

# 鋭いくさびによる自由噴流の分岐に関する 二次元理論

岸 岡 英太郎\*

## Two-Dimensional Theory on the Branching of a Free Jet Caused by a Sharp Wedge

by

Eitaro KISHIOKA

### Abstract

The investigation on the deviation of a jet partially cut by a sharp wedge has not yet been published except that due to Lowy who studied the same problem encountered for the Pelton turbine. The present author develops two-dimensional potential flow theory for the purpose of elucidating the problem more concretely than Lowy's momentum theory did. This paper contains his extended analysis of the branching of a free jet caused by the plane, convex and concave wedge, therefrom calculated flow-pattern, and its remarkable features, together with discussion on the effect of wedge form upon deviation of jet.

The most noteworthy results are that a wedge with a cusped edge parallel to the entering jet causes much the same amount of deviation as an ordinary plane wedge does (Fig. 9), and that the parting line between the two branches generally shifts to the impinging jet, but it slightly shifts to the deviated jet when the latter overwhelms the former (Fig.7).

The last section of the paper is assigned to the problem of a free jet shooting through an orifice formed from a pair of wedges as the extended case of the foregoing analysis. The coefficient of contraction thus calculated proves to be a marked contrast to the ordinary value for the orifice.

### 1. 緒 言

噴流を鋭いくさびによって二分し、分れた噴流の一方はくさびの側面を流れ去り、他方はくさびを素通りするようにしたとき、後者の流れがもとの方向に直進するか、さもなければどの方向にそれるかという通俗的な問題はこれまで研究されたことが少なく、記録の上では、Lowy 1) がペルトン水車の研究に関して運動量理論を導入した考察と実験を発表したもののだけである。著者は最近の水車の効率改善に関する論文の中で本問題を対策のない事柄と述べた2) が、Lowy の式そのものを批判するには至らなかった。事実、運動量理論の場合、くさび先端で噴流が二分されると仮定

\* 機械工学第二学科

した近似を行なっているの、素通りする方の噴流がとくにかく曲がる可能性についての説得力はあるが、量的な推定までは不可能である。しかし、三次元流れとしての解析は困難であるので、著者は二次元ポテンシャル流れとしての解析を行ない、また、それらの実験的検討を試みた。本論文では、くさびの表面が平面の場合のほか、凸面および凹面の場合をも包含するよう理論を展開して、くさびの形状の影響、分岐流の流形の決定について述べるとともに、さらに本理論の延長として自由噴流をオリフィスに当てた場合の解析に論及する。

## 2. 序 論

Fig. 1 は自由噴流をくさび形断面の物体で二分する状態を示す。前縁  $A'$  が鋭角であるとき、図のように噴流の一部はくさび面に沿う強制された流れとなって無限遠  $A$  方向に進むのに対し、他方は  $A'$  のかどを回って自由噴流となり別な無限遠  $B$  方向に進む。水車の古くからの考え方では後者  $A'B$  流れがほぼ  $I$  から直進するものとして来たが、Lowy がはじめて公式に運動量理論の立場からこれを否定して特定方向にそれると唱えたのは至極当を得たものである。思うに、噴流に働く外力はくさび面  $A'A$  上に限るとすることは妥当であって、しかもその力は摩擦力を無視して面圧力だけとする仮定も一次的には容認できるものであるから、こうした考え方に立ってたと横の二成分に関する 2 個の式から成る運動量方程式を樹立し、これから  $A, B$  流れの方向を決めることにはなんの疑問も起らない。しかしながら、彼は流れが  $A'$  点で左右に分かれると仮定して方程式を樹てた\* から、左右の分岐流の流量比が図中破線  $I A'$  で分割された噴流面積比に一致するという前提に立っていた。いったい  $A'B$  流れがそれる原因となる力は内力すなわち流体内部圧でなければならないから、くさびに接触する以前にすでに働いていたと考えるほかないのであって、その結果  $A'$  より上方で噴流の右側部分から左側部分に対し横圧が働いていたことになり、その間に噴流の左側部分は左方へ移動してははずである。かように考えるとき、噴流を左右に分ける境界線は破線  $I A'$  よりも右寄りにならなければならない、運動量理論の適用に当ってはこの修正された境界を採用する必要があったわけである。したがって、Lowy の式を前記境界線の位置いかに問わず左右分岐流の実際流量比に基づく形式に改めるならば、当然正しい。すなわち、 $Q_A, Q_B$  をそれぞれ Fig. 1 の分岐流  $A'A$  と  $A'B$  の流量とし、 $\theta_a, \theta_b$  をそれぞれの傾き角とすれば、

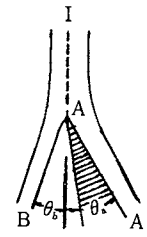


Fig. 1

$$\theta_b = \cos^{-1}\{(Q_a/Q_b + 1)\cos\theta_a - Q_a/Q_b\} - \theta_a \quad (2 \cdot 1)$$

しかし、実際に当初判っているのは  $Q_a/Q_b$  ではなく、噴流とくさびの相対位置関係であるから、この式だけでは役に立たない。こうして運動量理論では求まらない  $Q_a/Q_b$  と位置関係を結びつけるために本文の理論を必要とするものである。

