

# Nonlinear Vibrations of Stepped Beams

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: Sato, Hidenori メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://doi.org/10.24517/00011712">https://doi.org/10.24517/00011712</a>

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



# 段付はりの非線形振動

佐藤 秀紀\*

## Nonlinear Vibrations of Stepped Beams

by

Hidenori SATO

### Abstract

Nonlinear Vibration is investigated about the beams whose cross sections vary in steps in the longitudinal direction, using the transfer matrix method. The means of analysis are proposed for both free and forced vibrations of those beams. As a numerical example, the first mode free vibrations of the clamped beams with two symmetric steps are analysed. The effects of the shape of the beams on the nonlinearity of vibration are discussed in detail. It is shown that the use of the linear mode function results in considerable overestimation of the nonlinearity for the beams of certain type. An experiment to verify the calculated results is made by the use of two-stepped beam of phosphor bronze. The experimental results show good agreement with those obtained by the calculation.

### 1. 緒 言

はりの非線形振動に関しては従来より多くの研究がなされているが、そのほとんどが一様断面はりについてであり、変断面はりについての報告例は少い。前報<sup>1)</sup>では変断面はりの一つとして段付はりをとりあげ、線形モード関数を用いた自由振動解析を示したが、本報では、同じく段付はりについて伝達マトリックスを用いた一般的解法を示し、自由振動および強制振動による非線形応答を数値計算および一部実験により求める。

伝達マトリックス法<sup>2)</sup>は、はり構造系の静的・動的問題の解析法としてよく用いられる手法であるが線形系に適用している場合がほとんどである。本報では、これを段付はりの大たわみ非線形振動に応用するわけであるが、伝達マトリックス法の特長から、本報の手法を一般的なはり構造系へ拡張することは容易であると思われる。また、この伝達マトリックスによる手法は振動モードを逐次近似により、より正確に求めることができるので、これまでのはり・板などの非線形振動解析において振動モードに線形モード関数を使用するガレルキン法による結果とも比較し、その差異について検討する。

はりの非線形性は、境界の軸方向移動拘束による軸力の変化に基づくもののみを考慮する。また、

\* 機械工学科

非線形系の強制振動では主共振以外に高調波共振や分数調波共振などが起る場合があるが、本報では共振振幅の大きい主共振のみを解析の対象とする。

## 2. 伝達マトリックスによるはりの非線形振動解析

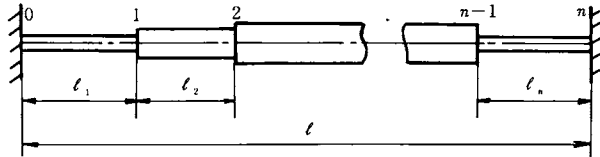


図1 両端の軸方向移動を拘束された段付はり

図1のような階段状に断面が変化する段付はりを考える。座標  $x$  を段の要素ごとに軸方向にとり、 $i$  番目 ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) のはり要素について、回転慣性、せん断力による変形の影響を無視した、軸力が働くはりの横振動の運動方程式を求めると次式のように表わされる。

$$E_i I_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} - N \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + \rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $w$ : はりのたわみ、 $E$ : 縦弾性係数、 $I$ : 断面二次モーメント、 $\rho$ : 密度、 $A$ : 断面積、 $N$ : 引張軸力、 $t$ : 時間であり、添字  $i$  は  $i$  要素の諸量であることを示す。軸力  $N$  は境界ではりの軸方向移動が拘束されているため、はりのたわみによって軸が伸びる結果生ずるものであり、はり全長を  $l$  とし次式のように平均値で表わすものとする。

$$N = N_0 + k \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \int_0^{l_i} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 dx_i, \quad \frac{1}{k} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E_i A_i} \quad (2)$$

ここに、 $N_0$  は初期軸力であり、 $k$  は軸方向平均剛さを意味する。

なお、 $A_i/I_i$  が大となる場合、段付部の断面積の変化が極端になると、その部分での応力の不均一性が軸力に影響を及ぼすことが考えられるが、ここではこのような極端な場合は除き、次元はり理論の範囲内で考察するものとする。

