

Sur les ensembles ramifiés

メタデータ	言語: English 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: Hiraguchi, Toshio, 平口, 俊夫 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24517/00011411

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



Sur les ensembles ramifiés (I).

Toshio HIRAGUCHI

Institut Mathématique, Faculté des Sciences, Université de Kanazawa

(Reçu 30 June 1963)

Dans cette note et dans celle qui suivras je me propose de réviser et d'augmenter ma dernière note "Sur les ensembles ramifiés" (Sci. Rep. Kanazawa Univ. Vol. VIII, No.1, 1962) qui a besoin de beaucoup de correction.

1. Généralité

Soit E un ensemble ordonné et e un élément quelconque de E . On désigne par

$$S(e;E), R(e;E)$$

l'ensemble

$$\{x | x \in E, x < e\}, \{x | x \in E, x \geq e\}$$

respectivement; l'ensemble $S(e;E)$ s'appelle *segment* de E déterminé par l'élément e .

Un ensemble ordonné E est appelé ensemble *ramifié*, si tous les segments de E sont bien ordonnés. Il est clair qu' une partie d'un ensemble ramifié est aussi un ensemble ramifié.

Soient E un ensemble ramifié et e un élément de E . On dit que l'élément e a le *rang* α dans E ou e est un élément de rang α dans E , si le type d'ordre de segment $S(e;E)$ est un ordinal α . L'ensemble de tous les éléments de rang α dans E s'appelle *section de rang* α de E et se note E_α .

(1.1) Pour tout élément $x_\alpha \in E_\alpha$, il existe une et une seule partie bien ordonnée $\{x_\varphi | \varphi \leq \alpha\}$ telle que

$$x_0 < x_1 < \dots < x_\varphi < \dots < x_\alpha; x_\varphi \in E_\varphi.$$

(1.2) Si $x_\alpha \in E_\alpha$, $x_\beta \in E$ et $\alpha < \beta$, alors $x_\alpha < x_\beta$ ou bien x_α et x_β ne sont pas comparables dans E .

(1.3) Si $E = \mathbb{Q}$ pour un ordinal α , alors $E = \mathbb{Q}$ pour tout ordinal $\varphi \geq \alpha$.

Il en suit que s'il existe un ordinal φ tel que $E_\varphi = \emptyset$, il existe un ordinal ρ tel que $E_\rho = \emptyset$ tandis que $E_\varphi \neq \emptyset$ pour tout ordinal $\varphi < \rho$. L'ordinal ρ de cette sorte est appelé le *rang* de E et E est appelé de rang ρ .

2. Noyau d'un ensemble ramifié.

Soit E un ensemble ramifié de rang ρ . On dit qu'un élément x est de la *première catégorie dans E par rapport à un ordinal φ* , s'il est incomparable à tout élément de rang $\varphi < \rho$. On note $C_1(\varphi; E)$ l'ensemble de tous les éléments de la première catégorie par rapport à φ .

(2.1) Si $x \in C_1(\alpha; E)$, alors le rang de x est plus petit que α .

En effet, supposons au contraire que le rang de x soit $\geq \alpha$, alors il existe, d'après (1.1), un élément $x_\alpha \in E_\alpha$ tel que $x_\alpha \leq x$. Donc on a $x \notin C_1(\alpha; E)$, contrairement à l'hypothèse.

(2.2) $C_1(0; E) = \emptyset$.

(2.3) Si $\alpha < \beta$, alors $C_1(\alpha; E) \subseteq C_1(\beta; E)$.

En effet, supposons au contraire qu'il existe un élément x tel que $x \in C_1(\alpha; E)$ et $x \notin C_1(\beta; E)$. Alors le rang de x est $< \alpha$ d'après (2.1) et il existe un élément $x_\beta \in E_\beta$ tel que $x < x_\beta$. Donc il existe, d'après (1.1), un $x_\alpha \in E_\alpha$ tel que $x < x_\alpha < x_\beta$, contrairement à $x \in C_1(\alpha; E)$.

On dit qu'un élément x est de la *seconde catégorie dans E par rapport à un ordinal $\varphi < \rho$* , s'il existe au moins un élément de rang φ comparable à x . On note $C_2(\varphi; E)$ l'ensemble de tous les éléments de la seconde catégorie dans E par rapport à φ .

