

## 縦衝撃された丸棒に関する近似的動ひずみ解析について

茶谷 明義\* 放生 明広\* 内山 進\*\* 柴原 正雄\*

### On the Approximate Dynamic Strain of a Circular Bar Subjected to Longitudinal Impact

by

Akiyoshi CHATANI, Akihiro HOJO, Susumu UCHIYAMA and Masao SHIBAHARA

#### Abstract

The dynamic strain of a circular bar subjected to a constant velocity at its one end was obtained numerically on the basis of Love's equation of motion including the influence of lateral inertia.

As a result, the followings were drawn. The strain becomes maximum at its wave front because of lateral inertia. It is followed by the damped oscillation behind its wave front and approaches to the elementary solution. Such a theoretical strain pattern was also observed by the experiment. It is, therefore, emphasized that Love's equation of motion gives good approximation to the analysis of the dynamic strain in the vicinity of its wave front. In addition, the present numerical result is quite similar to Skalak's rigorous solution applicable only for infinite large time.

#### 1 ま え が き

縦衝撃された丸棒の動ひずみは三次元問題として解析され、Skalak<sup>1)</sup>は振動数方程式の処理が困難なために時間無限大のもとでの結果を、また Folkら<sup>2)</sup>は端面の半径方向変位を拘束した特殊な条件での結果を得ている。これらによれば、ひずみは一次元の結果を中心に波頭近傍で振動する。このような現象は実験によっても認められ<sup>3)</sup>、波頭近傍の振動はおもに横慣性に原因するとされているが、有限時間内でのより詳細な動ひずみの挙動は必ずしも明らかではない。すなわち、有限時間内で丸棒の動ひずみは理論的に厳密に明らかにされていないのが現状であり、また実験的にもひずみ波頭の形状が詳細に明らかにされたことは少ないようである。

一方、一次元運動方程式に横慣性を考慮した Love の式<sup>4)</sup>を用いて、Davies<sup>4)</sup>は一端に一定応力パルスを与えたときの丸棒の軸方向変位を数値的に求めている。この結果によれば、図式的な変位勾配から得られた波頭近傍のひずみは定性的には Skalak ほかと同様な傾向を示している。しかしこのひずみは方程式の解から直接計算されたものでないために誤差を含み、位置、時間、ポアソン比などによる波頭形状の変化が明らかではない。

このような波頭形状の特性を明らかにすることは、丸棒の縦衝撃を利用した各種衝撃試験装置の特性を知るために、また動現象の本質を知るためにも重要である。

そこで本研究では、Love の式に基づき、端面に一定変位速度を受ける丸棒の動ひずみを数値的に

\* 機械工学第二学科 \*\* 現川崎重工

求めて波頭形状に考察を加え、実験と比較検討した。

## 2 運動方程式

円柱座標系で軸方向に座標  $z$  を選び、時間を  $t$ 、弾性波の一次元伝ば速度を  $c_0$  とすれば、無限に細い弾性丸棒の軸方向変位  $u_z$  はつぎの方程式を満足する。

$$c_0^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (1)$$

式(1)は変位の一次元伝ばを仮定したもので、丸棒の径が有限寸法である通常の場合にこれを適用すれば、横慣性が無視されていることになる。しかし前述のように三次元問題として有限時間内での解を求めることはきわめて困難なため、近似的ではあるが、式(1)に横慣性を考慮して Love は

$$c_0^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{\nu^2 a_0^2}{2} \frac{\partial^4 u_z}{\partial z^2 \partial t^2} \quad (2)$$

なる式を導びいた。ここで  $\nu$  はポアソン比、 $a_0$  は丸棒の半径である。

式(2)は横慣性を考慮するために変位  $u_z$  が半径方向座標  $r$  に無関係でかつ半径方向変位  $u_r$  を

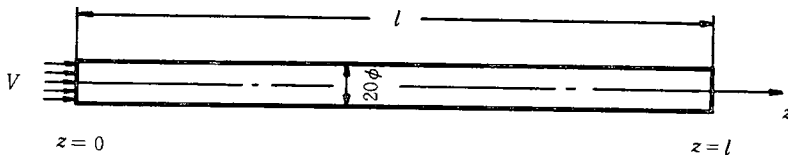
$$u_r = -\nu r \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3)$$

