

Superstring の現象論的側面について

金沢大学・理学部 末松大二郎

1. Introduction

1980年代半ば以来、重力を含む統一理論の最も有望な候補として4次元 superstring theory は精力的に研究されてきた [1]。superstring theory は supersymmetry、conformal invariance、modular invariance 等のきわめて大きな対称性により特徴づけられた Planck scale M_{pl} で定義される free parameter の存在しない理論であり、極めて高い予言力を持つものと期待される。これまでに Calabi-Yau compactification [2]、orbifold compactification [3]、fermionic construction [4]、Gepner construction [5] 等様々な方法に基づいて4次元 superstring model の構成が試みられると同時に standard model を内包する現実的な superstring model の探索がなされてきている。しかし、この過程で superstring の摂動的真空は無限に縮退しており、この無限に縮退した真空の中から真の真空を取り出すには string の非摂動的取扱いが不可欠であることが明らかになった。string の非摂動的取扱いについては現在のところ未解決の状態にあり、superstring の研究は暗礁に乗り上げているというのが現状である。以下では superstring の low energy effective field theory とその現象論的側面に関する研究の現在までの到達点の概要をまとめることにする。

superstring の非摂動的取扱いを含め superstring の理論の全容が解明されていない現段階では、直接 superstring そのもので実験的に到達可能なエネルギー領域の物理を取り扱うことができないことは言うまでもない。このような状況の中で考えられるひとつの方法は、superstring の持つ symmetry からの制限と M_W scale で押さえられている現象論的制限、即ち standard model の構造を同時に課すことによって effective field theory の構造を制限していくことであろう。このような戦略に従い、superstring theory の weak scale M_W における effective field theory の構造 (particle contents や interactions) を決め、現象論的特性を調べるという方向でこれまでの研究はなされてきたと言って良からう。

superstring の持つ symmetry のなかで、特に4次元時空の $N = 1$ supersymmetry が存在するべしという条件は effective field theory を厳しく制限する。すなわち、このような effective field theory は一般に $N = 1$ supergravity に super Yang-Mills と様々な chiral super fields が結合した系になると考えられる [6]。このような系に残された自由度は gauge group G 、chiral superfields z_i の G に関する表現 \mathbf{R} とその数 $N_{\mathbf{R}}$ 、さらに Kähler potential $\mathcal{G}(z_i, z^{*i}) = K(z_i, z^{*i}) + \ln |W(z_i)|^2$ と gauge kinetic function $f_{\alpha\beta}(z_i)$ である。これらの自由度は high energy 領域における基本理論である superstring theory から決定されるべきものである。無限に縮退した真空のそれぞれに対応して $(G, \Sigma_{\mathbf{R}} N_{\mathbf{R}} \mathbf{R}, \mathcal{G}(z_i, z^{*i}), f_{\alpha\beta}(z_i))$ で特徴づけられる low energy 領域での effective field theory が存在することになる。

ここで簡単に Kähler potential と gauge kinetic function の物理的内容を見ておくことにしよう。chiral superfields z_i の kinetic term は Kähler potential $\mathcal{G}(z_i, z^{*i})$ を用いて、

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = G_j^i \partial^\mu z_i \partial_\mu z^{*j} \quad (1)$$

と書くことができる。ここで $G_i = \frac{\partial G}{\partial z^{*i}}$, $G_j^i = \frac{\partial^2 G}{\partial z_i \partial z^{*j}}$ である。また、effective scalar potential は

$$V = e^G [G_i (G^{-1})^i_j G^j - 3] + \frac{1}{2} D^a D_a \quad (2)$$

と表せる。ここで $D^a = g z^{*i} T^a z_i$ である。gauge kinetic function $f_{\alpha\beta}(z_i)$ は

$$\mathcal{L}_A = (\text{Re } f_{\alpha\beta}) F^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu}^\beta + i(\text{Im } f_{\alpha\beta}) F^{\alpha\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}^\beta \quad (3)$$

として gauge fields の kinetic term に現れる。例えば、 $f_{\alpha\beta} = f \delta_{\alpha\beta}$ の場合、gauge coupling constant は $g^2 = \frac{1}{\text{Re } f}$ となり、 θ -angle は $\theta = \frac{(\text{Im } f)}{(\text{Re } f)}$ となる。 $W(z_i)$ は superpotential と呼ばれ、superstring のように mass scale としては M_{pl} しか存在しないような理論の effective theory の場合には、renormalizable な範囲では W の中に mass scale は入り得ず

$$W(z) = d_{ijk} z^i z^j z^k \quad (4)$$

となる。ここで、 d_{ijk} は Yukawa coupling constant で quark-lepton の mass および Kobayashi-Masukawa matrix の起源となるものであり、string theory により原理的には計算されるべきものである。

superstring の low energy effective theory を構成するということは上で説明した自由度を superstring から決めることにほかならない。このための手続きは、2段階にわたると考えられる。まず第1は、 $(G, \Sigma_{\mathbf{R}} N_{\mathbf{R}} \mathbf{R})$ を決定することである。これは superstring の古典解を求めることに対応する。第2は $(G(z_i, z^{*i}), f_{\alpha\beta}(z_i))$ を superstring の持つ対称性からの制限を最大限に利用し、string loop の効果や非摂動効果をも含めて決定することである。string の非摂動効果を直接 string の言葉で扱うのではなく、我々がよく知っている通常の場合の理論の言葉でこれらを low energy effective theory の中に取り込もうという試みであるともいえる。特に第2のステップは supersymmetry breaking とそれに伴って起こると期待される真空の縮退の解消(コンパクト化した空間の構造の決定)、さらには dilaton の真空期待値の決定などの解析において本質的に重要となる。

以下の各節で取り扱う問題は次のようなものである。2節ではこれまでに提案されてきた様々な構成法の概要とそこで得られた model の特徴に簡単に触れる。3節では非摂動効果を effective field theory に取り込む試みとして最近おこなわれている target space duality を用いた議論を紹介し、これに関連したトピックスに触れる。4節では low energy 領域で期待される現象の代表的なものをごく簡単に紹介する。最後にまとめを5節でおこなうことにする。