振動は角振動数  $\omega$  の基本調波のみを考慮するものとする、式(1)の解は次式で与えられる。

$$W_i(x_i, t) = W_i(x_i) \cos \omega t \quad (3)$$

ここで次式の無次元量を導入する。

$$\xi_i = \frac{x_i}{l_i}, \quad \tau_i = \frac{l_i \bar{N}}{E_i I_i}, \quad \beta^4 = \frac{\rho_i A_i l_i}{E_i I_i} \omega^2 \quad (4)$$

ここに

$$\bar{N} = N_0 + \frac{3}{2} k \sum_{i=1}^n \frac{1}{2 l_i} \int_0^1 \left( \frac{dW_i}{d\xi_i} \right)^2 d\xi_i \quad (5)$$

式(3)を式(1)に代入して、基本調波について調和バランス法を適用すると、 $W_i$  に関して次式を得る。

$$\frac{d^4 W_i}{d\xi_i^4} - \tau_i \frac{d^2 W_i}{d\xi_i^2} - \beta_i^4 W_i = 0 \quad (6)$$

式(5)における  $\bar{N}$  が定まっているとすると、式(6)の解は次式で与えられる。

$$W_i = C_{i1} \cosh \lambda_{i1} \xi_i + C_{i2} \sinh \lambda_{i1} \xi_i + C_{i3} \cos \lambda_{i2} \xi_i + C_{i4} \sin \lambda_{i2} \xi_i \quad (7)$$

ここに

$$\lambda_{i1}, \lambda_{i2} = \sqrt{\frac{1}{4} \tau_i^2 + \beta_i^4 \pm \frac{1}{2} \tau_i} \quad (8)$$

$C_{i1} \sim C_{i4}$  は未定定数である。

$\bar{N}$  の値を仮定すると式(8)を用いて通常の伝達マトリックス  $U_i$  をつくることができる。したがって、 $n$  個のはり要素からなる段付はり系を考え、その境界に 0 から  $n$  までの節点番号を図1のように付けると、両端での状態ベクトル  $z_0 = [-w_0, \varphi_0, M_0, V_0]$  ,  $z_n = [-w_n, \varphi_n, M_n, V_n]$  を各要素の伝達マトリックスの積  $U_T$  によって次式のように結び付けることができる。

$$z_n = U_T z_0 \quad (9)$$

ただし、状態ベクトルの要素は、 $w$ ：たわみ、 $\varphi$ ：傾き、 $M$ ：モーメント、 $V$ ：せん断力である。以下、これらのマトリックスを用いて自由振動の振動数および強制振動の応答を求める方法を示す。

まず、系の諸定数、初期軸力などが与えられたとして、自由振動の振動数を求める手続きを図2に示す。最初に、境界の未知状態量のうち、注目している一つの状態量  $Z_A$  (一般にはたわみあるいは傾きの振幅、ただし境界によってこれらが0である場合はモーメントあるいはせん断力の振幅) を与えてやり、それに対応する振動数を求めることになる。軸力  $N$  は最初0と仮定すればよい。以下、固有振動数を求め、残りの境界未知量を求めて振動形を計算し、それよりたわみによる軸力  $N$  を求めてその収束が得られるまでの計算を繰り返す。収束すれば、そのときの振動数をその振動形に対する自由振動の振動数とする。