と仮定し、Hamilton の原理により、変位の一次的取扱いを行なって得られたものである。なお、式(2)は丸棒の一端に応力を与えて得られたものであるが、本研究では一端に変位速度  $\partial u_z / \partial t$  を与えた場合にも適用できるものとした。

## 3 解 析 法

2本の同径同質丸棒を軸方向に衝突させる縦衝撃を対象とすれば、衝突面の軸方向変位は半径方向に一様になり、この端面は一定変位速度を受けることになる。

そこで第1図のように丸棒の一端に一定変位速度  $V$  を与え、他端は自由とすれば、初期条件と境界条件はつぎのようになる。



第1図 縦衝撃を受ける丸棒

$$(u_z)_{t=0} = \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)_{z=l} = 0, \quad \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)_{z=0} = VH(t) \quad (5)$$

ここで  $l$  は丸棒の長さ、 $H(t)$  は  $t > 0$  で 1、 $t \leq 0$  で 0 となるヘビサイドのステップ関数である。第1図の場合の解を求めるためには、式(4)、(5)のもとで式(2)を解けばよいことになる。

そのために初期条件式(4)のもとで式(2)をラプラス変換すれば、 $\bar{u}_z$  を  $u_z$  のラプラス変換形として

$$\left( c_0^2 + \frac{\nu^2 a_0^2}{2} p^2 \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial z^2} = p^2 \bar{u}_z \quad (6)$$

となり，ここで  $p$  はラプラス変換の演算子で

$$\bar{u}_z = \int_0^{\infty} u_z e^{-p't} dt$$

である。

式(6)の一般解は任意定数を  $A, B$  として

$$\bar{u}_z = A e^{kz} + B e^{-kz} \quad (7)$$

と表わされ，

$$k = \frac{ap}{\sqrt{p^2 + b^2}}, \quad a = \frac{\sqrt{2}}{\nu \alpha_0}, \quad b = \frac{\sqrt{2} c_0}{\nu \alpha_0} \quad (8)$$

である。

また境界条件式(5)をラプラス変換して式(7)に代入すれば，任意定数  $A, B$  は

$$A = \frac{e^{-kl}}{e^{kl} + e^{-kl}} \frac{V}{p^2}, \quad B = \frac{e^{kl}}{e^{kl} + e^{-kl}} \frac{V}{p^2} \quad (9)$$

のように決定される。この定数  $A, B$  を式(7)に代入し，便宜上  $\alpha = z/l$  とすれば， $\bar{u}_z$  はつぎのようになる。

$$\bar{u}_z = \frac{\cosh\{kl(1-\alpha)\}}{\cosh(kl)} \frac{V}{p^2} \quad (10)$$

式(10)を逆変換して  $u_z$  を求めれば， $i$  を虚数単位として

$$u_z = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \bar{u}_z e^{p't} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} \frac{\cosh\{kl(1-\alpha)\}}{\cosh(kl)} \frac{V}{p^2} e^{p't} dp \quad (11)$$

となるが，逆変換積分は留数計算のみによって求めることができる。

式(11)の被積分関数の極は

$$\left. \begin{aligned} p &= 0, \\ kl &= \pm i \frac{2n+1}{2} \pi \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

であるから，これらの極による留数より  $u_z$  を計算すれば

$$u_z = V \left[ 1 - 2 \left( \frac{al}{b} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \eta(n)}{\left( \frac{2n+1}{2} \pi \right)^3} \cdot \cos \left\{ \left( \frac{2n+1}{2} \right) (1-\alpha) \pi \right\} \cdot \sin \{ t \eta(n) \} \right] \quad (13)$$

が得られ，ここで  $\eta(n)$  はつぎのように表わされる。

$$\eta(n) = \frac{2n+1}{2 \sqrt{(al)^2 + \left( \frac{2n+1}{2} \pi \right)^2}} \pi b \quad (14)$$