いま、この問題を 2 次元ポテンシャル流れとして扱うには不連続流の理論の手法を用いるのが便利である。Fig. 2 に物理面  $z$  と hodograph 面  $\zeta$  の対応を示す。複素ポテンシャルを  $W$  とすれば、

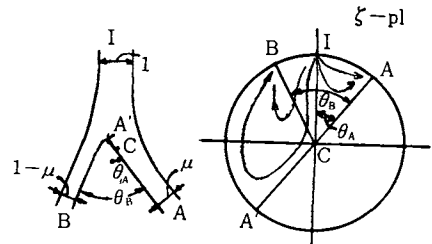


Fig. 2

$$\zeta = dW/dz \quad (2 \cdot 2)$$

\* 実際には Lowey の論文には方程式は示されておらず結果だけが示されている。著者はこれを再現して、The Second International JSME Symposium, Tokyo, 1972 の講演で説明のため論文の補足ページに発表した。

ζ面上で流線を書くと、I 点に強さ 2 の吹き出し、A 点に強さ 2μ の吸こみ、B 点に強さ 2(1-μ) の吸こみがあって半円 AIBA'A の周囲が閉境界となる。ここで μ は分岐流の流量分割比を決めるパラメータであって 0 から 1 までの間で変えることができるものとする。W の表現式を簡単な形に作るには、さらに ζ 面から ACA' を実軸にとった ζ<sub>1</sub> 面 (Fig. 3) に移し、A'CA 線の境界を撤去して全円を境界にしたものとするのが便利である。この場合、B、I の吸こみ、吹き出しに対する鏡像点 B', I' におなじ吸こみ、吹き出しを追加し、さらに A 点の吸こみは強さ 4μ とする。こうして容易に

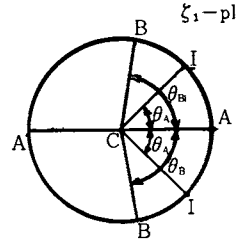


Fig. 3

$$W = (1/\pi) \ln(\zeta_1 - e^{\theta_A i})(\zeta_1 - e^{\theta_B i}) - (1/\pi)(1-\mu) \ln(\zeta_1 e^{\theta_B i})(\zeta_1 - e^{-\theta_B i}) - (1/\pi) 2\mu \ln(\zeta_1 - 1) \quad (2 \cdot 3)$$

また (2.2) 式から

$$dz/d\zeta_1 (dW/d\zeta) / \zeta \quad (2 \cdot 4)$$

ζ と ζ<sub>1</sub> の間には ζ = ie<sup>-θ<sub>A</sub>i</sup>ζ<sub>1</sub> があるから

$$dz/d\zeta_1 = -ie^{\theta_A i} (dW/d\zeta_1) \zeta_1 \quad (2 \cdot 4a)$$

これより

$$z = -ie^{\theta_A i} / \pi \{ e^{-\theta_A i} \ln(\zeta_1 - e^{\theta_A i}) + e^{\theta_A i} \ln(\zeta_1 - e^{-\theta_A i}) - (1-\mu) e^{-\theta_B i} \ln(\zeta_1 - e^{\theta_B i}) - (1-\mu) e^{\theta_B i} \ln(\zeta_1 - e^{-\theta_B i}) - 2\mu \ln(\zeta_1 - 1) \} \quad (2 \cdot 5)$$

(2.3), (2.5) の θ<sub>p</sub> は

$$dW/d\zeta_1 \Big|_{\zeta=0} = 0 \quad (2 \cdot 6)$$

が成立する条件から決められる。すなわち

$$-\cos\theta_A + (1-\mu)\cos\theta_B + \mu = 0 \quad (2 \cdot 7)$$

最後の式は運動量理論から得られた (2.1) 式と同等である。Fig. 1 のくさび面が平面に限る場合は本節の理論で計算を進めればよいが、くさび面が曲面である場合を扱うには、別法によらねばならない。次節にそれを述べる。

### 3. 曲面のくさびによる分岐流

一般の曲面を扱うことは複雑になり、また目的からも必要ではないので、可能な方法として、Fig. 2 の ζ 面における A'A 線が直線ではなくて円弧で表わされるような場合を考える。これを Fig. 4a に示す。この方法は z 面で規定されるものどちがって、 hodograph 面上で定めるために、μ の変化によって形状が変わる欠点を持つが、エッジの先端近傍の形はほぼ固定できるので、全体として曲面が凸か凹かによる影響を調べるのには役立つものと考えられる。複素ポテンシャル関数を求めるのに便利なように、

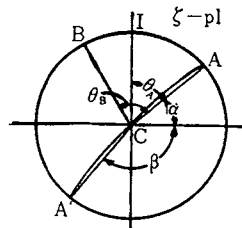


Fig. 4 a

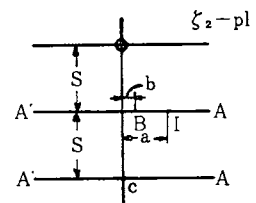


Fig. 4 b

$$\zeta_2 = (1/2\pi) \ln(\zeta - e^{-\beta i}) / (\zeta - e^{\alpha i}) \quad (3 \cdot 1)$$