(2.4) Si le rang de x est α , alors x est de la seconde catégorie par rapport à tout ordinal $\varphi \leq \alpha$.

Cela résulte aussitôt de la définition et de (1.1).

(2.5) $x \in C_1(\alpha; E)$ entraîne $S(x; E) \subseteq C_2(\alpha; E)$.

En effet, soit β le rang de x . Dans le cas où $\beta < \alpha$: il existe un $a_\alpha \in E_\alpha$ tel que $x < a_\alpha$. D'autre part, $y \in S(x; E)$ entraîne $y < x$ d'où $y < a_\alpha$. On a donc $y \in C_2(\alpha; E)$. Dans le cas où $\beta \geq \alpha$: il existe un $a_\alpha \in E_\alpha$ tel que $a_\alpha \in S(x; E)$. Or $S(x; E)$ étant bien ordonné, tout élément de $S(x; E)$ est comparable à a_α . Donc on a $S(x; E) \subseteq C_2(\alpha; E)$.

(2.6) Si $\alpha < \beta < \rho$, alors on a

$$E_\alpha = [E_\alpha \cap C_1(\beta; E)] \cup [E_\alpha \cap C_2(\beta; E)],$$

$$[E_\alpha \cap C_1(\beta; E)] \cap [E_\alpha \cap C_2(\beta; E)] = \emptyset.$$

(2.7) Quels que soient les ordinaux $\alpha < \rho$ et $\beta < \rho$, $E_\alpha \cap C_2(\beta; E) \neq \emptyset$.

En effet, lorsque $\beta \leq \alpha$ cela évident puisque tout élément de E_α est, d'après

(2.4), de la seconde catégorie par rapport à β . Lorsque $\alpha < \beta$, pour chaque $a_\beta \in E_\beta$ il existe un $a_\alpha \in E_\alpha$ tel que $a_\alpha < a_\beta$, d'où $a_\alpha \in C_2(\beta; E)$, ce qui achève la démonstration.

$$(2.8) \quad \text{Si } \alpha < \beta < \gamma < \rho, \text{ on a } [E_\alpha \cap C_2(\beta; E)] \supseteq [E_\alpha \cap C_2(\gamma; E)].$$

En effet, pour un élément quelconque x_α de $E_\alpha \cap C_2(\beta; E)$ il existe un $a_\gamma \in E_\gamma$ tel que $x_\alpha < a_\gamma$. Donc il existe, d'après (1.1), un $a_\beta \in E_\beta$ tel que $x_\alpha < x_\beta < a_\gamma$, d'où $x_\alpha \in E_\alpha \cap C_2(\beta; E)$.

(2.9) *Quel que soient les ordinaux α et β tels que $\alpha < \beta < \rho$, on a*

$$\bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha] = \bigcap_{\beta < \varphi < \rho} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha].$$

En effet, pour tout $\varphi \leq \beta$ et pour tout $\psi > \beta$ on a d'après (2.8)

$$E_\alpha \cap C_2(\varphi; E) \supseteq C_2(\psi; E) \cap E_\alpha,$$

d'où

$$\begin{aligned} & \bigcap_{\alpha < \varphi \leq \beta} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha] \\ & \supseteq \bigcap_{\beta < \psi < \rho} [C_2(\psi; E) \cap E_\alpha]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha] \\ & = [\bigcap_{\alpha < \varphi \leq \beta} (C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha)] \cap [\bigcap_{\beta < \psi < \rho} (C_2(\psi; E) \cap E_\alpha)] \\ & = \bigcap_{\beta < \psi < \rho} [C_2(\psi; E) \cap E_\alpha]. \end{aligned}$$

On dit qu'un élément x de E est de la *seconde catégorie dans E* s'il est de la seconde catégorie par rapport à tout ordinal $\varphi < \rho$. L'ensemble de tous les éléments de la seconde catégorie dans E s'appelle *noyau* de E et se note E^* . En vertu de la définition il est clair que

$$E^* = \bigcap_{0 \leq \varphi < \rho} C_2(\varphi; E).$$

$$(2.10) \quad x \in E^* \text{ entraîne } S(x; E) \subset E^*.$$

Cela résulte aussitôt de (2.5).

$$(2.11) \quad \text{Pour tout élément } x \in E^*, S(x; E^*) = S(x; E).$$

En effet, il est clair que $S(x; E^*) \subseteq S(x; E)$. D'autre part on a d'après (2.10) $S(x; E) \subset E^*$, d'où $S(x; E) \subseteq S(x; E^*)$. Par suite on a $S(x; E^*) = S(x; E)$.