2. 様々な構成法からの approach

現在までに多数の4次元 superstring の構成法が提案されてきている。ここではその代表的なものについて簡単に紹介を行うことにする。

(1) Calabi-Yau compactification

10次元の $E_8 \times E_8'$ superstring の compactification において4次元で $N = 1$ の space-time の supersymmetry が備わった解として最初に提案されたものが Calabi-Yau compactification であった [2]。Calabi-Yau compactification は4次元の superstring を直接的に構成するのではなく、10次元 $E_8 \times E_8'$ superstring の場の理論的極限をとって得られる $E_8 \times E_8'$ super Yang-Mills

の結合した 10 次元の $N = 1$ supergravity の 4 次元への compactification を考えることにより発見された解である。この古典解は 10 次元時空を $M_4 \times K$ にコンパクト化したとき、 M_4 上での $N = 1$ space-time supersymmetry を保つように、コンパクト化した manifold K として $SU(3)$ holonomy を持つ Ricci flat Kähler manifold (Calabi-Yau manifold) を採用するというものである。以下、この方法により得られる model の一般的特徴について見ることにする。

(a) gauge group structure と field contents ($G, \Sigma_{\mathbf{R}} N_{\mathbf{R}} \mathbf{R}$)

Calabi-Yau compactification においては K への compactification を考える際に E_8 の部分群 $SU(3)$ を K の spin connection と同一視することから M_4 上の gauge group は $G = E_6 \times E'_8$ となる。observable sector の field contents は E_6 の表現としては $A_\mu(78), \psi(27), \psi^*(27^*), \phi(1)$ であり、各々の個数は K の cohomology group の次元である Hodge 数により $h^{0,0}, h^{2,1}, h^{1,1}, h^{2,1} + h^{1,1} + \dim H^1(\text{End}T)$ と決定される。したがって、こうして得られる model では generation 数 $N_g = |N_{27} - N_{27^*}|$ は $N_g = |h^{2,1} - h^{1,1}| = \frac{1}{2}|\chi|$ として K の topology のみにより決まる Euler 数 χ に関係づけられることになる。

E_6 の 27 を部分群 $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ のもとで分解すると

$$\begin{aligned} & Q(3, 2)_1 + U(3^*, 1)_{-4} + D(3^*, 1)_2 + L(1, 2)_{-3} \\ & + E(1, 1)_6 + S_1(1, 1)_0 + H(1, 2)_3 + H'(1, 2)_{-3} \\ & + \bar{g}(3^*, 1)_2 + g(3, 1)_{-2} + S_2(1, 1)_0 \end{aligned} \quad (5)$$

となり、minimal supersymmetric standard model を構成する chiral superfields が完全に含まれていることがわかる。ところで一般に Calabi-Yau manifold の Euler 数 χ は $\frac{1}{2}|\chi| \gg 3$ であり、かつ上で与えた field contents には E_6 の adjoint 表現が含まれていないため、 $E_6 \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ という対称性の破れは起こり得ず、low energy で standard model をもたらしることができない。この問題は、 K として background field の存在する multiply connected manifold を考えることにより回避できる [7]。いま、 K_0 として simply connected manifold を考える。 K_0 への作用が fixed point を持たないような discrete symmetry D を考え、 $K = K_0/D$ を定義する。この manifold の Euler 数は $\chi(K) = \chi(K_0)/(\dim D)$ となるため、適当な K_0 と D を考えることにより、 $N_g = 3$ を実現できる。さらに、 K 上に $F_{mn} = 0, A_m \neq 0$ であるような background field を仮定すれば K 上の non-contractible loop γ に対して Wilson loop $U(\gamma) = P \exp(i \int_\gamma A_m(y) dy^m) \neq 1$ が得られる。このような manifold K への compactification により破れずに残る gauge group G は Wilson loop $U(\gamma)$ を用いて

$$G = \{g \mid [U(\gamma), g] = 0 \quad \forall \gamma\}$$

として与えられることは容易に確かめられる [7]。このような考察により、可能な gauge group とその breaking のパターンの分類が行われている [8]。そこで得られた結果で、まず特徴的なことは $SU(5)$ や $SO(10)$ のような通常の GUT が許されないことである。これは、massless chiral superfields の中に gauge group G の adjoint 表現が存在しないことに由来している。さらに、 G として rank が 5 と 6 の可能性があること、rank 6 の場合には scalar potential に flat direction が存在するようなときに 10^{11} GeV より大きな energy 領域に intermediate scale M_I が存在することなどが分かっている。

(b) Kähler potential \mathcal{G} と gauge kinetic function $f_{\alpha\beta}$

4 次元の effective theory を特徴づける \mathcal{G} と $f_{\alpha\beta}$ は super Yang-Mills の結合した 10 次元の $N = 1$

supergravity を $M_4 \times K$ へコンパクト化させることにより求めることができる [9]。10次元の supergravity の Lagrangian の boson 部分は

$$\mathcal{L}_{10} = -\frac{1}{2}R^{(10)} - \frac{9}{16}\left(\frac{\partial_M \phi}{\phi}\right)^2 - \frac{3}{4}\phi^{-\frac{3}{4}}F_{MN}F^{MN} - \frac{3}{4}\phi^{-\frac{3}{2}}H_{MNP}H^{MNP} \quad (6)$$

と書ける。ここで簡単のため $h^{1,1} = 1$, $h^{2,1} = 0$ の場合を考えることにして、4次元への compactification を考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{1}{2}R^{(4)} - 3\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{9}{16}\left(\frac{\partial_\mu \phi}{\phi}\right)^2 \\ & - \frac{1}{4}\phi^{-\frac{3}{4}}e^{3\sigma}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - 3e^{-\sigma}\phi^{-\frac{3}{4}}|D_\mu C|^2 - \frac{8}{3}e^{-5\sigma}\phi^{-\frac{3}{4}}\left|\frac{\partial W}{\partial C}\right|^2 + (\text{D-term}) \\ & - \frac{3}{2}e^{-2\sigma}\phi^{-\frac{3}{2}}(\partial_\mu a + \dots)^2 - \frac{9}{2}e^{-6\sigma}\phi^{\frac{3}{2}}(\partial_\mu D)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