式(13)よりひずみ  $\partial u_z / \partial z$  を求めれば

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = - \frac{V}{c_0} \frac{2al}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \eta(n)}{\left( \frac{2n+1}{2} \pi \right)^2} \cdot \sin \left\{ \left( \frac{2n+1}{2} \right) (1-\alpha) \pi \right\} \cdot \sin \{ t \eta(n) \} \quad (15)$$

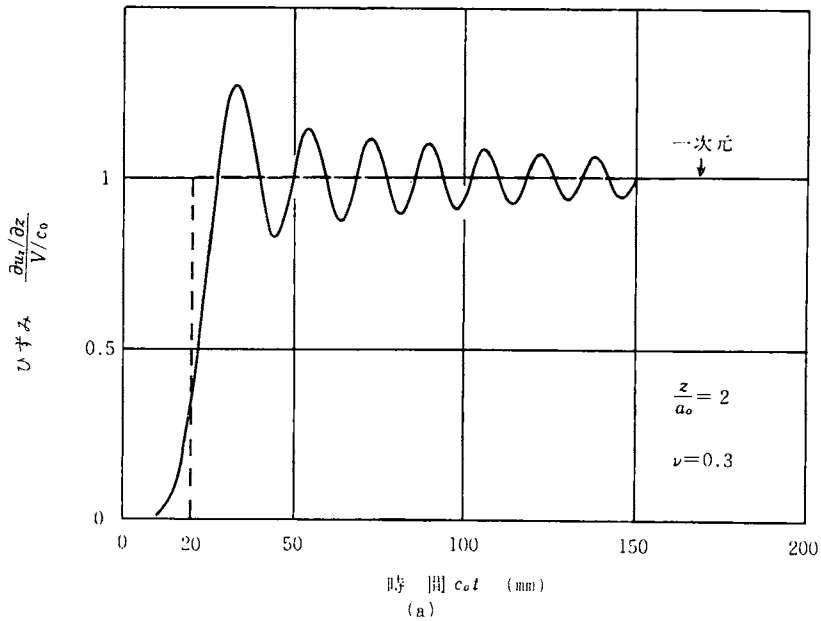
となり，ひずみは三角関数を含む無限級数で表わされることになる。参考までに変位速度  $\partial u_z / \partial t$  はつぎのようになる。

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = V \left[ 1 - 2 \left( \frac{al}{b} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \eta^2(n)}{\left( \frac{2n+1}{2} \pi \right)^3} \cdot \cos \left\{ \left( \frac{2n+1}{2} \right) (1-\alpha) \pi \right\} \cdot \cos \{ t \eta(n) \} \right] \quad (16)$$

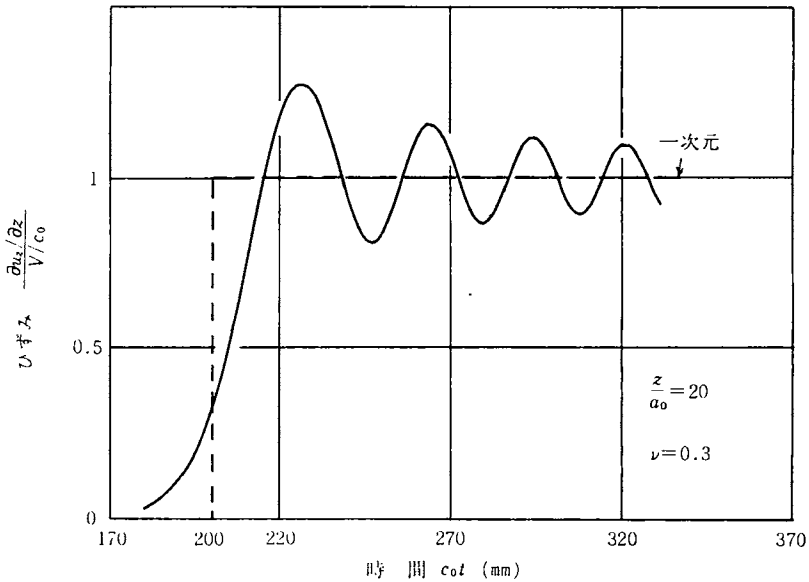
4 数値計算結果

式(15)によって座標  $z$  固定の場合と時間  $t$  固定の場合のひずみを数値計算した。丸棒の長さ  $l$  と半径  $a_0$  は後述の実験と比較するためにそれぞれ 2,400 mm, 10 mm とし、ポアソン比  $\nu$  は 0.3 の場合をおもに計算した。なお、級数の収束はあまりよくなく、いずれも精度は 1% 以下の誤差におさえるようにしたが、 $n=2,000$  前後の項数が必要であった。