(2.12) *Si le rang d'un élément x dans E^* est α , le rang de x dans E est aussi α .*

Cela résulte aussitôt de (2.11).

Désignons par E_α^* la section de rang α de E^* . D'après (2.12) on a $E_\alpha^* = E_\alpha \cap E^*$.

(2.13) *Quel que soit l'ordinal $\alpha < \rho$, on a*

$$\begin{aligned} E_\alpha^* &= \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha] \\ &= E_\alpha - \bigcup_{\alpha < \varphi < \rho} C_1(\varphi; E). \end{aligned}$$

En effet, on a d'après (2.9)

$$\begin{aligned} E^*_\alpha &= E_\alpha \cap E^* \\ &= \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha] \\ &= \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha]. \end{aligned}$$

En considérant la complémentaire de $\bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha]$ relativement à E_α on a d'après (2.6)

$$\begin{aligned} E_\alpha^* &= E_\alpha - \bigcup_{\alpha < \varphi < \rho} [E_\alpha - C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha] \\ &= E_\alpha - \bigcup_{\alpha < \varphi < \rho} [C_1(\varphi; E) \cap E_\alpha]. \end{aligned}$$

3. Une autre expression de E^* .

Soit E un ensemble ramifié de rang ρ . Désignons par

$$S(E_\alpha; E), \quad R(E_\alpha; E)$$

la réunion

$$\bigcup_{x \in E_\alpha} S(x; E), \quad \bigcup_{x \in E_\alpha} R(x; E)$$

respectivement.

(3.1) Si $\alpha < \beta < \gamma < \rho$, alors on a

$$\begin{aligned} E_\alpha \cap S(E_\beta; E) &\supseteq E_\alpha \cap S(E_\gamma; E), \\ E_\gamma \cap R(E_\alpha; E) &= E_\gamma \cap R(E_\beta; E). \end{aligned}$$

En effet, soit, a_α un élément quelconque de $E_\alpha \cap S(E_\gamma; E)$; il existe alors un $a_\gamma \in E_\gamma$ tel que $a_\alpha < a_\gamma$. Donc il existe un $a_\beta \in E_\beta$ tel que $a_\alpha < a_\beta < a_\gamma$, d'où $a_\alpha \in S(a_\beta; E)$, ce qui démontre la première inclusion.

Soit maintenant a_γ un élément quelconque de $E_\gamma \cap R(E_\alpha; E)$; alors $a_\alpha < a_\gamma$ pour un $a_\alpha \in E_\alpha$ et il existe un $a_\beta \in E_\beta$ tel que $a_\alpha < a_\beta < a_\gamma$, d'où $a_\gamma \in E_\gamma \cap R(E_\beta; E)$. Soit au contraire b_γ un élément quelconque de $E_\gamma \cap R(E_\beta; E)$; alors $b_\beta < b_\gamma$ pour un $b_\beta \in E_\beta$ et il existe un $b_\alpha \in E_\alpha$ tel que $b_\alpha < b_\beta < b_\gamma$, d'où $b_\gamma \in E_\gamma \cap R(E_\alpha; E)$. Par suite on a la dernière égalité.