によって Fig. 4b の  $\zeta_2$  面に変換する。この  $\beta$  を  $\pi/2$  から  $\pi$  までの範囲で選ぶことにより、くさびの表面を Fig. 5 のように変えることができる。この形の計算は後出 (3・12, a) 式による。 $\zeta_2$  面の原点 0 に対して、 $\zeta$  面の円弧  $A'BA$  は  $-si$  点 ( $s=(\alpha+\beta)/\pi$ )

を通る水平直線に、円弧  $A'CA$  は  $\zeta_2$  面の  $-2si$  点を通る水平直線に対応する。 $\zeta$  面の領域  $ACA'BIA$  は  $\zeta_2$  面の両直線にはさまれた水平の帯状域  $A'BAACA'$  に対応し、流れの場は全部この内部で表わされる。そこで、 $\zeta_2$  面 I 点に強さ 2 の吹出し、B 点に強さ  $2(1-\mu)$  の吸こみを置き、境界  $A'BA$  線と  $A'CA$  線についてこれらの吹出し、吸こみに対する鏡像吹出し、吸こみを無限個列べたうえ、前節の A 点の吸こみに代って右向き一様流れ (速度  $\mu/2s$ ) を設定する\*。こうして I 点の座標  $a-si$ 、B 点の座標  $b-si$  とすれば、I と同列の吹出し系列は  $\zeta_2 = a-si + 2\nu si$ 、B と同列の吸こみ点列は  $\zeta_2 = b-si + 2\nu si$  ( $\nu = -\infty$  から  $+\infty$  までの整数) に位置づけられるのでポテンシャル関数は

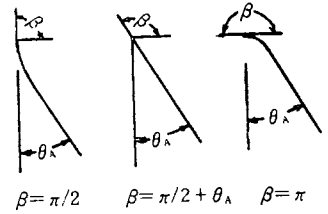


Fig. 5

$$W = 1/\pi \ln \sinh\{(\zeta_2 - a + si)\pi/2s\} - (1-\mu)/\pi \ln \sinh\{(\zeta_2 - b + si)\pi/2s\} + (\mu/2s)\zeta_2 \tag{3・2}$$

この式の  $a$  は (3・1) 式において  $\zeta = e^{\alpha i}$  とおいた  $\zeta_2$  の値から

$$a = 1/\pi \ln\{\sin(\pi/4 - \beta/2)/\sin(\pi/4 - \alpha/2)\} \tag{3・3}$$

また  $b$  は  $\zeta = e^{(\alpha + \theta_B i)}$  とおいた  $\zeta_2$  の値から

$$b = 1/\pi \ln\{\sin(\theta_B/2 + \alpha/2 + \beta/2)/\sin(\theta_B/2)\} \tag{3・4}$$

さて、 $\theta_B$  したがって  $b$  は前出 (2・6) 式と同様に

$$dW/d\zeta_2 \Big|_{\zeta_2 = 2si} = 0 \tag{3・5}$$

によって決定される。(3・2) 式から

$$dW/d\zeta_2 = (1/2s) \coth\{(\zeta_2 - a + si)\pi/2s\} - (1-\mu)(1/2s) \coth\{(\zeta_2 - b + si)\pi/2s\} + \mu/2s \tag{3・6a}$$

$$= (1/2s) \tanh\{\pi(\zeta_2 - a)/2s\} - (1-\mu)(1/2s) \tanh\{\pi(\zeta_2 - b)/2s\} + \mu/2s \tag{3・6b}$$

ここで  $\zeta = -2si$  を代入して 0 とおく。

$$\tanh(\pi a/2s) - (1-\mu) \tanh(\pi b/2s) - \mu = 0 \tag{3・7}$$

本式が前節 (2・7) 式の一般化した形である。これに (3・3)、(3・4) を代入して計算すれば、

$$\theta_B = 2 \cot^{-1} \left[ \left( \frac{1}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}} \right) \left\{ (1-\mu) \left( \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) / \sin \frac{\theta_A}{2} \right)^{2\pi(\alpha + \beta)} - \mu \right\}^{(\alpha + \beta)/2\pi} - \cot \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \tag{3・8}$$

\* I 点の吹出し強さ 2 であるから幅  $s$  の帯状域の  $+\infty$  側に流量  $1/2$ 、同様に B 点の吸こみ  $2(1-\mu)$  により  $+\infty$  側に  $(1-\mu)/2$ 、合計  $\mu/2$  となるから速度は  $\mu/2s$  である。

$z$  の算式は、前節 (2・4) 式と同様に

$$dz/d\zeta_2 = (dW/d\zeta_2)/\zeta \quad (3 \cdot 9)$$

の関係によって求められる。ここで  $\zeta$  は (3・1) 式によって

$$\zeta = e^{(\alpha - \beta)/2} \sinh(\pi\zeta_2 + 2\pi si) / \sinh\pi\zeta_2 \quad (3 \cdot 10)$$