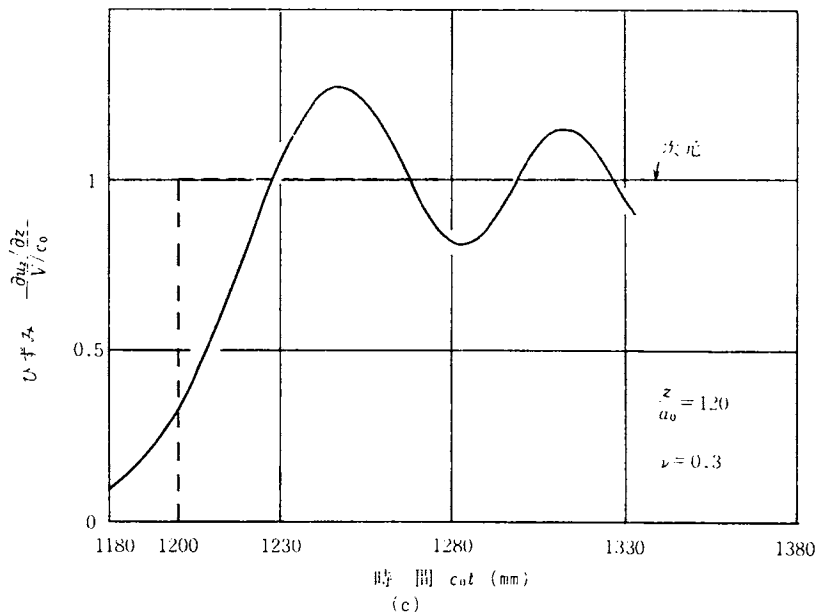
第 2 図 (a), (b), (c) は時間と位置によるひずみ分布を知るために、一般化された時間  $c_0 t$  とひずみ