という結果が得られる。ここで $g_{mn} = e^\sigma \delta_{mn}$, $B_{mn} = a\epsilon_{mn}$, $H_{\mu\nu\rho} = e^{-6\sigma}\phi^{-\frac{3}{2}}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\sigma D$ とおいた。

$$S \equiv e^{3\sigma}\phi^{-\frac{3}{4}} + 3i\sqrt{2}D, \quad T \equiv e^\sigma\phi^{-\frac{3}{4}} - i\sqrt{2}a + |C|^2 \quad (8)$$

で S と T を定義し、これを用いて truncation の結果得られた \mathcal{L}_4 から \mathcal{G} , $f_{\alpha\beta}$ を読みとれば

$$\mathcal{G} = -\ln(S + S^*) - 3\ln(T + T^* - 2|C|^2) - \ln|W|^2 \quad (9)$$

$$W = 8\sqrt{2}gd_{ijk}C^i C^j C^k \quad (10)$$

$$f_{\alpha\beta} = S\delta_{\alpha\beta} \quad (11)$$

となることがわかる。この結果は単純な truncation に基づいて得られたものであり、string の高次効果などを取り込むことにより改善する必要がある。この例で superpotential W の中の Yukawa coupling constant d_{ijk} は superstring から決められるべきものである。実際、 K が complete intersection Calabi-Yau manifold (CICY mfd) の場合、cohomology group $H^{2,1}$ の要素である $\psi_k(y)$ や $A_{mj}(y)$ 等は $H^1(T)$ の要素 A_i^a に対応づけられ、一方、 $H^1(T)$ の要素は K 上の多項式 $q_i(z)$ として表現されることが知られている。このことを使えば

$$\begin{aligned} d_{ijk} &= \int d^6y \sqrt{g^{(6)}} \psi^\dagger(y) \gamma^m A_{mj}(y) \psi_k(y) = \int \omega \wedge A_i^a \wedge A_j^b \wedge A_k^c \epsilon_{abc} \\ &= \int q_i(z) q_j(z) q_k(z) \end{aligned} \quad (12)$$

と書き換えることができ、結局 d_{ijk} は manifold K 上の多項式の重なり積分という形で計算できることがわかる [10]。もちろん gauge invariant で、かつ K 上の discrete symmetry に関して不変である項の d_{ijk} のみが零でない値を持つ可能性を持っている。これまでに 3 または 4 generation を持つ CICY mfd はいくつか知られている。具体的には 3 generation manifold としては K_0 として $CP^3 \times CP^3$ 上の (3,0) 次、(0,3) 次、(1,1) 次の 3 つの多項式の零点として定義される manifold をとり、 $D = Z_3$ として構成したもの、あるいは K_0 として $CP^3 \times CP^2$ 上の (3,0) 次、(1,3) 次の 2 つの多項式の零点として定義される manifold を選び、 $D = Z_3 \times Z_3$ にとったものなどが知られている [11]。また、4 generation manifold としては K_0 として CP^4 上の 5 次の多項式の零点

で定義される $Y(4;5)$ をとり、 $D = Z_5 \times Z_5$ としたものの、あるいは CP^7 上の 4 つの 2 次の多項式の零点として定義される $Y(7;2,2,2,2)$ を適当な非可換 discrete group で割ったものなどが知られている。これらの例のいくつかにおいては、上に述べた方法により実際に $dijk$ の値が計算されている [12]。

(2) 他の構成法

Calabi-Yau compactification の場合のように場の理論的極限をとることなく、4 次元の superstring を直接構成する方法は orbifold compactification, fermionic construction, Gepner construction 等、複数知られている。これらの方法においては、 K に対応する自由度が $N = 1$ space-time supersymmetry の存在を保証し、modular invariant かつ spin-statistics を満足するような形に構成される。以下において極く簡単にそれらの方法について述べ、各々において得られている代表的 3 generation model を紹介することにしよう。

・ orbifold construction [3]

orbifold construction では heterotic string [13] の M_4 以外の部分を

$$K_L = T_L^6 \otimes T_L^{16}, \quad K_R = T_R^6 \quad (13)$$

のように torus にコンパクト化し、それを point group と呼ばれる discrete group P で

$$\mathcal{O}_S = T_R^6/P \otimes T_L^6/P \otimes T_L^{16}/G = T_{R+L}^6/P \otimes T_L^{16}/G = R_{R+L}^6/S \otimes T_L^{16}/G \quad (14)$$

のように割って得られる orbifold と呼ばれる conical singularity を持つ空間として構成する。ここで G は point group P を $E_8 \times E_8$ に埋め込んだものである。また、 $\theta \in P$ とすると $s \in S$ と $g \in G$ は各々 $s = (\theta, V^i)$ ($i = 1 \sim 6$) と $g = (\Theta, V^I)$ ($I = 1 \sim 16$) の形に書け、これらは string 変数 X^M に

$$(sX)^i = (\theta X)^i + V^i, \quad (gX)^I = (\Theta X)^I + V^I \quad (15)$$

のように作用する。 \mathcal{O}_S 上では

$$X^i(\sigma = 2\pi) = (sX(\sigma = 0))^i, \quad X^I(\sigma = 2\pi) = (gX(\sigma = 0))^I \quad (16)$$

なる境界条件が満たされることになる。このような条件の下で得られた string spectrum に GSO projection を施すことにより、physical modes が決定される。orbifold construction により構成された 3 generation model の典型例の一つとして、 Z_3 orbifold から構成された $[SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y] \times [SO(10)']$ のように gauge group の構造が standard model のそれに完全に一致しているものもある [14]。

orbifold は stringy な計算を直接行える点でたいへん興味深い例となっている。実際、Kähler potential \mathcal{G} や gauge kinetic function $f_{\alpha\beta}$ の tree level の計算結果が知られている。例えば、 Z_N あるいは $Z_M \times Z_N$ orbifold の場合は、

$$K_{\text{tree}} = -\ln(S + S^*) - \sum_{i=1}^3 \ln(T_i + T_i^*) + \sum_{\alpha} C_{\alpha} C_{\alpha}^* \prod_{i=1}^3 (T_i + T_i^*)^{n_{\alpha}} \quad (17)$$

$$W_{\text{tree}} = \lambda_{\alpha\beta\gamma}(T_i) C_{\alpha} C_{\beta} C_{\gamma} \quad (18)$$

$$f_{\text{tree}} = S \quad (19)$$

である [15][16]。ここで K_{tree} については C_α に関して最低次までの結果である。特に moduli T_i ($i = 1 \sim 3$) が 1 つの場合、すなわち $T_1 = T_2 = T_3 = T$ のときは

$$K_{\text{tree}} = -\ln(S + S^*) - 3\ln(T + T^*) + \sum_\alpha C_\alpha C_\alpha^* (T + T^*)^{n_\alpha} \quad (20)$$

