized variational functional, works well. Moreover approximate solutions are monotone increasing.

1. Introduction

この論文では、多次元アメリカンコールオプション価格決定問題の陰的スキームによる数値解法を扱う。多次元アメリカンコールオプション価格決定問題は数学的にも工学的にも興味深い対象である。原資産価格の変動が標準ブラウン運動に従う場合、 d 次元のアメリカンコールオプションのブラックショールズ方程式は次の表示をもつことはよく知られている(導出については、例えば [1] を参照)。

$$(1.1) \quad \min \left(-\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j S_i S_j \frac{\partial^2 w}{\partial S_i \partial S_j} - \sum_{i=1}^d (r - q_i) S_i \frac{\partial w}{\partial S_i} + rw, \right. \\ \left. w - \varphi \right) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times (\mathbf{R}_{>0})^d \\ w(T, S_1, \dots, S_d) = \varphi(S_1, \dots, S_d).$$

ここで、 $w(t, S)$ はオプション価格、 ρ_{ij} , σ_i , r , q_i , K , $\varphi(S)$ はそれぞれ、相関係数、変動率、銀行の短期金利、配当、権利行使価格、ペイオフ関数であり、 $r > q_i$ とする。また、相関行列

$P = (\rho_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$ は正定値である.

変数変換 $\tau = T - t$, $x_i = \frac{\sigma}{\sigma_i} \log \frac{S_i}{K}$, $u(\tau, x) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \frac{w(\tau, S)}{K}$, $\psi(x) = \exp\left(-\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \frac{\varphi(S)}{K}$ により, 方程式は次のように書き換えられる.

$$(1.2) \quad \min \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \beta u, u - \psi \right) = 0 \quad \text{in } (0, T) \times \mathbf{R}^d$$

$$u(0, x_1, \dots, x_d) = \psi(x_1, \dots, x_d),$$

ただし $Q_i = \frac{\sigma_i}{\sigma} \left(\frac{1}{2} + \frac{q_i - r}{\sigma_i^2} \right)$, $(a_1, \dots, a_d) = (Q_1, \dots, Q_d) P^{-1}$, $\beta = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d Q_i a_i + r$ とした. 相関行列 P が正定値であることから $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \beta u = 0$ は熱型方程式である. 以下, 混同のおそれがない場合には ψ もペイオフ関数と呼ぶことにする.

不一致集合 $\{u > \psi\}$ の境界は自由境界である. よってアメリカンコールオプションの価格決定問題は初期値条件と障害条件を持つ熱型方程式の自由境界問題と見なしうる. 障害条件 $u - \psi \geq 0$ は時間 τ に依存しない. また, 初期状態では方程式を満たす区間がなく, しかもそれが障害 $\psi(x)$ の微分不可能な点から出発するという困難がある.

小俣・岩崎たち [5] は 1 次元アメリカンオプション価格決定問題に離散勾配流法を導入した. 離散勾配流法は, 時間離散的な汎関数の最小化に基づく数値解法である. 近年, 石井・小俣 [2] は, 粘性解の理論により 1 次元アメリカンオプションでの離散勾配流法が収束することを証明し, あわせて近似解の収束速度を得た.

我々は離散勾配流法を多次元アメリカンオプション価格決定問題に適用し, 近似解の単調性を証明した. また 2 次元・3 次元の場合に数値計算による結果を示す.

2. 離散勾配流法

この節では, 離散勾配流法について述べる. (1 次元の場合には [5] を参照せよ)

Ω を \mathbf{R}^d の有界領域とし, h を正数とする. 汎関数

$$J_m(u) := \int_{\Omega} \left(\frac{|u - u_{m-1}|^2}{2h} + \frac{\sigma^2}{4} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\beta}{2} u^2 \right) dx, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

を考えよう. ここで, 許容関数空間を $\mathcal{K} = \{u \in H^1(\Omega); u \geq \psi \text{ in } \Omega, u|_{\partial\Omega} = \psi\}$ にとる. 初期値 $u_0 = \psi \in \mathcal{K}$ からはじめ, 許容関数空間 \mathcal{K} における J_m の最小化関数 u_m を求めていくことで, 最小化関数列 $\{u_m\} \subset \mathcal{K}$ を帰納的に定める.