次に外力の振幅を含む拡張された伝達マトリックス<sup>2)</sup> および状態ベクトルを用いることにより強制

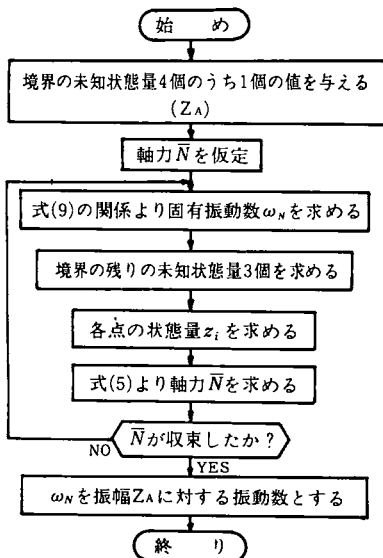


図2 自由振動の振動数の求め方

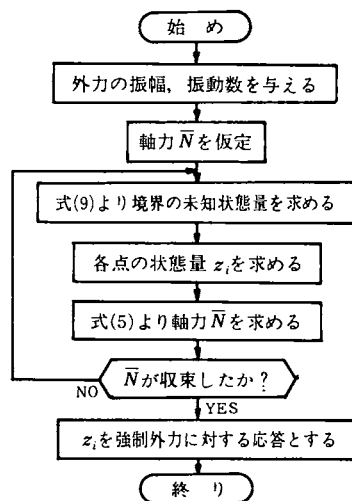


図3 強制振動応答の求め方

振動の応答を求める手続きを図3に示す。なお、分布外力が働く場合については、付録にマトリックスの導出と結果を示した。強制外力による応答を求める場合は、振動数  $\omega$  が与えられるわけであるから、軸力  $N$  を仮定すれば境界の未知状態量は決定され、以下同じく軸力が収束するまで繰り返しを行う。この結果、強制外力に対応する振動状態（状態ベクトル）が決定されることになる。

図2、図3において軸力  $N$  を収束させる方法としては単純な反復法を示したが、これが収束し難い場合は次のような方法が有効であった。すなわち、求める軸力の初期値を  $N$  とし、その値を用いて計算される軸力を  $N'$  とするとき、 $\Delta(N) = N - N'$  なる関数  $\Delta$  を考え、 $\Delta(N) = 0$  となる根  $N$  を探す方法である。

### 3. 線形モード関数を用いた自由振動解析

一様断面はりの非線形振動解析では簡便さのため、はりの振動形として線形系としてのモード関数を仮定してガレルキン法などで解くのが一般的である。以下では等価回転半径を導入し、段付はりの場合にこれらの手法の適用を試みる。

振動モードは1次に限定して考えるものとし、式(1)の解を通常の方法で求められる<sup>1)3)4)</sup>線形モード関数  $\phi_i(\xi_i)$  を用いて次式のように表わす。

$$w_i = \phi_i(\xi_i) \eta(t) \quad (10)$$

ただし、 $\phi_i(\xi_i)$  は注目している点（自由振動の振幅を与える点）では単位振幅をとるものとし、 $\eta(t)$  は時間関数である。

式(10)を式(1)に代入し、 $\phi_i(\xi_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  に関してガレルキン法を適用すると次式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \omega_L^2 (\eta + \gamma \eta^3) = 0 \quad (11)$$

ここに

$$\gamma = \frac{k}{2I^3} \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 \left( \frac{d\phi_i}{d\xi_i} \right)^2 d\xi_i \right]^2}{\omega_L^2 \sum_{i=1}^n \int_0^1 \rho_i A_i \phi_i^2 d\xi_i} \quad (12)$$

$\omega_L$  は線形固有角振動数である。

はりが均一材質からつくられているとすると、非線形特性を表す係数  $\gamma$  は次式で表すこともできる。

$$\gamma = \frac{K}{r_e^2} \quad (13)$$

ここに  $r_e$  は  $\lambda$  を1次モードの固有値とすると、次式を満足する等価回転半径である。

$$\omega_L^2 = \lambda^4 \frac{r_e^2 E}{I^4 \rho} \quad (14)$$

すなわち、段付はりの1次固有振動数と同じ振動数をもつ一様断面はりの回転半径に相当する。

また、

$$K = \frac{1}{2\lambda^4} \left( \frac{k}{k_s} \right) \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 \left( \frac{d\phi_i}{d\xi_i} \right)^2 d\xi_i \right]^2}{\frac{1}{A_s} \sum_{i=1}^n \int_0^1 A_i \phi_i^2 d\xi_i} \quad (15)$$