(3.2) Si $\alpha < \beta < \rho$, alors on a

$$S(E_\alpha; E) \cup R(E_\alpha; E) \supseteq S(E_\beta; E) \cup R(E_\beta; E).$$

En effet, soit x un élément quelconque de $S(E_\beta; E) \cup R(E_\beta; E)$ et soit r le rang de x . Alors $x \in S(E_\beta; E)$ ou $x \in R(E_\beta; E)$. Dans le cas où $x \in S(E_\beta; E)$: puisque $x < a_\beta$ pour un $a_\beta \in E_\beta$, il existe un $a_\alpha \in E_\alpha$ tel que $x < a_\alpha < a_\beta$ ou $a_\alpha \leq x < a_\beta$ selon que $r < \alpha$ ou $\alpha \leq r < \beta$. On a donc $x \in S(E_\alpha; E)$ ou $x \in R(E_\alpha; E)$, d'où $x \in S(E_\alpha; E) \cup R(E_\alpha; E)$. Dans le cas où $x \in R(E_\beta; E)$: $a_\beta < x$ pour un $a_\beta \in E_\beta$. Or $a_\alpha < a_\beta$ pour un $a_\alpha \in E_\alpha$, d'où $a_\alpha < x$. Par suite $x \in R(E_\alpha; E)$, a fortiori $x \in S(E_\alpha; E) \cup R(E_\alpha; E)$.

Posons maintenant

$$E^\circ = \bigcap_{0 \leq \varphi < \rho} [S(E_\varphi; E) \cup R(E_\varphi; E)].$$

(3.3) *Quel que soit l'ordinal $\alpha < \rho$,*

$$E^\circ = \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [S(E_\varphi; E) \cup R(E_\varphi; E)].$$

Cela résulte aussitôt de (3.2)

(3.4) $E_\alpha \cap E^\circ = \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [S(E_\varphi; E) \cap E_\alpha]$ pour tout $\alpha < \rho$.

En effet, on a d'après (3.3)

$$E_\alpha \cap E^\circ = [\bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} (E_\alpha \cap S(E_\varphi; E))] \cup [\bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} (E_\alpha \cap R(E_\varphi; E))].$$

Or pour tout $\varphi > \alpha$ on a $E_\alpha \cap R(E_\varphi; E) = \emptyset$, d'où l'égalité.

(3.5) $E^\circ = E^*$.

En effet, « $x_\alpha \in E_\alpha \cap E^\circ$ » est équivalent à « $x_\alpha \in S(E_\varphi; E) \cap E_\alpha$ pour tout $\varphi > \alpha$ » ou, ce qui revient au même, à « pour tout $\varphi > \alpha$, il existe un $a_\varphi \in E_\varphi$ tel que $x_\alpha < a_\varphi$ ». Cela est équivalent à « $x_\alpha \in C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha$ pour tout $\varphi > \alpha$ », c'est-à-dire à « $x_\alpha \in \bigcap_{\alpha < \varphi < \rho} [C_2(\varphi; E) \cap E_\alpha]$ ». Donc on a $E_\alpha \cap E^\circ = E_\alpha \cap E^*$ pour tout $\alpha < \rho$, d'où $E^\circ = E^*$.

4. Le rang de E^*

Le rang du noyau E^* d'un ensemble ramifié E de rang ρ n'est pas nécessairement égal à ρ . Dans ce qui suit on recherche à quelle condition il est égal à ρ .

On Dit qu'un élément $x \in E$ est de la première catégorie par rapport à φ pour la première fois, si x est de la première catégorie par rapport à φ tandis qu'il n'est pas de la première catégorie par rapport à tout $\psi < \varphi$. On désigne par $P_\varphi(E)$ l'ensemble de tous les éléments de la première catégorie par rapport à φ pour la première fois.

$$(4.1) \quad P_\varphi(E) = C_1(\varphi; E) - \bigcup_{\psi < \varphi} C_1(\psi; E).$$

$$(4.2) \quad C_1(\alpha; E) = \bigcup_{\varphi \leq \alpha} P_\varphi(E).$$

Celles-là résultent aussitôt de la définition de $P_\varphi(E)$ et de (2.3).

Posons maintenant

$$E_{\alpha\varphi} = E_\alpha \cap P_\varphi(E).$$

Autrement dit, $E_{\alpha\varphi}$ est l'ensemble de tous les éléments de rang α qui sont de la première catégorie par rapport à φ pour la première fois.

(4.3) *Pour tout $\varphi \leq \alpha$, $E_{\alpha\varphi} = \emptyset$.*

En effet, puisque $P_\varphi(E) \subseteq C_1(\varphi; E)$, le rang de $x \in P_\varphi(E)$ est, d'après (2.1), plus petit que α . On a donc $E_\alpha \cap P_\varphi(E) = \emptyset$ pour $\varphi \leq \alpha$.