となる。Yukawa coupling $\lambda_{\alpha\beta\gamma}(T)$ については、 C_α がすべて twisted sector に属する場合には $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ は T への依存性を持つが、それ以外の場合は $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ は T に依存せず定数となることが知られており、実際に $\lambda_{\alpha\beta\gamma}(T)$ の計算がなされている。また $K_{1\text{-loop}}$ や $f_{1\text{-loop}}$ なども計算されている [17]。

・ fermionic construction

fermionic construction では heterotic string において M_4 以外の部分を

$$K_R = (\text{free fermions}; x^i, y^i, \omega^i) \quad (i = 1 \sim 6) \quad K_L = (\text{free fermions}; f^k) \quad (k = 1 \sim 44) \quad (21)$$

のように free fermion で構成する。その上で適当な boundary condition をこの free fermion $(x^i, y^i, \omega^i; f^k)$ の組に課し、得られた spectrum に GSO projection を施すことで physical states が引き出される。この方法で構成された 3 generation model でたいへん興味深い特徴を持つものに gauge group として $SU(5) \times U(1) \times [U(1)]^3$ をもつ flipped $SU(5)$ model と呼ばれる model がある [18]。これは $SU(3)$ と $SU(2)$ が simple group に埋め込まれるという通常の意味での GUT model になっている superstring の枠組みで構成されたただ一つの例である。普通の $SU(5)$ model とは $5^* + 10$ への field の埋め込みが異なっており、adjoint 表現の chiral superfield 無しでうまく gauge group の standard model への破れを実現できる。

・ Gepner construction [5]

この構成法では M_4 以外の自由度が

$$K = \otimes_i (N = 2 \text{ minimal superconformal field theory})_i \quad (22)$$

という形で構成される。tensor 積をとる各々の $N = 2$ minimal superconformal field theory の level を k_i とすると conformal anomaly が相殺するために満たされるべき条件は

$$C = \sum_i \frac{3k_i}{k_i + 2} = 9 \quad (23)$$

と書ける。この方法により構成された 3 generation model には $1 \cdot 16^3$ model が、4 generation model としては 3^5 model と呼ばれるものがある。これらは CICY model 中の $CP^3 \times CP^2$ および CP^4 model に対応することが知られている。こうして構成された model においては Yukawa coupling が厳密に計算でき、実際、上に述べた model ではその計算が実行されている [19]。

3. Target space duality invariant effective theory

前節で、string の tree level で \mathcal{G} や $f_{\alpha\beta}$ がどのように書き下されるかを見た。string の loop effect や非摂動効果を \mathcal{G} や $f_{\alpha\beta}$ の中に取り込んでその形を決めることは low energy 領域の物理を決定する上で極めて重要な問題である。その際 string を特徴づける何らかの symmetry を利用できるならば、それらの決定のためにはたいへん効果的であると考えられる。このような

symmetry の候補として target space duality と呼ばれる symmetry が最近注目されている [20]。string の massless modes の中には moduli と呼ばれる string の真空を特徴づける scalar field M_i が存在する。moduli field の kinetic term は target space の構造を決める moduli space の metric M_{ij} を使って $M_{ij}\partial_\mu M_i\partial_\mu M_j$ と書ける。また、moduli field は string の摂動論的真空が無限に縮退しているということに対応して string の摂動の範囲では potential を持たない。moduli field に対して target space duality 変換と呼ばれる discrete automorphism $\Gamma : M_i \rightarrow F(M_i)$ を考える。例えば、toroidal compactification の場合、コンパクト化した torus の半径を R とすれば、 $R \rightarrow 1/R$ が Γ に対応している。

4次元 superstring において摂動論の各次数で target space duality 変換のもと spectrum や interaction が不変であることが知られており [21]、非摂動的効果に対しても不変に保たれるのではないかという可能性に期待が持たれている。もし、このことを仮定するならば、superstring の effective field theory はこの変換のもとで不変な理論となっていなければならないはずである。この要請は、 \mathcal{G} , $f_{\alpha\beta}$ の形やその moduli への依存性を厳しく制限することになると予想される。簡単のため overall modulus $T = R^2 + i\eta$ の場合を考えてみる。abelian $Z_N, Z_M \times Z_N$ orbifold がこの例となる。この場合の duality symmetry Γ は $T \rightarrow 1/T, T \rightarrow T + i$ によって生成される $SL(2, Z)$ に対応し、modulus T は

$$T \rightarrow \frac{aT - ib}{icT + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}, \quad ad - bc = 1 \quad (24)$$

と変換するが、理論がこの変換で不変であるという要請は、同時に matter field にも特定の変換性を要求することになる [15]。

$$\phi \rightarrow (icT + d)^n \phi \quad (25)$$

この symmetry の要請が \mathcal{G} や $f_{\alpha\beta}$ の決定にどのように効くのかを modulus field がただ一つの簡単な例の場合に具体的みてみることにする。orbifold compactification のところで簡単に触れたように、Kähler potential は

$$K(T, T^*) = -3 \ln(T + T^*) \quad (26)$$

と書ける。 $\Gamma = SL(2, Z)$ に対して K は

$$K \rightarrow K' + f(T) + f^*(T^*) \quad (27)$$

なる変換をうける。ここで $f(T) = \ln(icT + d)^3$ である。非摂動効果により superpotential $W(T)$ が生じたとすると \mathcal{G} の Γ に対する不変性から $W(T)$ の形は厳しく制限される。実際

$$\mathcal{G}(T, T^*) = K(T, T^*) + \ln |W(T)|^2 \quad (28)$$

に duality invariance を要求すれば、 $W(T)$ は

$$W(T) \rightarrow e^{-f(T)} W(T) = (icT + d)^{-3} W(T) \quad (29)$$

のように変換すること、つまり modular weight -3 の modular form でなければならないことがわかる。これから、 $W(T)$ は Dedekind 関数 $\eta(T)$ と modular 不変な任意関数 $H(T)$ を用いて

$$W(T) = \frac{H(T)}{\eta(T)^6} \quad (30)$$

と書けることになる [22]。さらに duality 不変な S を導入するならば、任意関数 $\Omega(S)$ を用いて

$$K(S, S^*; T, T^*) = -\ln(S + S^*) - 3\ln(T + T^*) \quad (31)$$

$$W(S, T) = \frac{\Omega(S)H(T)}{\eta(T)^6} \quad (32)$$

となる。

以下ではここで得た結果をふまえた上で duality 不変性と関連した物理的側面として、 $f_{\alpha\beta}$ に対する threshold effect、hidden sector における gaugino condensation とそれに基づく supersymmetry breaking、strong CP problem などについて簡単にみてることにする。

