[書評] S. Kaneyuki: Homogeneous bounded domains and Siegel domains, Springer, 1971年, 89ページ

S. Kaneyuki : Homogeneous bounded domains and Siegel domains, Springer, 1971年，89ページ.

本書は 1970–71 年の Scuola Normale Superiore, Pisa における ‘Cayley transformations of homogeneous bounded domains’ と題する著者の講義をもとにして書かれたものである．その最終目標を一口で言うならば，与えられた複素 Euclid 空間の中の等質有界領域 D の正則自己同型群 Aut(D) の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が ‘j-代数’ と呼ばれる構造をもつことに着目し，この j-代数構造を詳細に調べあげることにより，D は Cayley 変換を介して第３種 Siegel 領域として実現可能であることを示すことにある．さて，Siegel 領域とは何か？　これは多変数の保型函数論の研究に関連して Piatetskii-Shapiro [2] によって導入された領域で，第１種から第３種まであり，複素平面 $\boldsymbol{C}$ における上半平面の高次元への一般化になっている．そして，次の基本定理(I), (II)が成立する [2], [6]：(I) $\boldsymbol{C}^N$ の Siegel 領域はある有界領域と正則同値である．(II) $\boldsymbol{C}^N$ の任意の等質有界領域はある Siegel 領域に正則同値である．かくして，等質有界領域の研究はすべて等質 Siegel 領域の研究に帰着されたわけである．事実，1935 年に E. Cartan が提出した問題 ‘任意の等質有界領域は対称領域であるか？’ に対する 1959 年の Piatetskii-Shapiro による反例は Siegel 領域の考察によって得られた．このため，ますます Siegel 領域の微分幾何学的側面からの研究がなされるようになり現在に至っている．

さて，本書を構成する９つの節と，１つの付録について，その内容を簡単に紹介することにする．

§1. **The Affine Automorphism Groups of Siegel Domains.** R を実ベクトル空間，W を複素ベクトル空間とし，R^C で R の複素化を表わすことにする．この節では複素ベクトル空間 $R^C \times W$ の中の第２種 Siegel 領域 $D(V, F)$ の定義が与えられ，$D(V, F)$ に対して成立する基本的な事実が示される．特に，$D(V, F)$ のアフィン自己同型群 G_a が決定されている．

§2. **The Iwasawa Subgroups.** 任意の等質 Siegel 領域のアフィン自己同型群 G_a の単位元を含む連結成分が，ある実代数群の単位元を含む連結成分に一致することをまず証明し，この事実と Vinberg [5] の結果から，任意の等質有界領域 D に対して D に自由に，しかも推移的に作用する ‘D の岩沢部分群’ と呼ばれる G_a の可解部分群 T が，本質的にただ一つ存在することが導かれる．

§3. ***j*-Algebras.** この節の冒頭で，等質有界領域の構造を調べるうえで本書における最大の武器である ‘j-代数’ の定義を与え，そして $R^C \times W$ の中の任意の等質 Siegel 領域 $D(V, F)$ のアフィン自己同型群 G_a の Lie 代数 $\mathfrak{g}_a$ が j-代数構造をもつことが証明される．特に，ベクトル空間 R, W は自然に $\mathfrak{g}_a$ の部分空間と同一視でき，$D(V, F)$ に正則同値な等質有界領域 D の岩沢部分群 T の Lie 代数 $\mathfrak{t}$ がやはり j-代数となり，$\mathfrak{t} = jR + R + W$ と直和分解できることが証明されている．以後，この j-代数 $\mathfrak{t}$ は ‘岩沢 j-代数’ と呼ばれ，本書の至るところで重要な役割を演ずることになる．

§4. **Universal *j*-algebras.** D_1 を $R^C \times W$ の中の等質 Siegel 領域 $D(V, F)$ に正則同値な領域とし，$\mathfrak{t}_1 = jR + R + W$ を D_1 の岩沢 j-代数とする．この節では，与えられた $\mathfrak{t}_1$ の j-代数構造から自然に W にはシンプレクテック ベクトル空間の構造が入り，それに関するシンプレクテック変換群の Lie 代数 $\mathfrak{sp}(W)$ が j-代数になることをまず証明し，そして $\mathfrak{sp}(W)$ のある半単純 j-部分代数 $\mathfrak{s}$ に対して直和ベクトル空間 $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{s}$ に，適当な Lie 代数構造を入れることによって $\mathfrak{g}$ は j-代数構造をもち，$\mathfrak{s}$ は $\mathfrak{g}$ の j-部分代数となることが示されている．この j-代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{s}$ は次の性質をもつ：$\mathfrak{t}_0$ をある等質有界領域 D_0 の岩沢 j-代数で，$\mathfrak{t}_1$ をそのイデアルとして含んでいると仮定する．このとき，$\mathfrak{t}_0$ の j-部分代数 $\mathfrak{t}_2$ と Lie 代数準同型 $\lambda : \mathfrak{t}_2 \to \mathfrak{s}$ で $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2$ (直和), $[\lambda(t), x] = [t, x]$ $(t \in \mathfrak{t}_2, x \in \mathfrak{t}_1)$ となるものが存在する．このことから $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{s}$ は ‘$\mathfrak{t}_1$ の普遍 j-代数’ と呼ばれる．