(3・13), (3・10) 式を (3・9) 式に代入して

$$dz/d\zeta_2 = (1/2s) e^{-(\alpha - \beta)/2} \sinh\pi\zeta_2 / \sinh(\pi\zeta_2 + 2\pi si) \{ \coth\{(\zeta_2 - \alpha + si)\pi/2s\} - (1 + \mu) \coth\{(\zeta_2 - \alpha + si)\pi/2s\} + \mu \} \quad (3 \cdot 11)$$

この式の積分を解析的に行なうことは一般には不可能であるから、数値積分によらねばならない。エッジ表面の形を計算するには図 4a の A'CA 線上で (3・11) 式を積分する。こうして、前出 Fig. 5 の諸型式が算定された。

#### 4. 平面くさびの場合の流れの計算

前節 (3・11) 式はくさびが平面の場合には解析的に積分することができる。Fig. 3a,  $\alpha$  を参照して

$$\alpha + \beta = \pi \quad (4 \cdot 1)$$

$$s = 1/4 \quad (4 \cdot 2)$$

これらを用いて (3・11) 式を簡単化すれば

$$dz/d\zeta_2 = 2e^{-\alpha i} \tanh\pi\zeta_2 \{ \tanh 2\pi(\zeta_2 - \alpha) - (1 - \mu) \tanh 2\pi(\zeta_2 - \alpha) + \mu \} \quad (4 \cdot 3)$$

ここで

$$\tanh(2\pi\alpha) = A, \quad \tanh(2\pi\beta) = B \quad (4 \cdot 4)$$

とおき、また (3・7) の関係を考慮すれば

$$z = e^{-\alpha i} / \pi \{ A \ln \{ 1 - 2A \tanh\pi\zeta_2 + (\tanh\pi\zeta_2)^2 \} - 2\sqrt{1 - A^2} \tan^{-1} \{ (\tanh\pi\zeta_2 - A) / \sqrt{1 - A^2} \} \\ - (1 - \mu) B \ln \{ 1 - 2B \tanh\pi\zeta_2 + (\tanh\pi\zeta_2)^2 \} + 2(1 - \mu) \sqrt{1 - B^2} \tan^{-1} \{ \tanh\pi\zeta_2 - B \} / \sqrt{1 - B^2} \} \\ + \mu \ln \{ (\tanh\pi\zeta_2 + 1) / (\tanh\pi\zeta_2 - 1) \} + 2\mu \operatorname{Incosh}\pi\zeta_2 \} \quad (4 \cdot 5)$$

(3・7) 式はこの場合

$$A - (1 - \mu)B - \mu = 0^* \quad (4 \cdot 6a)$$

また、(4・1) 式を (3・3) 式に用いると (4・4) から

$$A = \tanh(2\pi\alpha) = \sin\alpha = \cos\theta_A \quad (4 \cdot 6b)$$

同様に (3・4) 式を用いると

$$B = \tanh(2\pi\beta) = \cos\theta_B \quad (4 \cdot 6c)$$

さて、上記 (4・5) 式を流形決定の基本式であるが、積分定数をはぶいてあるので、まず、位

\* 本式は後続の二式を参照すれば  $\cos\theta_A - (1 - \mu)\cos\theta_B - \mu = 0$  となる。他方、(2・1) 式で  $Q_a/Q_b + 1 = 1/(1 - \mu)$  の関係と  $\theta_b + \theta_a = \theta_B$ ,  $\theta_a = \theta_A$  を考慮するとき、(2・1) 式と本式が一致することが分かる。

置の基準となるくさびの座標を求めておく必要がある。そのために  $\zeta_2$  面の直線  $A'CA$  上で  $\zeta_2 = x - 2si$  ( $X$  は実数), さらに  $X = \tanh \pi x$  の置換を行うとき, (4・5) 式はつぎの形になる。

$$z = (e^{-xi}/\pi) \{ A \ln(1 - 2A/X + 1/X^2) - 2\sqrt{1 - A^2} \tan^{-1} \{ (1/X - A) / \sqrt{1 - A^2} \} - B(1 - \mu) \ln(1 - B/X + 1/X^2) + 2(1 - \mu) \sqrt{1 - B^2} \tan^{-1} \{ (1/X - B) / \sqrt{1 - B^2} \} + \mu \ln(1 + X) / (1 - X) + \mu \ln X^2 / (1 - X^2) \}. \quad (4 \cdot 7)$$

本式で  $X = 0$  とおけば, よどみ点  $C$  の  $z$  がつぎの式で与えられる。

$$z = e^{-\alpha i} / \pi \{ -\pi \sqrt{1 - A^2} + (1 - \mu^2) \pi \sqrt{1 - B^2} - \pi \mu i \} \quad (4 \cdot 8)$$

つぎに  $X = -1$  とおけば, 頂点  $A'$  の  $z$  が得られる。以下流形の計算にはこの値をもとにする。

$$z = e^{-\alpha i} / \pi \{ A \ln(1 + A) + 2\sqrt{1 - A^2} \tan^{-1} \sqrt{(1 + A) / (1 - A)} - B(1 - \mu) \ln(1 + B) - 2(1 - \mu) \sqrt{1 - B^2} \tan^{-1} \sqrt{(1 + B) / (1 - B)} - \mu \ln 2 - \pi \mu i \} \quad (4 \cdot 9)$$