ここに、 $k_s = A_s E / l$  であり、 $A_s$  は基準とする断面積である。  
 式(11)の応答として振幅  $a$  の基本調波振動  $\eta = a \cos \omega t$  のみを考慮すると、線形モード関数を用いた自由振動の振動数  $\omega'_N$  は式(11)に調和バランス法を適用して次式となる。

$$\omega'_N = \omega_L \sqrt{1 + \frac{3}{4} K \left(\frac{a}{r_e}\right)^2} \tag{16}$$

すなわち、 $K$  は  $a/r_e$  を無次元振幅とすると、境界条件が同じであればはり形状のみによって定まる段付はりの非線形性の程度を表す無次元量である。両端固定一様断面はりの中央点の応答の場合を  $K_U$  で表すと、 $K_U = 0.0599$  である。

#### 4. 対称二段段付両端固定はりの非線形 1 次自由振動数

具体的な段付はりの例として図4のような対称二段段付両端固定長方形断面はりを考える。はりの幅  $b$  は一定とし、厚さ  $h$  は  $k_s$  を基準厚さとして  $h_1 < h_2$  では  $h_1 = h_s$ 、 $h_1 > h_2$  では  $h_2 = h_s$  とする。すなわち、薄い方の厚さを基準厚さとする。なお、初期軸力はなく、振動は1次モードのみを考察するものとする。また、以下では長方形断面のみを扱うので等価回転半径  $r_e$  のかわりに等価厚さ  $h_e (h_e = \sqrt{12} r_e)$  を用いることにする。

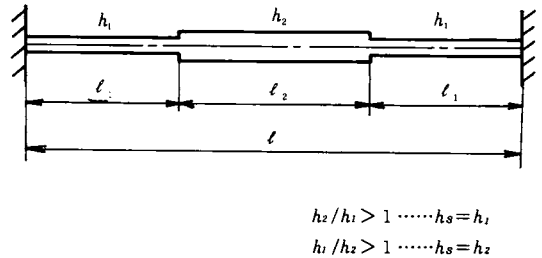


図4 対称二段段付幅一定長方形断面両端固定はり

図5は等価厚さ  $h_e$  の形状による違いを示したものであるが、また、基準厚さの一様断面はりを基準にとった、線形固有振動数の形状による違いを示したものとみることもできる。この図によると、等価厚さの形状による変化は  $h_1 > h_2$  において著しく、またその値も大きい。 $h_1 < h_2$  では  $l_2/l = 1$  付近を除けば厚さ比  $h_2/h_1$ 、長さ比  $l_2/l$  にはほとんど依らず一様断面はりの場合のはほぼ等しいことがわかる。