(1) gauge coupling constant への threshold effect

string theory においては $SU(5)$, $SO(10)$ のような unification group が存在するかどうかに関わらず gauge coupling constant が統一される scale M_{string} が存在する。この scale は $M_{\text{string}} = 0.7 \times g_{\text{string}} \times 10^{18} \text{GeV}$ と評価されている。 M_{string} での boundary condition

$$g_3^2 k_3 = g_2^2 k_2 = g_1^2 k_1 = \frac{4\pi}{\alpha'} G_{\text{Newton}} \quad (33)$$

を使って one-loop running coupling constant は

$$\frac{1}{g_a(\mu)^2} = \frac{1}{g_{\text{string}}^2} + \frac{b_a}{16\pi^2} \ln \frac{M_{\text{string}}^2}{\mu^2} + \Delta_a \quad (34)$$

となる [23]。ここで k_a は Kac-Moody level であり、 $b_a = -3C(G_a) + \sum_j T(R_j)$ 、 Δ_a は string threshold correction を表す。

ところで最近の LEP の精密実験からの data は、minimal supersymmetric standard model の枠組みに基づく計算では g_3 , g_2 , g_1 が $\sim 10^{16} \text{GeV}$ で一致することを示しており、 M_{string} での gauge coupling の統一を要求する superstring においてはこれをどう理解するべきなのかが問題になる。superstring からの説明の可能性としては、one-loop running coupling の表式中の k_a , b_a , Δ_a を利用することが考えられる。すなわち、

(i) intermediate mass scale $M_X \sim 10^{16} \text{GeV}$ が存在する可能性。これは、higher Kac-Moody level $k_a > 1$ を必要とする。

(ii) additional massless field が存在する可能性。これは b_a を変えることに対応する。

(iii) 大きな threshold effect Δ_a がある可能性。

ここでは (iii) の可能性を考えることにする。string theory では無限個の massive modes が threshold effect に寄与するが、この扱いには target space duality 不変性の利用が非常に有効である。duality 不変な one-loop correction は

$$\Delta_a(T, T^*) = \frac{b'_a}{16\pi^2} \ln [T_R |\eta(T)|^4] \quad (35)$$

と書けることが確かめられている [24]。ここに $b'_a = 3C(G_a) - \sum_j T(R_j)(3 + 2n_j)$ で n_j は matter fields の modular weight であり、 j はあらゆる massless field を走るとする。この結果を用いると

$$\sin^2 \theta_W(\mu) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \frac{\alpha_e(\mu)}{4\pi} [A \ln \left(\frac{M_{\text{string}}^2}{\mu^2} \right) - A' \ln (T_R |\eta(T)|^4)] \quad (36)$$

$$\frac{1}{\alpha_S(\mu)} = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left[\frac{1}{\alpha_e(\mu)} - \frac{1}{4\pi} B \ln \left(\frac{M_{\text{string}}^2}{\mu^2} \right) - \frac{1}{4\pi} B' \ln (T_R |\eta(\mu)|^4) \right] \quad (37)$$

が得られる。ただし、 $A \equiv \frac{k_2}{k_1}b_1 - b_2$, $B \equiv b_1 + b_2 - \frac{k_1+k_2}{k_3}b_3$ であり、 A' , B' は A , B において b_a を b'_a で置き換えたものである。この結果を使うと minimal supersymmetric standard model に基づき M_{string} から coupling constant を走らせた結果 $\sin^2 \theta_W(M_W) = 0.218$, $\alpha_S(M_W) = 0.20$ が LEP での実験値 $\sin^2 \theta_W(M_W) = 0.233 \pm 0.0008$, $\alpha_S(M_W) = 0.115 \pm 0.007$ と誤差の範囲で consistent になるような threshold correction の存在の可能性について調べることができる。これに関する 1 つの解として $R^2 \sim 16$, $n_Q = n_D = -1$, $n_L = n_E = -3$, $n_H = n_{\bar{H}} = -5$ が見つけられている [25]。ただし、この解は、 Z_N orbifold では実現されず、 $T_i \neq T_j$, $k_a > 1$ のような場合を考える必要がある。以上の例は、string threshold correction を考慮するならば gauge coupling constant の統一に関して superstring においても LEP での data を一応矛盾無く解釈できる可能性が存在することを示唆している。

(2) supersymmetry breaking

supersymmetry breaking の問題は low energy 領域に於ける effective theory の構成において本質的な問題であり、かつ string の非摂動効果抜きには扱えない問題である。supersymmetry breaking の起源として、現在最も有望と考えられているものは hidden sector における gaugino condensation である [26]。effective theory の立場からは、gaugino condensation の結果もたらされると期待される superpotential W を string の非摂動効果が正しく取り込まれた形としていかに書き下すかということが問題となる。この問題に対して target space duality 不変性を利用しようという最近の試み [5] を以下に紹介しよう。