さて, J_m の最小化関数 u は次の性質を満たす. 任意の $v \in \mathcal{K}$, $\theta \in [0, 1]$ に対して, 関数 $f(\theta) = J_m(u + \theta(v - u))$ は $\theta = 0$ で最小をとり,

$$f'(+0) := \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{J_m(u + \theta(v - u)) - J_m(u)}{\theta}$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{u - u_{m-1}}{h} (v - u) + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (v - u)}{\partial x_j} + \beta u (v - u) \right) dx \geq 0$$

が成り立つ。よって最小化関数 u が

$$(2.1) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{u - u_{m-1}}{h} \zeta + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \beta u \zeta \right) dx \geq 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega), \zeta \geq 0,$$

$$(2.2) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{u - u_{m-1}}{h} \zeta + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \beta u \zeta \right) dx = 0 \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega \cap \{u > \psi\}).$$

を満たすことがいえる。

定義 2.1 関数列 $\{u_m(x)\} \subset \mathcal{K}$ を $J_m(u)$ の最小化関数列とする。以下で定義する、 $(0, T) \times \Omega$ 上の関数 $u(\tau, x)$ を自由境界問題 (1.2) の近似解と呼ぶ ([5]):

$$u(\tau, x) = \frac{\tau - (m-1)h}{h} u_m(x) + \frac{mh - \tau}{h} u_{m-1}(x). \quad ((m-1)h < \forall \tau \leq mh)$$

3. 解の単調性

汎関数 $J_m(u)$ の最小化関数 u が満たす条件 (2.1), (2.2) より、次の単調性定理を導くことができる。自由境界問題の陰的スキームでこのような単調性が容易に得られるのが離散勾配流法の特徴となっている。

定理 3.1 $u_{m-1}(x)$ が e -劣解ならば、汎関数 $J_m(u)$ の最小化関数 $u_m(x)$ も e -劣解であり、 $u_m \geq u_{m-1}$ を満たす。ただし、 $\frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \beta u \geq 0$ を満たす関数 u を e -劣解と呼ぶ。

このことから帰納的に次の定理が得られる。

定理 3.2 初期値 $\psi(x)$ が e -劣解ならば、汎関数 $J_m(u)$ の最小化関数列 $\{u_m(x)\}$ は $\psi = u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots$ を満たす。

同様の議論をすることにより、初期値が適切な条件を満たせば、汎関数 $J_m(u)$ を離散化しても数値近似解が単調性を保つことを、1次元と2次元の場合に示すことができる。

3.1 1次元

領域 Ω を有限開区間、関数 u の区分的一次関数近似を \tilde{u} で表し、この近似による汎関数 $J_m(u)$ の離散化形式を $\tilde{J}_m(\tilde{u})$ で表す。

定理 3.3 初期値 $\tilde{\psi}(x)$ が $\frac{\sigma^2}{2} \frac{\psi_{j+1} - 2\psi_j + \psi_{j-1}}{(\Delta x)^2} - \beta \frac{\psi_{j-1} + 4\psi_j + \psi_{j+1}}{6} \geq 0$ を満たすならば、汎関数 $\tilde{J}_m(\tilde{u})$ の最小化関数列 $\{\tilde{u}_m(x)\}$ は $\tilde{\psi} = \tilde{u}_0 \leq \tilde{u}_1 \leq \tilde{u}_2 \leq \dots$ を満たす。

3.2 2次元

長方形領域 Ω が正方形要素 $D_{ij} = \{(x, y); x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$ で分割されているとし, $u_{kl} = u(x_k, y_l)$ と置く. 各 D_{ij} では関数 $u(x, y)$ を多重線形関数

$$\tilde{u}(x, y) = \frac{u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{\Delta x^2} (x-x_i)(y-y_j) + \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{\Delta x} (x-x_i) + \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\Delta x} (y-y_j) + u_{ij}$$

で近似する. また, この近似による汎関数 $J_m(u)$ の離散化形式を $\tilde{J}_m(\tilde{u})$ で表す.

定理 3.4 初期値 $\tilde{\psi}(x, y)$ が $\frac{\sigma^2}{2}((\Delta\tilde{\psi})_{ij} + 2\rho(D^2\tilde{\psi})_{ij}) - \beta[\tilde{\psi}]_{ij} \geq 0$ を満たすならば, 汎関数 $\tilde{J}_m(\tilde{u})$ の最小化関数列 $\{\tilde{u}_m(x)\}$ は $\tilde{\psi} = \tilde{u}_0 \leq \tilde{u}_1 \leq \tilde{u}_2 \leq \dots$ を満たす. ただし,

$$\begin{aligned} (\Delta\tilde{u})_{ij} &= \frac{u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} - 8u_{ij}}{3\Delta x^2}, \\ (D^2\tilde{u})_{ij} &= \frac{(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) - (u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1})}{4\Delta x^2}, \\ [\tilde{u}]_{ij} &= \frac{16u_{ij} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i,j+1} + 4u_{i,j-1} + 4u_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}}{36} \end{aligned}$$

とする.