(4.4) *Si $\alpha < \beta < \rho$, alors on a $E_\alpha \cap C_1(\beta; E) = \bigcup_{\alpha < \varphi \leq \beta} E_{\alpha\varphi}$.*

En effet, on a d'après (4.2) et (4.3)

$$\begin{aligned} E_\alpha \cap C_1(\beta; E) &= \bigcup_{\varphi \leq \beta} [E_\alpha \cap P_\varphi(E)] \\ &= \bigcup_{\varphi \leq \beta} E_{\alpha\varphi} \\ &= \bigcup_{\alpha < \varphi \leq \beta} E_{\alpha\varphi}. \end{aligned}$$

(4.5) *Quel que soit l'ordinal $\alpha < \rho$, $E^* = E_\alpha - \bigcup_{\alpha < \varphi < \rho} E_{\alpha\varphi}$.*

En effet, d'après (2.13) et (4.4) on a

$$\begin{aligned} E^* &= E_\alpha - \bigcup_{\alpha < \varphi < \rho} [E_\alpha \cap C_1(\varphi; E)] \\ &= E_\alpha - \bigcup_{\alpha < \varphi < \rho} [\bigcup_{\alpha < \psi \leq \varphi} E_{\alpha\psi}] \\ &= E_\alpha - \bigcup_{\alpha < \varphi < \rho} E_{\alpha\varphi}. \end{aligned}$$

(4.6) *S'il existe un ordinal $\beta < \alpha$ tel que $E_{\alpha\varphi} = \emptyset$ pour tout $\varphi > \beta$, alors $E^*_\alpha \neq \emptyset$.*

En effet, supposons au contraire que $E^*_\alpha = \emptyset$. D'après (4.5) et (4.4) on a

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \bigcup_{\alpha < \varphi < \rho} E_{\alpha\varphi} \\ &= \bigcup_{\alpha < \varphi \leq \beta} E_{\alpha\varphi} \\ &= E_\alpha \cap C_1(\beta; E). \end{aligned}$$

En vertu de (2.6) on a donc $E_\alpha \cap C_2(\beta; E) = \emptyset$, contrairement à (2.7).

On peut en déduire le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit E un ensemble ramifié de rang ρ . S'il existe, pour tout ordinal $\alpha < \rho$, un ordinal $\beta(\alpha) > \alpha$ tel que $E_{\alpha\varphi} = \emptyset$ pour tout $\varphi > \beta(\alpha)$, alors le rang du noyau E^* de E est ρ .*

5. Ensembles ramifiés et réguliers.

Dans ce qui suit nous considérons une classe d'ensembles ramifiés particuliers.

On dit qu'un ensemble ramifié E est *régulier*, s'il possède les deux propriétés suivantes:

(I) *Le rang ρ de E est un ordinal initial régulier; par suite ρ n'est pas limite d'une suite transfinie d'ordinaux $< \rho$ dont le type d'ordre est plus petit que ρ et $\alpha + \xi = \rho$ entraîne $\xi = \rho$.*

(II) *Quel que soit l'ordinal $\alpha < \rho$, le cardinal de la section de E de rang α est plus petit que le cardinal de ρ : $\text{card.}(E_\alpha) < \text{card.}(\rho)$.*

Soit E un ensemble ramifié et régulier de rang ρ .

(5.1) *Quel que soit l'ordinal $\alpha < \rho$, il existe un ordinal $\beta(\alpha) > \alpha$ tel que $E_{\alpha\varphi} = \emptyset$ pour tout $\varphi > \beta(\alpha)$.*

Démonstration. Supposons que le contraire soit vrai. Alors pour tout ordinal $r > \alpha$ l'ensemble $M_r = \{\varphi \mid r < \varphi < \rho, E_{\alpha\varphi} \neq \emptyset\}$ ne serait pas vide et on peut définir par l'induction transfinie une suite transfinie croissante $\{\delta(\varphi)\}_{\alpha < \varphi < \rho}$ tel que $E_{\alpha\delta(\varphi)} \neq \emptyset$ comme il suit. Comme $\delta(\alpha+1)$ choisissons le plus petit ordinal de $M_{\alpha+1} = \{\varphi \mid \alpha+1 < \varphi < \rho, E_{\alpha\varphi} \neq \emptyset\}$. Supposons que pour tout ordinal φ tel que $\alpha < \varphi < \beta$ un ordinal