自由表面の計算を行なうには,  $\zeta_2$  面の  $A'BIA$  上で (4・5) 式を適用する。それにはこれと対応する  $\zeta$  面上の円弧  $AIBA'$  上の任意の点で  $\zeta = e^{\theta i} + \alpha$  とおけば (3・1) 式により  $\tanh \pi \zeta_2 = e - (\theta_A + \theta)i$ 。これを (4・5) 式に代入して

$$z = (e^{-\alpha i} / \pi) \{ e^{\theta_A i} \ln \sin(\theta + \theta_A) / 2 + e^{\theta_A i} \ln \sin(\theta - \theta_A) / 2 - (1 - \mu) e^{\theta_B i} \ln \sin((\theta + \theta_B) / 2) - (1 - \mu) e^{\theta_B i} \ln \sin(\theta - \theta_B) / 2 - \mu \ln(2 \sin^2 \theta / 2) + \text{const.} \} \quad (4 \cdot 10)$$

本式は  $\theta = \theta_B$  および  $\theta = \theta_A$  に極があるので,  $A'$  側から通過するときはそれぞれ  $-(1 - \mu)e^{-\theta_B i} \pi i$  および  $+e^{\theta_A i} \pi i$  の跳びだけ加算して行く必要がある。噴流の外形計算に当っては, 本式よりさらに計算に便利にするため Fig. 6a のように  $B$  の分岐噴流の方向に実軸をとって実数部  $f_R$  および虚数部  $Z_I$  を計算するか Fig. 6b のように  $I$  噴流の  $A'$  に対する相対位置を計算するに便利なように軸を選んで行なう方法を採用。ここでは後者の  $AI$  間に使用した算式の実部  $g_R$  および虚部  $g_I$  を記すことにする。

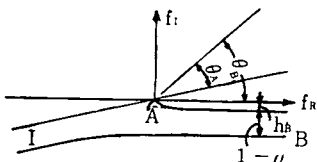


Fig. 6 a

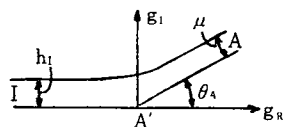


Fig. 6 b

$$g_R = 1/\pi \{ \ln(\sin \frac{-\theta + \theta_A}{2} / \cos \frac{\theta_A}{2}) + \cos 2\theta_A \ln(\sin \frac{\theta + \theta_A}{2} / \cos \frac{\theta_A}{2}) - (1 - \mu) \cos(\theta_B - \theta_A) \ln(\frac{-\theta + \theta_B}{2} / \cos \frac{\theta_B}{2}) - (1 - \mu) \cos(\theta_B + \theta_A) \ln(\sin \frac{\theta + \theta_B}{2} / \cos \frac{\theta_B}{2}) - \mu \cos \theta_A \ln(\sin^2 \frac{\theta}{2}) \} - (1 - \mu) \sin(\theta_B - \theta_A). * \quad (4 \cdot 11a)$$

$$g_I = 1/\pi \{ \sin 2\theta_A \ln(\sin \frac{\theta + \theta_A}{2} / \cos \frac{\theta_A}{2}) + (1 - \mu) \sin(\theta_B - \theta_A) \ln(\sin \frac{-\theta + \theta_B}{2} / \cos \frac{\theta_B}{2}) - (1 - \mu) \sin(\theta_B + \theta_A) \ln(\sin \frac{\theta + \theta_B}{2} / \cos \frac{\theta_B}{2}) - \mu \sin \theta_A \ln(\sin^2 \frac{\theta}{2}) \} + 1 - (1 - \mu) \cos(\theta_B - \theta_A). * \quad (4 \cdot 11b)$$

\* [ ] 外のこの項はさきに述べた  $B$  点および  $A$  点を越えるときの関数値の跳びの累計を表わす。



5. 分岐噴流の転向角

すでに本文3で、ホドグラフ面上の円弧で表現される凸または凹面のくさびに噴流を受けるとき分岐噴流の転向角を与える式(3・8)を導いた。Fig. 2 から明らかなようにz面でもとの噴流からのそれ角は $\theta_B - \theta_A$ で表わされる。この $\theta_B$ および $\theta_B - \theta_A$ を $\theta_A = 35^\circ$ すなわち $\alpha = 35^\circ$ に固定して