4. 数値計算

この節では, 問題 (1.2) について, 2次元・3次元のアメリカンオプション価格決定の数値解析結果を示す. 我々の基本アイデアは, 領域を正方形・立方体要素で分割し, 関数 u を多重線形関数で近似することである (e.g. [6]). この方法の利点は高次元に拡張しやすいことにある. 特に2次元の場合には, 数値解が単調性を示すことは既に述べた.

この節の各例において, $\psi(x)$ は問題 (1.2) のペイオフ関数とする. また $\psi(x)$ に対応する, 問題 (1.1) のペイオフ関数を $\varphi(S)$ で表す.

例 1 領域 $\Omega = \{(x_1, x_2); -1.0 \leq x_1, x_2 \leq 2.0\} \subset \mathbf{R}^2$. 実験条件 $N = 100$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 3.0/N = 0.03$, $h = 1.0 \times 10^{-4}$, $T = 1.0$, $\sigma = 0.4$, $\rho_{12} = 0.5$, $a_1 = a_2 = 0.125$, $\beta = 0.08875$. $\psi(x_1, x_2) = e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} \max(0.4e^{x_1} + 0.6e^{x_2} - 1.0, 0)$, $\varphi(S) = \max(0.4S_1 + 0.6S_2 - 1.0, 0)$.

離散勾配流法による数値解 u のグラフを Fig. 1 に示す. u のグラフのうち淡色は関数 u がペイオフ関数 ψ と一致していることを, 濃色は $u > \psi$ であることを表す.

次に, 離散勾配流法による数値解 $u_d(\tau, x)$ の特徴をみるために, 同じ条件の下でオイラー法による数値解 $u_e(\tau, x)$ と比較し, $f(\tau, x) = u_e(\tau, x) - u_d(\tau, x)$ の挙動を調べた (Fig. 2). $\min_{x \in \Omega} f(\tau, x)$ は時刻 $\tau > 0.0685$ では, $|\min_{x \in \Omega} f(\tau, x)| < 0.5 \times 10^{-13}$ となっており, これはほぼ 0 とみなしてよい. したがって τ が十分大きいときにはオイラー法による数値解 u_e