$\delta(\varphi)$ tel que $E_{\alpha\delta(\varphi)} \neq \emptyset$ soit déterminé. Dans le cas où β est un ordinal isolé choisissons comme $\delta(\beta)$ le plus petit ordinal de $M_{\beta-1}$. Dans le cas où β est un ordinal limite posons

$$\lambda = \lim_{\alpha < \varphi < \beta} \delta(\varphi).$$

Tout $\delta(\varphi)$ étant $< \rho$ et ρ étant régulier, $\lambda < \rho$. On peut donc choisir comme $\delta(\beta)$ le plus petit ordinal de M_λ . Ainsi nous avons une suite transfinie demandée. ρ étant un ordinal initial, le type d'ordre de la suite $\{\delta(\varphi)\}_{\alpha < \varphi < \rho}$ est ρ . On a donc

$$\text{card.} (\cup_{\alpha < \varphi < \rho} (E_{\alpha\delta(\varphi)})) \geq \text{card.} (\rho),$$

puisque tous les $E_{\alpha\delta(\varphi)}$ sont disjoints deux à deux et $E_{\alpha\delta(\varphi)} \neq \emptyset$ pour tout φ . D'autre par on a d'après (4.5)

$$\begin{aligned} \text{card.} (E_\alpha) &= \text{card.} (E_\alpha^* \cup (\cup_{\alpha < \varphi < \rho} E_{\alpha\varphi})) \\ &\geq \text{card.} (\cup_{\alpha < \varphi < \rho} E_{\alpha\delta(\varphi)}), \end{aligned}$$

d'où

$$\text{card.} (E_\alpha) \geq \text{card.} (\rho),$$

contrairement à la propriété (II); ce qui achève la démonstration.

Théorème 2. Soit E un ensemble ramifié de rang ρ qui est régulier. Alors le rang du noyau E^* de E est ρ et il existe, pour tout $\alpha < \rho$, un ordinal $\beta(\alpha)$ tel que

$$E^*_\alpha = E_\alpha - \cup_{\alpha < \varphi < \beta(\alpha)} E_{\alpha\varphi}.$$

En outre on a

$$(E^*)^* = E^*;$$

autrement dit, les éléments de E^* sont tous de seconde catégorie dans E^* .

Démonstration. La première partie de l'assertion se résulte aussitôt de (5.1), du théorème 1 et de (4.5). Pour démontrer la dernière partie supposons au contraire qu'il existe un élément x de E^* qui n'est pas de la seconde catégorie dans E^* . Alors il existe un ordinal $\alpha < \rho$ tel que $x \in C_1(\alpha; E^*)$, c'est-à-dire tel que x est de la première catégorie dans E^* par rapport à α . D'après (5.1) il existe un $\beta(\alpha) > \alpha$ tel que $E_{\alpha\varphi} = \emptyset$ pour tout $\varphi > \beta(\alpha)$. D'autre part, x étant un élément de E^* il est de la seconde catégorie dans E . Donc il existe un ordinal $\gamma > \beta(\alpha)$ et un élément $x_\gamma \in E_\gamma$ tels que $x < x_\gamma$. Donc il existe un $x_\alpha \in E_\alpha$ tel que $x < x_\alpha < x_\gamma$. Ce qui démontre que x_α est de la seconde catégorie dans E par rapport à γ , c'est-à-dire $x_\alpha \notin C_1(\gamma; E)$. Or d'après (4.4) on a,

$$\begin{aligned} E_\alpha \cap C_1(\gamma; E) &= \cup_{\alpha < \varphi \leq \gamma} E_{\alpha\varphi} \\ &= \cup_{\alpha < \varphi \leq \beta(\alpha)} E_{\alpha\varphi} \\ &= E_\alpha - E^*_\alpha. \end{aligned}$$

On a donc $x_\alpha \notin E_\alpha - E^*_\alpha$, d'où $x_\alpha \in E^*_\alpha$, contrairement à $x \in C_1(\alpha; E^*)$; ce qui démontre le théorème.

«A suivre»