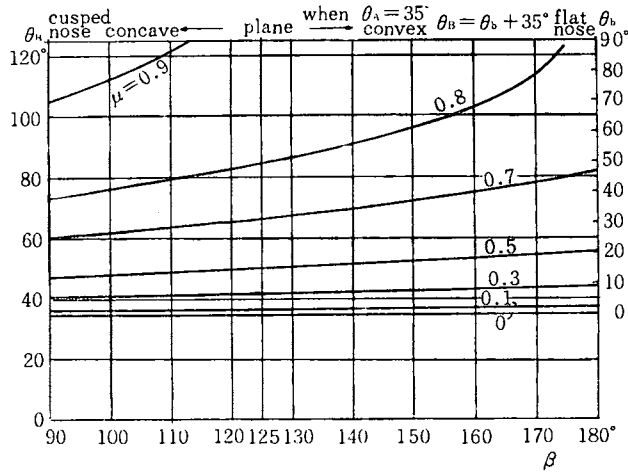


Fig. 9

$\mu$  と  $\beta$  を変化させて計算した値が Fig. 9 に示されている。図中注目されるのは、凹面から凸面に変わるにつれて  $\theta_B$  が増加することは予想通りであるとしても、 $\beta = 90^\circ$  すなわち先端が噴流の方向に鋭い刃先をなしているときも平面くさびと比べて予想ほどには  $\theta_B$  が減らないことである。 $\mu$  が大きいほどそれ角が増えることはくさびの形状に関らず一般的傾向で、運動量理論の予言するとおりである。

ここで  $\mu$  と  $\theta_B$  の関係について注意を要する事項につき一言したい。これはくさびの種類に関わりなく共通したことからであるから、簡単のため平面形くさびについて述べる。(4・6a)式について脚注に記したとおり  $\cos \theta_A - (1 - \mu) \cos \theta_B - \mu = 0$  が成立するから、もし  $\theta_A$  を固定して  $\mu$  を変えれば  $\theta_B$  が変わることはいうまでもない。そこで  $\mu = 1$  とすれば、 $\cos \theta_A = \mu$  となって矛盾を生ずる。これは  $\mu = 1$  となり得ないことを意味する。この場合には、ある  $\mu$  の大きな状態で Fig. 10 に示すように  $\theta_B = \pi$  となる。このとき  $\mu$  の限界値は上記の式中  $\cos \theta_B = -1$  とおいて  $\mu = (1 - \cos \theta_A) / 2$  これ以上  $\mu$  は増えない。逆に  $\mu$  は 0 になることはもちろん可能であって噴流がくさび先端からはずれることを意味する。Fig. 9 の上限は便宜上  $\theta_0 = 90^\circ$  の線で止めてあるが、くさびの形状の定める  $\theta_B$  とそれに合う  $\mu$  の限界値までは伸びる。

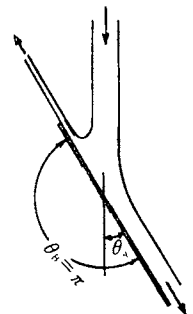


Fig. 10

**転向角を測定する実験** Lowy の論文1) に報告された実験は3次元の実験であって、彼は運動量理論を棚上げにして実用上の目的への道を急いだ感がある。著者は Fig. 11 に示すように2次元流れの実現を意図して二枚の平行な透明板にはさんだくさびに対して上方から角型噴流を進入させる装置により、 $\theta_0$  の測定を行なった。その結果判ったことは、くさび面で強制された流れは断面図 X-X' に示すように壁面境界層内の静圧の高まりに伴って U 字型に吹き上げ流れが発生し、主流に対してこの二次流れの影響が非常に大きいので、この二次流れ抑制の目的でしかも主流に干渉しないように現場で観測中調整可能な Q および R の調整板を設けてようやく本来の2次元流れに近い状態を



実現した。その結果求めた記録が Fig.12 に示されている。それによると、 $\mu=0.5$  に近いときはほぼ理論値に近い  $\theta_0$  の値が得られるに反し、 $\mu$  の大きいときまたは小さいときには概して理論値に比べ

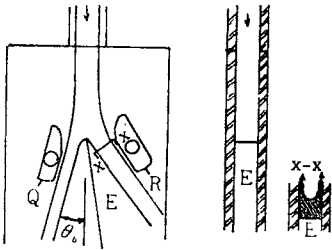


Fig. 11

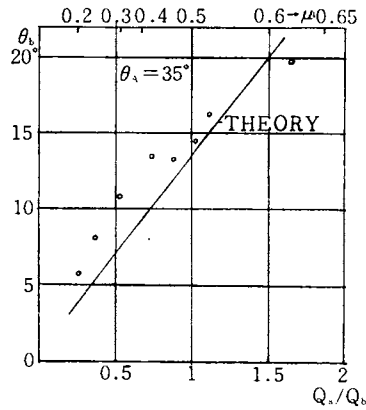


Fig. 12

て  $\theta_0$  の変化は緩慢である。これは前記二次流れの抑制に無理があること、壁面摩擦の影響により流れの水平方向移動が妨げられること、Fig. 7 に書かれた  $\delta$  の値が大分理論とはちがった実態になっているためと考えられる。もちろん流れの幅を拡げて、上記透明板の距離を大きくすれば壁面流れの影響は軽減されると思うが、むしろ 2 次元流れの実験に横わる困難を回避して 3 次元流れの理論化を進める方が近道のようなのである。