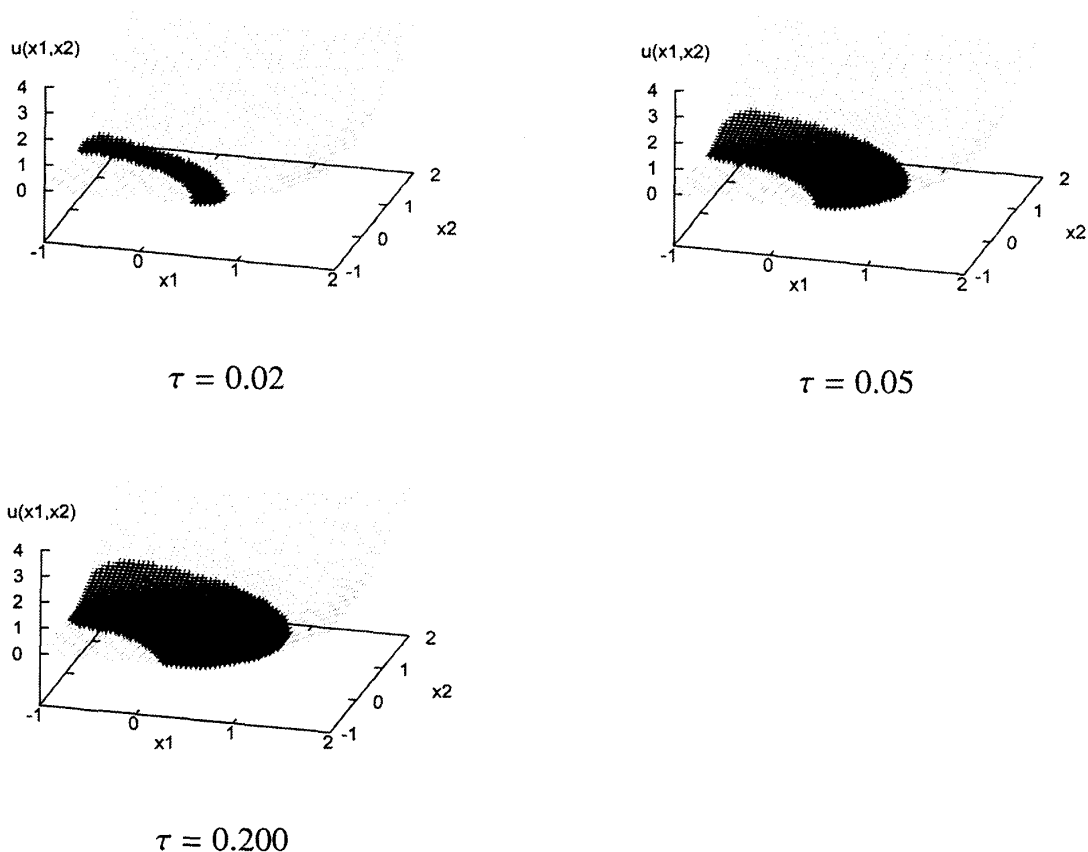


Fig. 1. The graph of u in Example 1.

と離散勾配流法による数値解 u_d には大小関係 $u_e(\tau, x) \geq u_d(\tau, x)$ があると結論づけられる。Fig. 2 の左は、直線 $\{x_1 = x_2\}$ での $f(\tau, x)$ のグラフである。

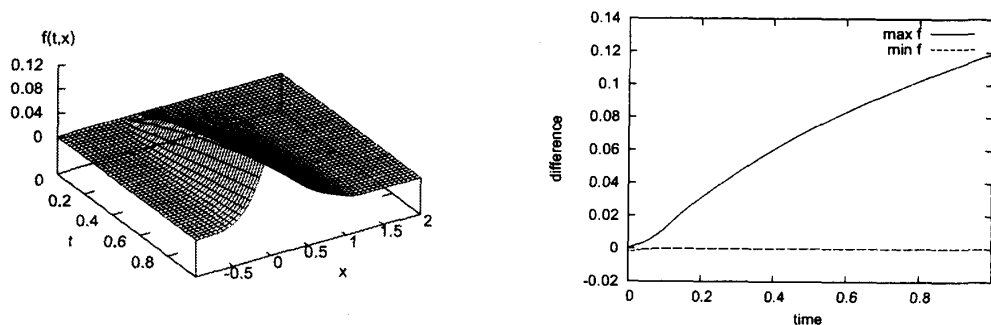


Fig. 2. The graph of $f(\tau, x)$ on $\{(\tau, x) ; 0 \leq \tau \leq 0.5, x_1 = x_2\}$ and the graph of $\max_{x \in \Omega} f(\tau, x)$ and $\min_{x \in \Omega} f(\tau, x)$ on $\{\tau ; 0 \leq \tau \leq 1.0\}$.

さらに、離散勾配流法の数値解とパラメータ h の関係を調べよう。 $h_0 = 1.0 \times 10^{-4}$, $h_1 = h_0/2$, $h_2 = h_0/4$, $h_3 = h_0/8$ とし、 $h = h_i$ の場合の数値解を u_i とする。このとき、時刻

$\tau \geq 0.0172$ でいずれも $\min_{x \in \Omega} (u_{i-1} - u_i) \equiv 0$ となり, $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq u_3$ とみなすことができる. したがって, $h \rightarrow 0$ としたとき, 離散勾配流法の数値解は単調に減少すると考えられる.

例 2 領域 $\Omega = \{(x_1, x_2); -1.0 \leq x_1, x_2 \leq 2.0\} \subset \mathbf{R}^2$. 実験条件 $N = 60$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 3.0/N = 0.05$, $h = 1.0 \times 10^{-3}$, $T = 1.0$, $\sigma = 0.4$, $\rho_{12} = 0.5$, $a_1 = a_2 = 0.125$, $\beta = 0.08875$. $\psi(x_1, x_2) = e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2} \max(\max(e^{x_1}, e^{x_2}) - 1.0, 0)$, $\varphi(S) = \max(\max(S_1, S_2) - 1.0, 0)$.

離散勾配流法による数値解 u のグラフを Fig. 3 に示す. u のグラフのうち淡色は関数 u がペイオフ関数 ψ と一致していることを, 濃色は $u > \psi$ であることを表す.