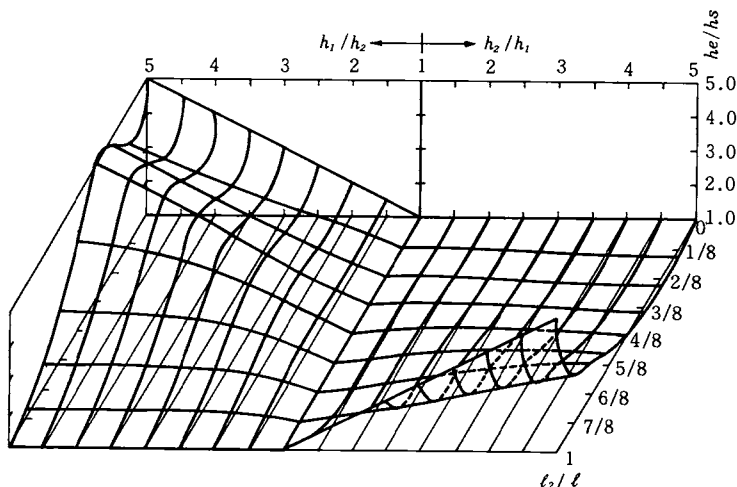
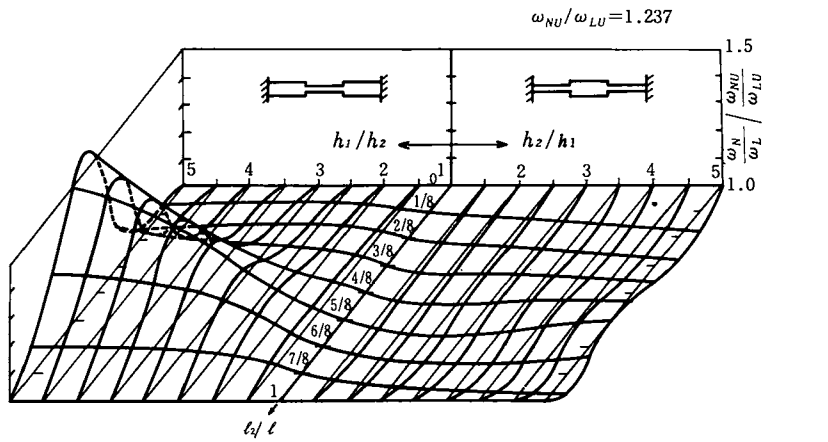


図5 等価厚さ（線形固有振動数比）



$\omega_N$ : 非線形振動数,  $\omega_L$ : 線形振動数,  $\omega_{NU}$ : 一様断面非線形振動数,  $\omega_{LU}$ : 一様断面線形振動数

図 6 自由振動の振動数に及ぼす、はり形状の影響 ( $a/h_e=1.0$ )

図 6 は、はり中央点の振幅  $a$  が  $h_e$  に等しいときの非線形系の振動数を、線形系および一様断面はりの場合の値を基準にとって無次元化して示したものである。したがって、等価厚さの振幅で振動するはりの非線形性の大きさが形状によってどのように異なるかを示したものとみることできる。これによると、 $h_1 < h_2$  すなわち、中央部が厚い場合は一般に一様断面はりの場合よりも非線形性はわずかに小さく、かつ厚さ比、長さ比による影響は少ない。一方、 $h_1 > h_2$  すなわち、中央部が薄い場合は  $h_1/h_2$  が大となるにしたがい  $l_2/l = 1/2$  付近で急激に非線形性が大となって、 $h_1 < h_2$  の場合とは対照的である。これらの特性が相対的な振幅の大小に依るのでないことは図 5 と図 6 のパターンが必ずしも一致していないことから明らかである。振動モードを調べてみると図 7 から明らかのように、 $l_2/l = 1/2$  では、他の場合と比べて中央部の薄い要素がその長さの割に大きく変形していることがわかる。このことから、このような形状では軸方向伸びが大となって非線形性を高める結果になるものと思われる。

図 8 には、この非線形性の顕著に現われる  $l_2/l = 1/2$  の場合について、無次元振幅  $a/h_e$  による振動数の変化を線形系の値との比で示した。この図よりみても  $h_1 < h_2$  では非線形特性は厚さ比によらず

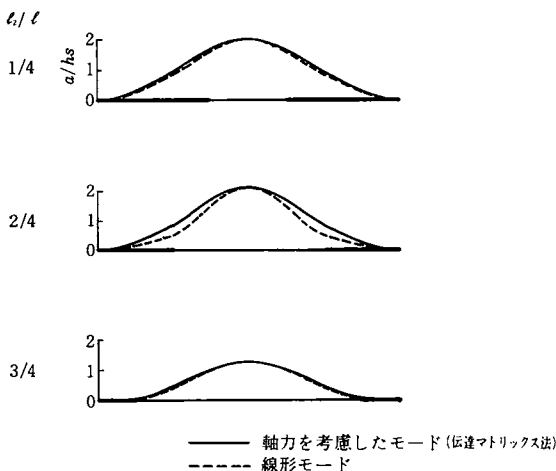


図 7 振動モードの形 ( $h_2/h_1=1/3$ ,  $a/h_e=1.0$ )