従来 gaugino condensation の結果生じる effective superpotential は effective Lagrangian を用いた方法などにより、hidden sector H の one-loop β -関数の係数を b_H として

$$W(S) \propto e^{\frac{3S}{2b_H}} \quad (38)$$

と書けると考えられていた。この superpotential には target space duality 不変性から要請されるような moduli 依存性はなく、modular weight -3 の modular form にもなっていない。この superpotential を使って得られる scalar potential の解析から、一般にこのような potential は有限の $Re S$ の値に対して安定な最小を持たず、さらに $Re T$ については potential は flat となり、 $Re T$ の値が決まらないという困った結果を与えることが知られていた [28]。これらの困難を逃れるには、 W に T 依存性の存在などが必要となる [29]。duality 不変性の要請は、 W に T 依存性をもたらすと同時に、その入り方をも制御する点で非常に興味深い。以下では moduli field が一つの場合に話を制限することにする。ここで、理論に duality 不変性を課すと gaugino condensation から生ずる superpotential および gauge kinetic function として

$$W(S, T) = \langle e^{-\frac{K}{2}} \lambda_a \lambda_a \rangle = (S + S^*) \frac{e^{16\pi^2 \frac{3S}{2b_H}}}{\eta(T)^6} \quad (39)$$

$$f_H = S - \frac{b_H}{16\pi^2} \ln[T_R \eta(T)^4] \quad (40)$$

が得られる。これらを用いて計算される scalar potential は

$$V = \frac{1}{S_R T_R^3 |\eta(T)|^{12}} [|S_R \Omega_S - \Omega|^2 + 3|\Omega|^2 \left(\frac{T_R^2}{4\pi^2} |\hat{G}_2|^2 - 1 \right)] \quad (41)$$

となる。ここで $S_R = 2Re S$, $T_R = 2Re T$, $\Omega_S = \frac{\partial \Omega}{\partial S}$ であり、 \hat{G}_2 は modular weight 2 の Einstein 関数である。この scalar potential は以下のような一般的な性質を持つ [30]。

・ $T_R \rightarrow \infty (T_R \rightarrow 0)$ の時、 $T_R |\eta(\mu)|^4$ は指数的に零に近づくこと、および $\hat{G}_2 \rightarrow 0$ であることから、 $V \rightarrow \infty$ となり、 V は seaf-dual な T_R で最小となる。この結果は、gaugino condensation により compactification が引き起こされるという非常に興味深いことを意味している。

・ supersymmetry は自発的に破れ、gravitino mass として $m_{3/2} = \frac{|\Omega|}{S^{1/2} T_R^{3/2} |\eta|^6}$ が生じる。この表式から明らかなように、 Ω が supersymmetry breaking の大きさを決定するが duality からは Ω に関する情報を引き出すことはできない。さらに S が有限の値を取るためには gaugino condensation 以外に他の効果の存在が必要であることが知られている [28]。例えば、 $\Omega = c + he^{\alpha S}$ のように定数 c の寄与が何らかの原因で生じた場合、 V の最小条件 $S_R \Omega_S - \Omega = 0$ は c が小さいときには $S \sim 1$ を解として持ち得る。また、複数の gaugino condensations が Ω に寄与する場合も $S \sim 1$ を解として与え得るという指摘もされている [26]。

・ V は $Im T$ に関して周期的になっており、 V の最小は $Im T$ が整数値の時に実現される。この結果として、soft supersymmetry breaking は実数の形で現れる。

・ このような V は一般に負の cosmological constant をもたらす。ただし、 $W = \frac{\Omega(S)H(T)}{\eta(T)^6}$ において $H(T)$ が特別の形に選ばれるならば cosmological constant が零になることもありえる。

以上のように duality 不変な effective theory は supersymmetry breaking に関連して物理的にたいへん興味深い性質を持つことがわかる。ここで考えたのは moduli field がただ 1 つで、matter field も無視するという極めて単純化された系についてであった。moduli field が複数存在する場合、matter field を考慮した場合等を調べることは実際の superstring の effective field theory を構成する上で必要となる問題である。

最後に soft supersymmetry breaking term について触れておこう。hidden sector における supersymmetry breaking は重力の効果で observable sector に gaugino mass M_a 、scalar mass $m_{\phi_i}^2$ 、scalar の 3 点結合 A_j 等の soft breaking term という形で現れる。 $\mathcal{G}_j^i = \delta_j^i$ 、 $f_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ が満足される minimal kinetic term model の場合、これらの soft breaking term は gravitino mass $m_{3/2}$ を用いて universal に書き表せる [6]。ところが、ここで取り上げてきた superstring の effective theory においては minimal kinetic term の条件は一般に満足されず、この universality に関する事情は大きく異なってくる。実際、gaugino mass は $h_S = \mathcal{G}_S \cdot e^{\frac{g}{2}}$ 、 $h_T = \mathcal{G}_T \cdot e^{\frac{g}{2}}$ を用いて

$$M_a = f_S \mathcal{G}_S^{-1} \cdot h_S + f_T \mathcal{G}_T^{-1} \cdot h_T = k_a M_0(S, T) + b'_a M'(S, T) \quad (42)$$

と書ける。 $SU(3) \times S(2) \times U(1)$ の場合、この表式を使って計算を実行すると $\gamma \equiv \frac{B'}{A'}$ を用いて M_{string} での gaugino mass に

$$M_1 \left(\frac{3}{5} \gamma - 1 \right) - M_2 (\gamma + 1) + \frac{8}{3} M_3 = 0 \quad (43)$$

という制限が得られる [27]。これは、minimal kinetic term の場合とは異なり、一般に gaugino mass は universal ではないことを示している。また、scalar mass についても

$$m_{\phi_j}^2 = m_{3/2}^2 + V_0 + n_j m_0^2(S, T) \quad (44)$$

と書けることが指摘されており、universality は破れている。soft breaking term における universality の破れは FCNC への新たな寄与を生み出し、現象論からの制限を考慮する必要が出てくる点は注意を要する。

(3)strong CP problem

target space duality は Kähler 変換

$$K \rightarrow K' = K + F(T) + F^*(T^*) \quad (45)$$

$$W \rightarrow e^{-F(T)}W, \quad F(T) = (icT + d)^3 \quad (46)$$

を引き起こすことは前にみた。この変換のもとでの理論の不変性の要求は matter fermion に

$$\chi_i \rightarrow \left(\frac{icT + d}{(icT + d)^*}\right)^{3(1+\frac{2}{3}n_i)/4} \chi_i \quad (47)$$