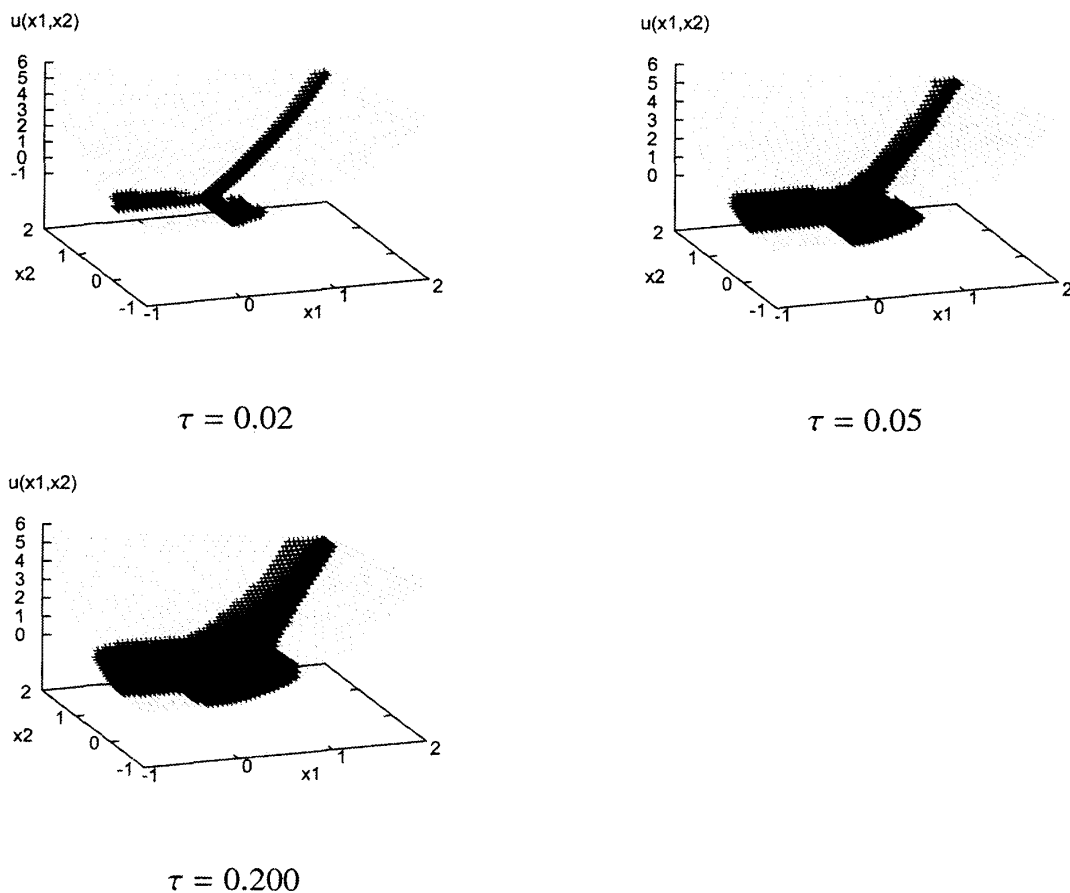
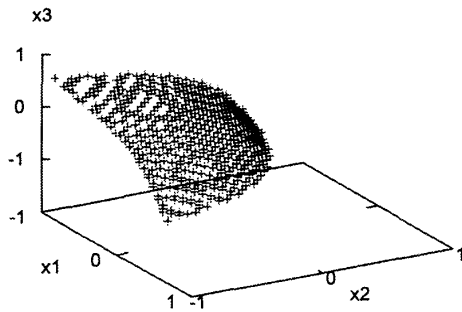


Fig. 3. The graph of u in Example 2.

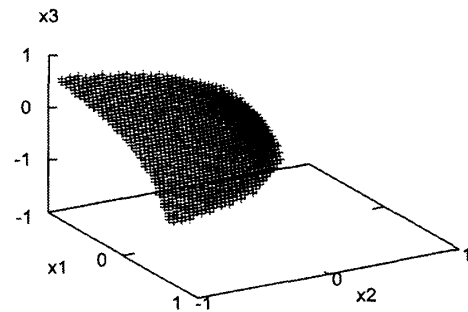
次の例は 3 次元の場合であり, ペイオフ関数は例 1 に類似したものである. ここでは, 各時刻における不一致集合 $\{x \in \Omega; u > \psi\}$ を示す. (Fig. 4)