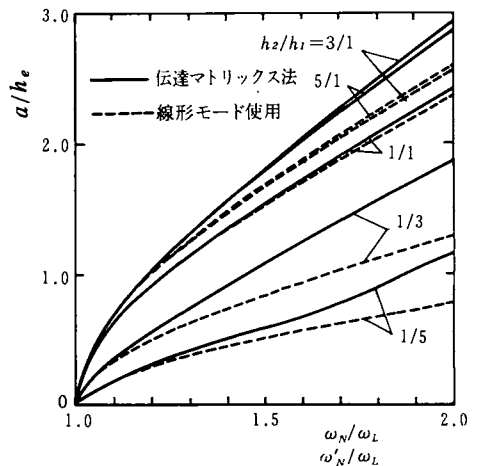


図 8 振幅による振動数の変化 ( $l_2/l = 1/2$ )

比較的近接した傾向を示すのに対し、 $h_1 > h_2$  では厚さ比によって特性は大きく異なり、その影響が大きいことがわかる。また、線形モード関数を用いた結果と比較すると式(16)より明らかのように、線形モード関数使用の場合、 $a/h_e$  が大となるときは数動数はほぼ  $a/h_e$  に比例することになるが、軸力を考慮した伝達マトリックスによる結果はそれより全般的に弱い非線形性となることわかる。

このことをさらに全般的に調べてみるために、線形モード関数を用いた場合の非線形性の程度を表す  $K$  の値を図9に、それらから計算した  $a/h_e=1.0$  における振動数  $\omega_N$  と伝達マトリックスを用いた振動数  $\omega_N$  との比を図10に示した。図9は定性的には図6とほぼ似ていることから、線形モード関数を用いても定性的な結果は得られると思われるが、図10をみると  $h_1 > h_2$  において  $l_2/l=1/2$  付近を中心として、厚さ比  $h_1/h_2$  が大となると両者の差異は大きくなり、線形モード関数を用いた解は実際の場合より振動数を高く与えることがわかる。いかえれば、このような形状では、線形モード関数を用いることは非線形性を過大評価することになるといえる。図6から明らかなように、このような形状は非線形性が本来大きく現われるところであり、図7の振動モード形においても両者は大きく