なる $U(1)$ 回転をもたらす [30]。この $U(1)$ は QCD anomaly をもつと期待されるがその場合 $U(1)_{PQ}$ の役割を果たし得るのであろうか。 N_i を color singlet chiral superfield g_j, \bar{g}_k を colored chiral superfield とし

$$W = \lambda_{ijk}(T)N_i g_j \bar{g}_k \quad (48)$$

が superpotential に含まれるような場合を考える。 $\lambda_{ijk}(T)$ の modular weight は $-3 - n_i - n_j - n_k$ である。 strong CP の破れは $\bar{\theta} = \theta + T(R) \arg \det M$ により記述される。ここで M は colored fermion の mass matrix である。 W からの $\bar{\theta}$ への寄与は

$$\theta_i^W = \frac{1}{2}T(R) \ln \det \left(\frac{\lambda_{ijk}(T)N_i}{\lambda_{ijk}^*(T^*)N_i^*} \right) \quad (49)$$

であり、Kähler $U(1)$ 回転は容易に確かめられるようにこれに対して

$$\theta_i^W \rightarrow \theta_i^W + \frac{1}{2}T(R)(-3 - n_j - n_k) \ln \left(\frac{icT + d}{(icT + d)^*} \right) \quad (50)$$

なる変換をもたらす [31]。このことは、この Kähler $U(1)$ が $U(1)_{PQ}$ としての役割を果たす可能性を示唆している。string の非摂動効果に依っても破れない可能性のある symmetry が上でみたように $U(1)_{PQ}$ として使えるという可能性は superstring における strong CP problem にとってはたいへん好ましいことであろう。ただし、この機構にもいくつか現象論的な問題点があることには注意を要する [32]。

4. Phenomenology

superstring は M_{pl} scale の理論であるがその名残が low energy 領域において superstring に特徴的現象として現れるならば、それは極めて重要かつ興味深いことである。これに関して、これまでに様々な研究が行われてきてはいるが理論的に string に特徴的といえるものが見つかったとは言いがたい。以下に代表的現象を列挙しよう。

(1) proton decay [8]

一般に superstring の massless modes の中には extra color triplet field が存在する。これらが十分大きな質量を持たないならば proton の寿命は短くなりすぎることになる。特に Calabi-Yau compactification の場合には massless field は E_6 に関して $|h^{2,1} - h^{1,1}|$ [27] という形で現れるため、必ず extra color triplet がこの中に含まれることになり、これから生ずる proton の不安定性の問題は深刻である。この困難を逃れる可能性は

- ・ proton decay に関与する extra color triplet を含む Yukawa coupling constant が零となっている。

- ・ intermediate scale $M_I \gtrsim 10^{16}$ GeV が存在し、extra color triplet がこの scale で massive になる。

等が考えられ、そのような条件を満足する model の存在も実際に指摘されている [33]。一方、orbifold や fermionic construction ではこれらの可能性の他、extra color triplet の無いような model も存在し得る。

(2) neutrino mass[8]

supersymmetric model に一般的なことであるが、superstring の massless mode の中でも neutral fermion が複数存在している。これらは、多くの場合 string の効果によりもたらされる nonrenormalizable term 等を通じて複雑に mixing を引き起こしていると考えられる。neutrino mass はこれらを対角化することにより評価する必要がある。seesaw 的な機構が働き、小さな neutrino mass が生み出される可能性もあり、興味深い問題である。

(3) extra gauge interaction の存在

多くの場合 superstring model は extra gauge interaction を含んでいる。特に extra $U(1)$ を含む model は多く、その現象論については多くの解析がなされてきた [34]。複数の $U(1)$ が存在する場合、これらの kinetic term に mixing が起こることが指摘されており [35]、繰り込み群による解析ではこれら効果を考慮する必要がある。

(4) extra matter field の存在

superstring の massless mode には standard model には含まれない extra matter field が多くの場合存在する。これらの存在は proton decay や neutrino mass、running coupling constant の unification 等の問題に関係してくる。superpartner の存在は supersymmetry breaking の結果もたらされる soft breaking term の構造次第では FCNC から厳しい制限を受ける可能性がある。

(5) fractionally charged states

string の twisted state の電荷は一般に fractional になり得ることが指摘されている [36]。例えば Calabi-Yau compactification では proton の安定性を要求すれば、必ず fractional charge が存在することが示されている [37]。しかし、Calabi-Yau の場合 twisted state はすべて M_{pl} の mass を持つため現象論的困難はない。一方、orbifold や fermionic construction のような free field を用いて構成された superstring においては twisted state に massless state が存在し、その結果、一般に massless fractionally charged state が存在し得る。これは、このような構成法による model に厳しい制限を与えることになると考えられる。

(6) composition dependent attractive force

moduli field の matter との coupling は、composition dependent attractive force をもたらし得る。このような力の発見は superstring と関係したものとなるかも知れない。

上に掲げたものはいずれも model に大きく依存している。model の詳細に依らない string に特徴的な low energy 領域における現象が予言されればたいへんおもしろいのであろうが、現在までのところそのような予言は残念ながら存在しない。

5. Summary

近年の精力的研究に依って superstring から得られる model の現象論的側面について少なから

ず、興味深いことが明らかにされてきた。しかしながら、string の理論の全容がまだ明らかにされていないという状況、とりわけ非摂動的取扱いが解明されていない現状では、無限に縮退した真空の中から真の真空を選び出すことができず、model を特定することができない点を含めて superstring の low energy 領域の研究は厳しい状況にあるといえる。このような状況下で superstring の現象論的側面の解明へ向けた一つの試みとして、low energy 領域における現象論的情報と string の持つ symmetry を頼りに string の非摂動効果をも取り込んだような effective field theory を作り、その性質を調べようというのが、現在用いられている方法論であると言って良いであろう。現在の superstring の理論の進展具合からみて当面これは適当な方向であるといえるように思える。いずれにしても supersymmetry が自然界において本当に実現されているのであれば、現時点においても "Superstring Phenomenology" という形での研究には重要な意味があるものと思われる。