### 6. 自由噴流をオリフィス孔の中心に当てたときの分岐流

前節までに述べた 1 枚のくさびを左右対称に置くと Fig. 13a に示すオリフィスの形が得られる。

この場合、一般のオリフィスと異なって両側に分岐流があって、しかもオリフィス孔から噴流が出るという状態であり、1 枚のくさびの場合の転向角はなくなるかわりに縮流係数が小さくなるものと予想される。同図と Fig. 13b はそれぞれ物理面とホドグラフ面を示している。ただし、ホドグラフ面は物理面の右半分だけに対応している。ホドグラフ面の特徴として図中  $I'$  と記された点と  $I_1$  または  $I_2$  (重なり合った点) を結ぶ  $I' I_1$  線を分岐線とするリーマン面を形成し、

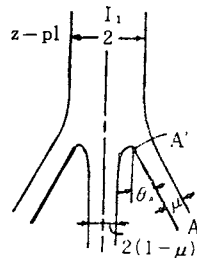


Fig. 13 a

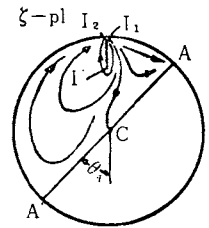


Fig. 13 b

流線を記入すれば  $I_1 I'$  を横断することができない。 $I_1$  と  $I_2$  は対岸同志の関係にある。そこで、前出 (3・1) 式の変換は役立たないから、まず不連続流理論の通例どおり

$$\zeta_3 = \ln \zeta \quad (6 \cdot 1)$$

によって Fig. 14a の  $\zeta_3$  面に移し、さらに複素ポテンシャル  $W$  の作りやすいように Fig. 14b の  $t$  面に移す。それには、 $t$  面実軸上に左から順に列ぶ  $A, I_1, I_2, A'$  をとってそれぞれ  $t = a, b, c, d, e$  とおき、ほかに未定係数  $k$  (実

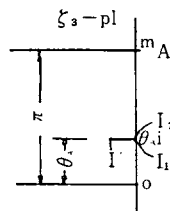


Fig. 14 a

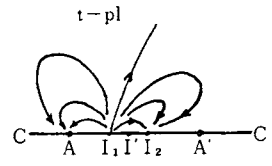


Fig. 14 b

数)を用いて,

$$d\zeta_3 = ki(t-c) / \sqrt{(t-a)(t-b)(t-d)(t-e)} dt \tag{6 \cdot 2}$$

$a, b, \dots$ 等6個のうち任意に変えられるのは4個であって, 内3個はつぎの条件式から決まる。

$$(1) \int_b^d (d\zeta_3/dt) dt = 0 \tag{6 \cdot 3a} \quad (2) \int_a^d (d\zeta_3/dt) dt = \theta_A \tag{6 \cdot 3a}$$

$$(3) \int_e^c (d\zeta_3/dt) dt = \pi \tag{6 \cdot 3c}$$

残り1個は複素ポテンシャルの条件によって与えられる。Fig. 14bにおいて  $I_1$  点の吹出しの強さを2,  $I_2$  の吸こみの強さ  $2(1-\mu)$ , Aの吸こみの強さを  $2\mu$  とすれば, ホドグラフ面上の要求から考えて, Aに吸こまれる流体と  $I_2$  に吸こまれる流体の境の流線が  $t=\infty$  に行く必要がある。このことから,

$$\mu(b-a) - (1-\mu)(d-b) = 0 \tag{6 \cdot 3d}$$

そこで計算に当っては,  $\mu$  を与えると (6 \cdot 3d) 式から  $b$  と  $d$  の一組が決められる。つぎに  $e$  を常時固定しておき,

$$J_1 = \int_b^d 1/\varphi(t) dt \quad J_2 = \int_b^d t/\varphi(t) dt$$

$$\text{ここで } \varphi(t) = \sqrt{|(t-a)(t-b)(t-d)(t-e)|}$$

$J_1, J_2$  は第1種, 第3種の楕円積分に帰せられるものである。 $J_1, J_2$  が求められると (6 \cdot 3a) によって  $c$ , さらに (6 \cdot 3c) によって  $k$ , (6 \cdot 3b) によって  $\theta_A$  を決定する。けっきょく  $\mu$  を指定したとき,  $a$  または  $d$  のどちらかを仮定して  $\theta_A$  が決まることになる。前記の  $e$  は便宜上1にしておけばよい。

複素ポテンシャル  $W$  は  $t$  面上で容易に組立てられて

$$W = 1/\pi \{ \ln(t-b) - \mu \ln(t-a) - (1-\mu) \ln(t-d) \} \tag{6 \cdot 5}$$

$z$  を求めるには前出 (3 \cdot 9) 式と同様に  $dz/dt = (dW/dt)/\zeta$  を用いる。(6 \cdot 1) 式から

$$\zeta = e^{\zeta_3} = e^{\pi i + ki} \int_e^t (t-c)/\varphi(t) dt \tag{6 \cdot 6}$$

$$\therefore z = \frac{1}{\pi} \int_e^t e^{-\pi i - ki} \int_e^t (t-c)/\varphi(t) dt \{ 1/(t-b) - \mu/(t-a) - (1-\mu)/(t-d) \} dt \tag{6 \cdot 7}$$