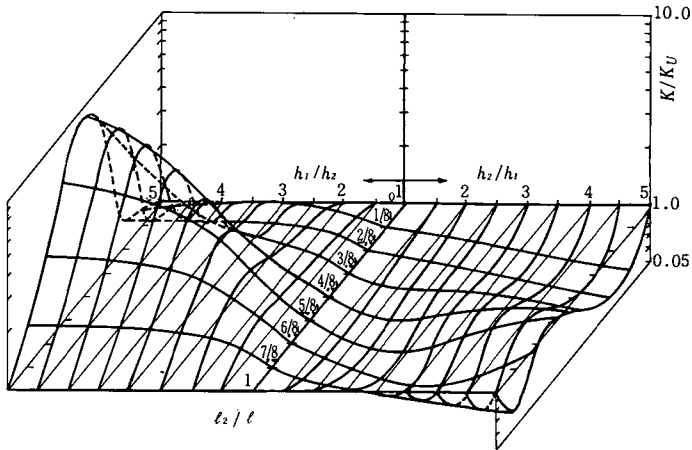


図9 非線形係数  $K$  のはり形状による違い

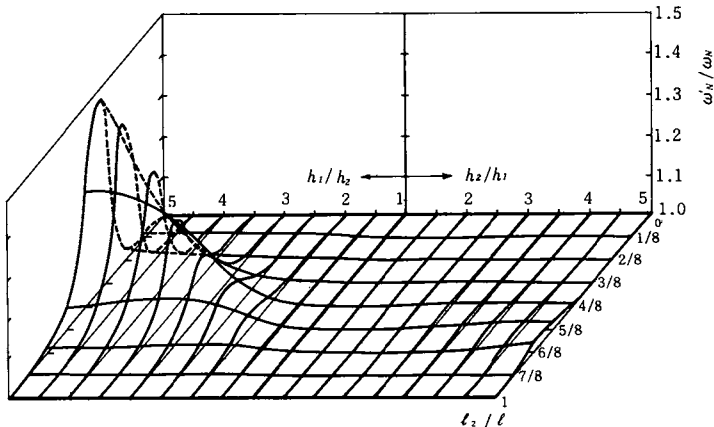


図10 線形モードを仮定した場合の、振動数に及ぼす影響 ( $a/h_e=1.0$ )



異っている。このことは、前述したように軸力が相対的に大きく働く結果、振動モードが軸力の働かない線形モードとは大きく異ってくることによるものと思われる。

#### 4. 実 験

対称二段段付長方形断面の試験片を用いて両端固定はりの自由振動および強制振動の実験を行った。強制振動の場合は、はりの固定台全体を動電型加振機を用いて加速度振幅  $0.55g$  ( $g$  は重力加速度) 一定にて正弦波加振し、はりに周期的分布外力を与える方法を用いた。図 11 に固定台および段付はりの取付け状況を示す。試験片はりん青銅板を削り出したものであり、 $E=11000 \text{ kg/mm}^2, \rho g=8.85 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3, l_1=70, l_2=140, h_1=0.97, h_2=1.99, b=23.0$  (単位 mm) である。はりの自重の影響が現われにくいように、振動方向を重力方向と直角となるよう固定台を設置した。試験片の固定に際しては、試験片に取付けたひずみゲージにより初期軸力が  $0$  となるように注意した。振幅は、固定台中央に取付けた非接触型変位計により、はり中央点について固定台との相対振幅を計測した。なお、

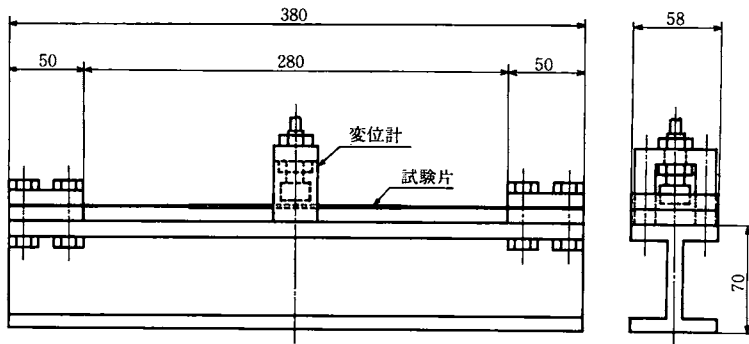


図11 試験片固定台

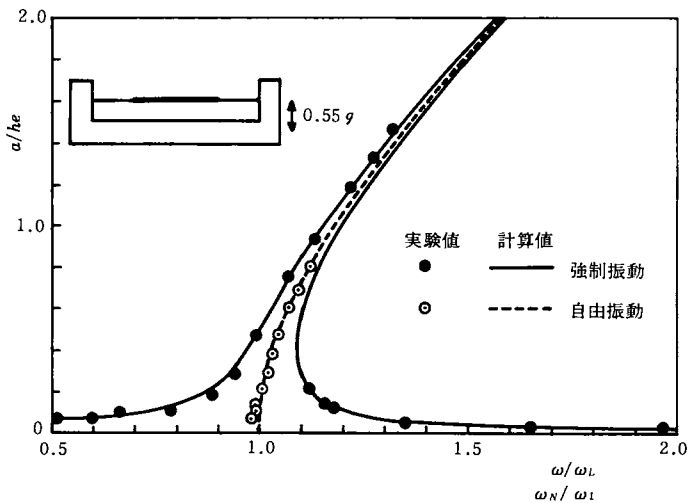


図12 両端固定対称段付はりの中央点振幅非線形応答

実験中の試験片の温度、固定状態などの変化による実験条件の変動を最小限に抑えるため、データレコーダによる記録を行い実験時間の短縮を計るとともに、実験前後で微小振幅の自由振動を行い、振動数を1%以内で一致させるなどの配慮をした。