参考文献

- [1] M.Green, J.H.Schwarz and E.Witten, String Theory (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987) .
- [2] P.Candelas, G.T.Horowitz, A.Strominger and E.Witten, Nucl. Phys. B258(1985)55.
- [3] L.Dixon, J.A.Harvey, C.Vafa and E.Witten, Nucl. Phys. B261(1985)687, Nucl. Phys. B274(1986)285.
- [4] H.Kawai, P.C.Lewellen and S.H.H.Tye, Nucl. Phys. B288(1987)1; I.Antoniadis, C.Bachas and C.Kounnas, Nucl. Phys. B289(1987)87.
- [5] D.Gepner, Phys. Lett. 199B(1987)380; Nucl. Phys. B296(1988)757.
- [6] H.-P.Nilles, Phys. Reports 110(1984)1.
- [7] E.Witten, Nucl. Phys. B258(1985)75.
- [8] S.Cecotti, J.P.Derendinger, S.Ferrara, L.Gerardello and M.Roncadelli, Phys. Lett. 156B(1985)318; J.D.Breit, B.A.Ovrut and G.C.Segrè, Phys. Lett. 158B(1985)33; M.Dine, V.Kaplunovsky, M.Mangano, C.Nappi and N. Seiberg, Nucl. Phys. B259(1985)549; T.Matsuoka and D.Suematsu, Nucl. Phys. B274(1986)106, Prog. Theor. Phys. 76(1986)886.
- [9] E.Witten, Phys. Lett. 155B(1985)151; J.P.Derendinger, L.E.Ibáñez and H.P.Nilles, Nucl. Phys. B267(1986)365; C.P.Burgess, A.Font and F.Quevedo, Nucl. Phys. B272(1986)611.
- [10] A.Strominger, Phys. Rev. Lett. 55(1985)2547; A.Strominger and E.Witten, Commun. Math. Phys. 101(1986)341.
- [11] B.Greene, K.H.Kirklín, P.J.Miron and G.G.Ross, Nucl. Phys. B278(1986)667.

- [12] S.Kalara and R.N.Mohapatra, Phys. Rev. D35(1987)3134; M.Matsuda, T.Matsuoka, H.Mino, D.Suematsu and Y.Yamada, Prog. Theor. Phys. 79(1988)17.
- [13] D.J.Gross, J.A.Harvey, E.Martinec and R.Rohm, Phys. Rev. Lett. 54(1985)502; Nucl. Phys. B256(1985)253; Nucl. Phys. B267(1987)75.
- [14] L.E.Ibáñez, H.P.Nilles and F.Quevedo, Phys. Lett. 187B(1987)25; L.E.Ibáñez, J.Mas, H.P.Nilles and F.Quevedo, Nucl. Phys. B301(1988)157; A.Font, L.E.Ibáñez, F.Quevedo and A.Sierra, Nucl. Phys. B331(1990)471.
- [15] S.Ferrara, D.Lüst, A.Shapere and S.Theisen, Phys. Lett. B225(1989)363; S.Ferrara, N.Magnoli, T.R.Taylor and G.Veneziano, Phys. Lett. B245(1990)409.
- [16] L.J.Dixon, V.S.Kaplunovsky and J.Lous, Nucl. Phys. B329(1990)27.
- [17] D.Lüst and C.Muñoz, Phys. Lett. B278(1992)272.
- [18] I.Antoniadis, J.Ellis, J.S.Hagelin and D.V.Nanopoulos, Phys. Lett. 194B(1987)231; I.Antoniadis, J.Ellis, J.S.Hagelin and D.V.Nanopoulos, Phys. Lett. 205B(1988)459; I.Antoniadis, J.Ellis, J.S.Hagelin and D.V.Nanopoulos, Phys. Lett. 208B(1988)209.
- [19] J.Distler and B.Greene, Nucl. Phys. B309(1988)191; D.Suematsu, Phys. Rev. D38(1988)3128; A.Kato and Y.Kitazawa, Nucl. Phys. B319(1989)474.
- [20] K.Kikkawa and M.Yamasaki, Phys. Lett. B149(1984)268; N.Sakai and I.Senda, Prog. Theor. Phys. 75(1986)692.
- [21] E.Álvarez and M.A.R.Osorio, Phys. Rev. D40(1989)1150.
- [22] M.Cvetič, A.Font, L.E.Ibáñez, D.Lüst and F.Quevedo, Nucl.Phys.B361(1991)194.
- [23] V.S.Kaplunovsky, Nucl. Phys. B307(1988)145.
- [24] J.-P.Derendinger, S.Ferrara, C.Kounnas and F.Zwirner, Phys. Lett. B271(1991)307; B.Carlos J.A.Casas and C.Muñoz, Phys. Lett. B263(1991)248.
- [25] L.E.Ibáñez, D.Lüst and G.G.Ross, Phys. Lett. B272(1991)251.
- [26] H.-P.Nilles, MPI-PAE/PTh 5/90 and references therein.
- [27] L.E.Ibáñez, CERN-TH.6342/91 and references therein.
- [28] J.-P.Derendinger, L.Ibáñez and H.-P.Nilles, Phys. Lett. 155B(1985)65; M.Dine, R.Rohm, N.Seiberg and E.Witten, Phys. Lett. 156B(1985)55.
- [29] G.G.Ross, Phys.Lett.211B(1988)315; D.Suematsu, Mod. Phys. Lett. A5(1990)1901.
- [30] A. Font, L. E. Ibáñez, D. Lüst and F. Quevedo, Phys. Lett. B245(1990)401.

- [31] L. E. Ibáñez and D. Lüst, Phys. Lett. B267(1991)51.
- [32] D.Suematsu, Prog.Theor.Phys. 88(1992)751.
- [33] C.A.Lütkin and G.G.Ross, Phys. Lett. B214(1988)357; P.Zoglin, Phys. Lett. B228(1988)47; C.Hattori, M.Matsuda, T.Matsuoka and H.Mino, Prog. Theor. Phys. 82(1989)599;
- [34] 例えば T.Matsuoka, H.Mino, D.Suematsu and S.Watanabe, Prog. Theor. Phys. 76(1986)915.
- [35] T.Matsuoka and D.Suematsu, Prog.Theor.Phys. 76(1986)901.
- [36] X.-G.Wen and E.Witten, Nucl. Phys. B261(1985)651; G.G.Athanasin, J.J.Atick, M.Dine and W.Fischler, Phys. Lett. 214B(1988)55.
- [37] T.Nakahara and D.Suematsu, Prog. Theor. Phys. 82(1989)1002.