例 3 領域 $\Omega = \{(x_1, x_2, x_3); -1.0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 1.0\} \subset \mathbf{R}^3$. 実験条件 $N = 32$, $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 2.0/N = 0.0625$, $h = 1.0 \times 10^{-5}$, $T = 1.0$, $\sigma = 0.4$, $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 0.5$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0.09375$, $\beta = 0.104219$. $\psi(x) = e^{-a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3} \max(0.4e^{x_1} + 0.4e^{x_2} + 0.4e^{x_3} - 1.0, 0)$,

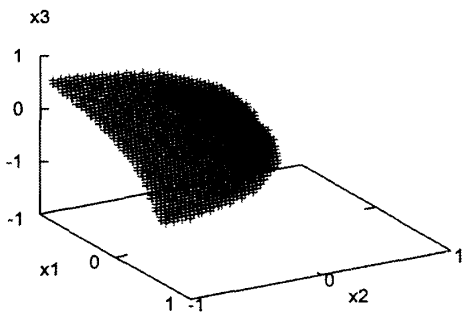
$$\varphi(S) = \max(0.4S_1 + 0.4S_2 + 0.4S_3 - 1.0, 0).$$



$$\tau = 0.0001$$



$$\tau = 0.0005$$



$$\tau = 0.001$$

Fig. 4. The graph of the noncoincident set $\{x \in \Omega ; u > \psi\}$ in Example 3.

最後に、それぞれの数値計算例の経過時間を表 1 に示す。軸方向の分割数を N 、最大時間ステップは 1000 とする。実験には Celeron 2.6 GHz, 512 MB メモリの計算機で FreeBSD 5.3 を使用した。

Table 1. Elapsed Time for Example 1, 2.

N	20	40	60	80	100
Elements = N^2	400	1600	3600	6400	10000
Example 1	3.15s	10.57s	24.15s	43.37s	123.40s
Example 2	4.36s	14.97s	32.93s	57.49s	130.18s

5. 結論

離散勾配流法による多次元アメリカンオプションの数値スキームを提案し、その数学的性質と数値計算結果を示した。我々の方法の利点は、高次元への拡張が容易なことであり、低次元においては、その計算は一般的な PC でも実行可能である。また離散勾配流法の数値解は、数値スキームのパラメータ h を 0 に近づけたときに、単調に減少することが観察された。さらに離散勾配流法とオイラー法による数値解を比較し、その大小関係が観察されることを示した。これらのことは、多次元アメリカンオプション価格決定の数値解析のさらなる精密化にむけて寄与すると考えられ、今後の発展が期待できる。

6. 謝辞

本研究に関して、金沢大学理工研究域数物科学系の小俣正朗教授には有益な助言をいただいた。また、金沢大学自然科学研究科博士前期課程 2 年の田中俊君には計算機実験を手伝っていただいた。ここに記して感謝したい。

参考文献

- [1] T.P. Branson and Yang Ho Choi, “*Option Pricing on Multiple Assets*”, *Acta Appl. Math.*, **94** (2006), 137–162.
- [2] K. Ishi and S. Omata, “*Approximation via the discrete Morse semiflow to the American option pricing*”, preprint.
- [3] N. Kikuchi, “*A method of constructing Morse semiflows to variational functionals*”, *Nonlinear World*, **1** (1994), 131–147.
- [4] S. Omata, “*Numerical methods based on the discrete Morse semiflow*”, *Theoretical and Applied Mechanics*, **45** (1996), 189–194.
- [5] S. Omata, H. Iwasaki, K. Nakane, X. Xiong, and M. Sakuma, “*A numerical computation to the American option pricing via the discrete Morse flow*”, *Theoretical and Applied Mechanics*, **52** (2003), 261–266.
- [6] G. Strang and G.J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [7] X. Wu and X. Feng, “*A Numerical Method for Determining the Optimal Exercise Price to American Options*”, *J. Comput. Math.*, **21** (2003), No. 3, 305–310.

小原 功任 (正会員) 〒920-1192 金沢市角間町金沢大学理学部

1998年神戸大学大学院自然科学研究科博士後期課程修了. 博士(理学). 金沢大学理学研究域数物科学系助教. 日本数学会, 日本数式処理学会会員.

岩崎 宏 (非会員) 〒920-1192 金沢市角間町金沢大学理学部

1992年京都大学大学院理学研究科修了. 博士(理学). 金沢大学理学研究域数物科学系准教授. 日本流体力学会会員.

伊藤 好二 (非会員) 〒920-1192 金沢市角間町金沢大学理学部

北見工業大学化学システム工学科講師. 金沢大学大学院自然科学研究科博士後期課程在学中. 日本分析化学会会員.

(2008年3月31日受付)

(2008年10月24日最終稿受付)