$0.55g\rho A \cos \omega t$  の分布外力が単位長さ当りに作用しているとした計算結果とともに実験結果を図12に示したが、両者はよい一致を示しているといえよう。なお、試験片は  $h_2/h_1=1/2$  の場合についても製作したが、材料、加工技術などの点から、初期変形が著しく、真直なはりを得ることができなかったため採用しなかった。

## 5. 結 言

段付はりの軸力による非線形振動を伝達マトリックスを用いて解析する手法を示し、対称二段段付両端固定長方形断面はりを例にとって数値計算により変断面形状の非線形特性に及ぼす影響を明らかにした。また線形モード関数を用いた解析と比較し、はりの非線形性が強く現われる形状の場合は線形モード関数を用いることは非線形性を過大に評価することになることを示した。一部行った実験結果は計算結果とよい一致をみた。

最後に、本研究に際し、ご指導を賜りました東北大学齊藤秀雄教授に深く感謝の意を表します。また、適切な助言と激励をいただきました本学小堀与一教授に厚く御礼申し上げます。さらに、実験装置および図面などの作製に協力された本学小川孝吉技官に深く感謝します。

## 参 考 文 献

- (1) 佐藤, 対称二段段付両端固定はりの非線形振動, 金沢大学工学部紀要, 11—2 (昭53), 87.
- (2) Pestel, E. and Leckie, F. A., *Matrix Methods in Elastomechanics*, (1963), McGraw-Hill.
- (3) Sakiyama, T., An Analysis of Bending Vibrations of Nonuniform Beam, *Theoretical and Applied Mechanics*, 23 (1975).
- (4) 齊藤・佐藤, 急変断面を有する弾性はりの振動, 日本機械学会論文集, 34—261 (昭43), 856.

## 付録 軸力および分布外力が作用する一様断面はりの伝達マトリックス

分布外力として、はりの単位長さ当り  $q \cos \omega t$  の周期外力が作用するはり要素に対しては式(6)に対応して次式が成立つ。ただし添字は省略。

$$\frac{d^4 W}{d\xi^4} - \tau \frac{d^2 W}{d\xi^2} - \beta^4 W = \frac{q l^4}{EI} \quad (A1)$$

式(A1)を用いて拡張されたマトリックス<sup>2)</sup>をつくと次のようになる。

$$\bar{U} = \left[ \begin{array}{c|c} U & p \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (A2)$$

ここに

$$U = \begin{pmatrix} C_0 & l(\tau C_3 + C_1) & aC_2 & alC_3 \\ \frac{\beta^4}{l} C_3 & C_0 + \tau C_2 & \frac{a}{l}(C_1 + \tau C_3) & aC_2 \\ \frac{\beta^4}{a} C_2 & \frac{l}{a} [\tau C_1 + (\beta^4 - \tau^2) C_3] & C_0 + \tau C_2 & l(C_1 + \tau C_3) \\ \frac{\beta^4}{al} C_1 & \frac{\beta^4}{a} C_2 & \frac{\beta^4}{l} C_3 & C_0 \end{pmatrix}, \quad p = q \begin{pmatrix} \frac{al^2}{\beta^4} (1 - C_0) \\ -alC_3 \\ -C_2 l^2 \\ -C_1 l \end{pmatrix} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} C_0 &= R(\lambda_2^2 \cosh \lambda_1 + \lambda_1^2 \cos \lambda_2) & C_3 &= R\left(\frac{1}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_2} \sin \lambda_2\right) \\ C_1 &= R\left(-\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1} \sinh \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} \sin \lambda_2\right) & R &= \frac{1}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \\ C_2 &= R(\cosh \lambda_1 - \cos \lambda_2) & a &= \frac{l^2}{EI} \end{aligned} \quad (A4)$$

(昭和53年11月2日受理)