§5. **Universal Domains.** $\mathfrak{t}_1$ を等質有界領域 D_1 の岩沢 j-代数とし，$\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{s}$ をその普遍 j-代数とする．この節の前半においては，与えられた D_1 に対して正則同値を除いてただ一つ決まる ‘D_1 の普遍領域’ と呼ばれる有界領域 D を構成し，しかも D 上推移的で，その Lie 代数が $\mathfrak{g}$ に一致する Aut(D) の Lie 部分群 G が存在するこ

とが示される．また，後半は等質有界領域の正則 fibering に関するものであり，上記の有界域領 D の普遍性についての記述がある．

§6. A Generalization of Borel Imbeddings. 任意の対称有界領域がその双対コンパクト対称空間に埋め込まれる，というよく知られた Borel imbedding の類似を等質有界領域 D に対しておこなっている．すなわち，G_h を $\mathrm{Aut}(D)$ の単位元を含む連結成分とすれば，$D=G_h/K_h$ と表わせるが，このとき D はある複素射影空間 $P_N(C)$ の複素等質空間 $M=G_h^c/L$ に正則に埋め込まれることが証明されている．

§7. Cayley Transformations of Universal Domains. D_1 を等質有界領域とし，$\mathfrak{t}_1=jR+R+W$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}_1+\mathfrak{s}$ を，それぞれ，その岩沢 j-代数，普遍 j-代数とする．このとき，D_1 の普遍領域 D は§5より $D=G/K=G_h/K_h$ と表わせる．今 $\beta: D\to M=G_h^c/L$ を前節の埋め込みとするとき，この節では $\mathfrak{g}_h^c$ の構造と，D の像 $\beta(D)$ を詳細に調べている．すなわち，複素化 $\mathfrak{s}^c, \mathfrak{g}^c$ は $\mathfrak{s}^c=\mathfrak{k}^c+\mathfrak{p}^++\mathfrak{p}^-$, $\mathfrak{g}_h^c=\mathfrak{l}+(R^c+W^++\mathfrak{p}^+)$ と‘うまい条件’を満たすように直和分解でき，$\xi=\pi\circ\exp: R^c+W^++\mathfrak{p}^+\to M=G_h^c/L$ は正則な埋め込みであることがわかる．そして，$\mathfrak{t}_1$ からただ一つ決まる $\mathrm{Aut}(M)$ のある元として‘Cayley 変換 c_1’が定義される．このとき，$\xi^{-1}\circ c_1\circ\beta(D)$ は D に正則同値な $R^c+W^++\mathfrak{p}^+$ の領域となる．

§8. Remarks of Harish-Chandra imbeddings. $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}_1+\mathfrak{s}$ を§7における $\mathfrak{t}_1=jR+R+W$ の普遍 j-代数とする．この節は後の準備であり，半単純 j-部分代数 $\mathfrak{s}$ に対応する有界対称領域 $D(\mathfrak{s})$ の $\mathfrak{p}^+$ への Harish-Chandra imbedding を調べている．

§9. Realizations as Siegel Domains of Type III. 最初に第3種 Siegel 領域の定義を与え，そして D を等質有界領域 D_1 の普遍領域とするとき，§6～§8で得られた結果を総動員して§7における $R^c+W^++\mathfrak{p}^+$ の中の D に正則同値な領域 $\xi^{-1}\circ c_1\circ\beta(D)$ が底空間として $\mathfrak{p}^+$ の中の有界対称領域 $D(\mathfrak{s})$ をもつ第3種 Siegel 領域であることを証明する．また，この定理の応用として Piatetskii-Shapiro[3]による等質有界領域の正則 fibering の第3種 Siegel 領域としての実現に関するよく知られた定理に再証明を付けて終わっている．

Appendix. 最初の部分で述べた基本定理(II)の証明の概略を与えている．

以上で，内容の紹介を終わるが，本書は実際の講義にもとづいていることもあって，前半の数節を費やして Siegel 領域の基礎部分を誠にていねいに解説しており，また後半では，等質有界領域を第3種 Siegel 領域として実現するという一つの大きなテーマに的をしぼり，j-代数構造をフルに使って準備していくさまは大変興味深い．この本での最大の武器であった‘j-代数’は，有界領域に限らず，複素等質空間の研究において，いろいろと活用されていることもあり，等質有界領域のみならず，複素等質空間に関心がある人達にとって，本書は大変興味深く読めることと思う．最後に，本書が出版された以後においても Siegel 領域に関する研究が数多くあり，それらに関しては，最近出版された佐武[4]を参照してもらいたい．

文　献

[1] S. Kaneyuki, On the automorphism groups of homogeneous bounded domains, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **14** (1967), 89–130.

[2] I. I. Piatetskii-Shapiro, Geometry of classical domains and theory of automorphic functions, Fizmatgiz, Moscow, 1961; (French transl.) Dunot, Paris, 1966; (English transl.) Gordon and Breach, New York, 1969.

[3] I. I. Piatetskii-Shapiro, The geometry and classification of bounded homogeneous domains, Uspehi Mat. Nauk, **20** (1965), 3–51; Russian Math. Surveys, **20** (1965), 1–48.

[4] I. Satake, Algebraic structures of symmetric domains, Publications of the Math. Soc. of Japan 14, Iwanami Shoten, Publishers and Princeton Univ. Press, 1980.

[5] E. B. Vinberg, The Morozov-Borel theorem for real Lie groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **141** (1961), 270–273; Soviet Math. Dokl., **2** (1961), 1416–1419.

[6] E. B. Vinberg, S. G. Gindikin and I. I. Piatetškii-Shapiro, Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains, Trudy Moskov. Mat. Obšč., **12** (1963), 359–388; Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 404–437.

(児玉秋雄)