以上の理論を適用して, Fig. 15a に示した一直線の壁にスリットのある場合を解析しよう。この

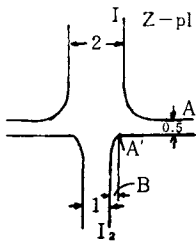


Fig. 15 a

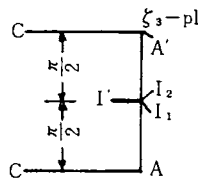


Fig. 15 b

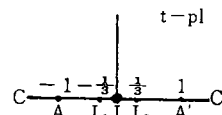


Fig. 15 c

とき  $\theta_A = \pi/2$  である。特に  $\mu = 0.5$  と仮定した場合を Fig. 15b, 15c に示してある。t 面では I' 点以外の 4 点が I' に関して対称となって、 $\varphi(t) = \sqrt{t^2 - 1}(t^2 - 1/9)$  である。この場合  $k = 1$  となって、結局

$$z = -\frac{1}{\pi} \int_1^t e^{-i\frac{1}{2}\pi t / \sqrt{(1-t^2)(t^2-1/9)}} dt \left\{ 1/(t+1/3) - 0.5/(t+1) - 0.5/(t-1/3) \right\} dt$$

Fig. 15a の長さ B を求めるため  $B = z \Big|_{i_1}^{A'}$  によって、

$$B = \frac{3\sqrt{2}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{u(u+2/3)}} \left\{ \frac{1}{u+2/3} - \frac{0.5}{u+4/3} - \frac{0.5}{u} \right\} du = \frac{3\sqrt{2}}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(u) du$$

(6・8)

本式中  $f(u)$  は図 16 のように  $u = 0$  で  $\infty$  となるが、つぎの数値積分による結果は十分正確値 (次回発表) に近いことがわかった。 $2B = 0.350$ 、スリット幅は 1,350、収縮係数は  $1/1.350 = 0.740$  この値は静止流体がスリットから噴き出すときの値  $\pi/(2+\pi) = 0.611$  と比べて大分大きい。このことは、現在の流れの中心線に仮定の壁があって分岐噴流の転向角を 0 に抑えていると見るならば、そい流れの特徴と考えることができる。

### 7. 結 論

1. ペルトン水車のバケットに噴流が一部進入する場合にバケットからはずれた噴流が曲がる 事実を Lowy は運動量理論によって根拠づけたが、その計算式は定量的な予測に役立たないので、あらたに 2 次元流体力学による解析を行ない、分岐噴流の形状を算定した。
2. 噴流とくさびの相対位置と分岐流量配分の 関係は運動量理論だけでは 算定できなかったが、今回これを解明できた。配分のパラメータ  $\mu$  が大きい場合には、くさび先端位置が流量配分から予測される位置から相当にはずれる (Fig. 7)。
3. くさびの表面が平面の場合のほか凸面、凹面の場合に分岐噴流の転向角を求めた結果、先端がかみそりのように鋭い場合でも、転向角は普通の場合と大差のないことが判った (Fig. 9)
4. 2 次元理論の結果を検証する 実験は 2 次元流れの実現いかんにかかるとであるが、著者の試みた方法では二次流れ (secondary flow) の抑制に留意したにもかかわらず一般の流量配分比に対してあまり満足すべき結果は得られなかった。ただし 1 対 1 に近い配分比では理論値との一致は良好であった。
5. くさびによる分岐流と 関連してオリフィスに噴流を当てたときの流れの解析を行なった。その結果従来知られた静止流体をオリフィスから噴出させたときの縮流係数とは 対照的な値が得られた。これは分岐流の転向角を 0 に抑えた場合の流れの特徴を示唆するものと考えられる。
6. 3 次元流れの知見を十分に理解するための 基盤として 2 次元流れに関する具体的な認識が得られた。引続いて、応用面に一歩進めた研究の成果を次回以後に発表するつもりである。

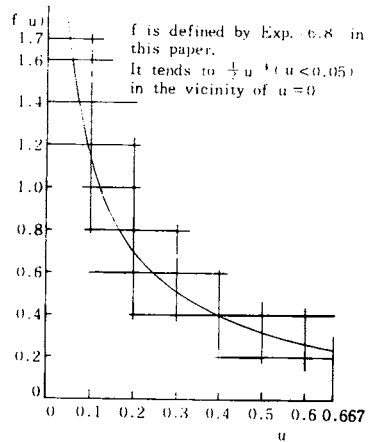


Fig. 16

## 謝 辞

本研究における数値計算および実験を担当された本学大学院学生森康夫君ならびに森本隆君の協力を深く謝意を表します。なお一部複雑な計算には本学計算センターの FACOM 230-35型電算機を利用したことを付記して同所の各位に同様謝意を表します。

## 文 献

- 1) Efficiency Analysis of Pelton Wheels. R. Lowy, Trans. A. S. M. E. Vol. 66, 1944, p. 527
- 2) Investigation into the Problem of Losses of the Pelton Wheel. E. Kishioka & K. Osawa. Proceedings of the Second International J. S. M. E. Symposium Vol. 1, Fluid Machinery I 1972, p. 203. Ref. to Supplementary Remarks.