第 2 図



第 2 図

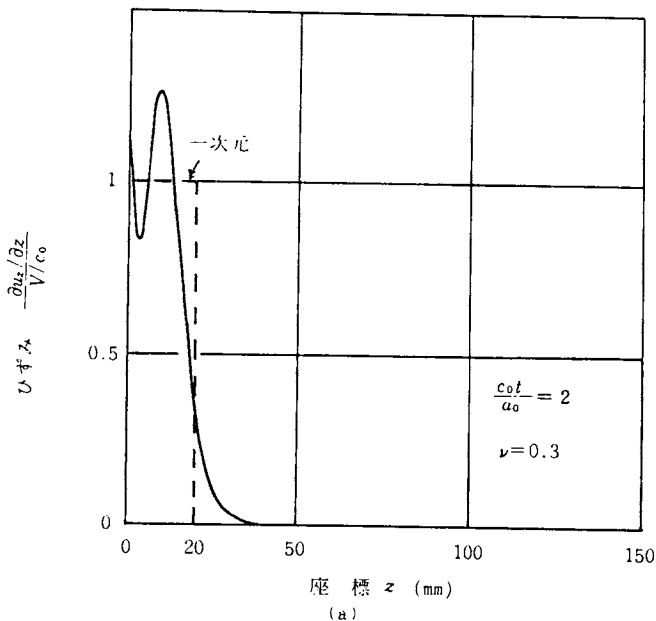


第2図 座標固定の場合のひずみ

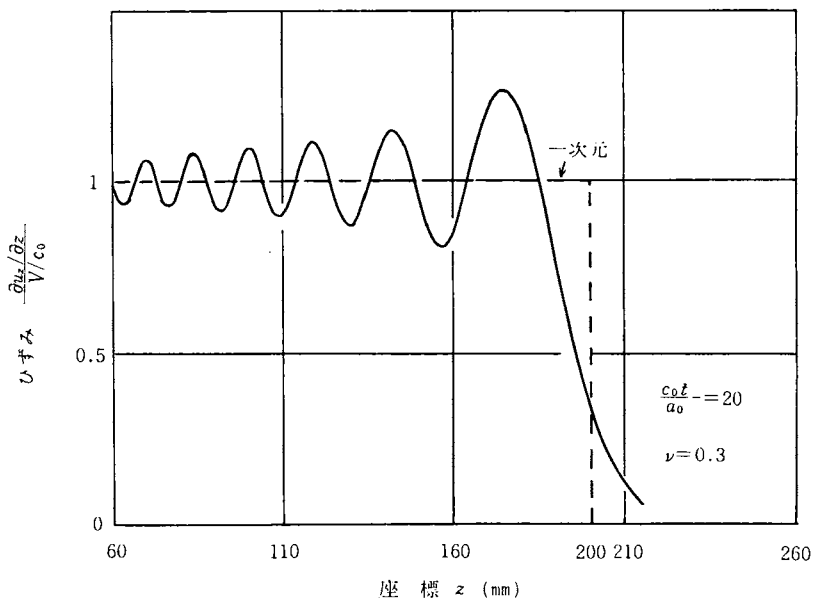
み  $(\partial u_z / \partial z) / (V/c_0)$  の関係を衝撃端からの位置  $z/a_0$  が 2, 20, 120 の場合に示したものである。図中点線は一次元理論式(1)による結果である。波頭近傍は一次元の結果を中心に振動し、位置別に見れば衝撃端からの位置が遠ざかるにつれて振動の周期は長く波頭での立上り勾配はゆるやかになるが、いずれも最大ひずみは等しい。この波頭での最大ひずみは一次元の場合の約 27% で、時間の経過とともに振幅は減少して一次元の結果に一致する。またいずれも一次元波頭の位置では、本結果が一次元のほとんど 1/3 に等しくなっており、これは Skalak が時間無限大の場合に得た結果によく一致している。なお全体的な傾向も Skalak の結果と同様である。

第3図 (a), (b), (c) は時間を固定したときに、ひずみの  $z$  方向分布を示したもので、第2図の場合の横軸の時間を位置に入れ換えて見ればよい。

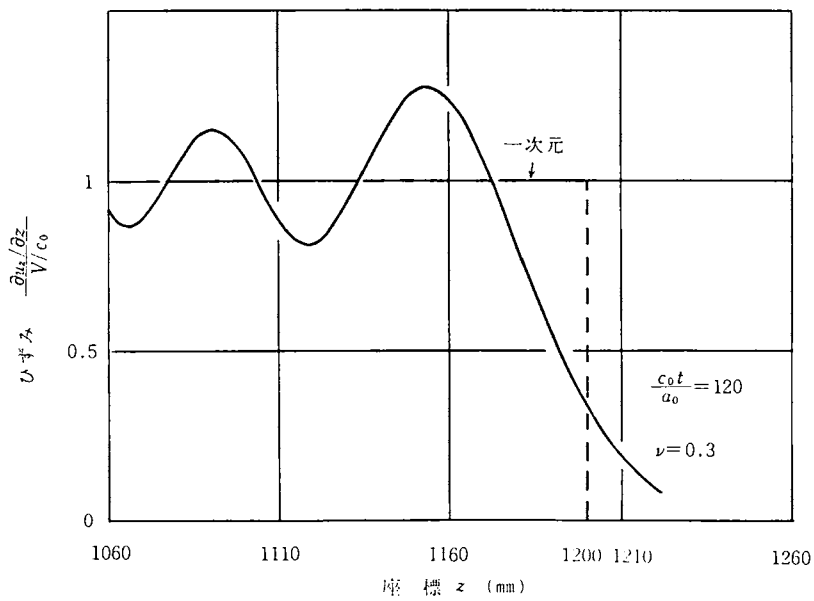
第4図はポアソン比  $\nu$  を 0.25, 0.3, 0.33 としたときのひずみと時間の関係の1例を示したもので、わずかではあるが、ポアソン比が大きければ勾配も大きく振動の周期が短くなる。



第3図

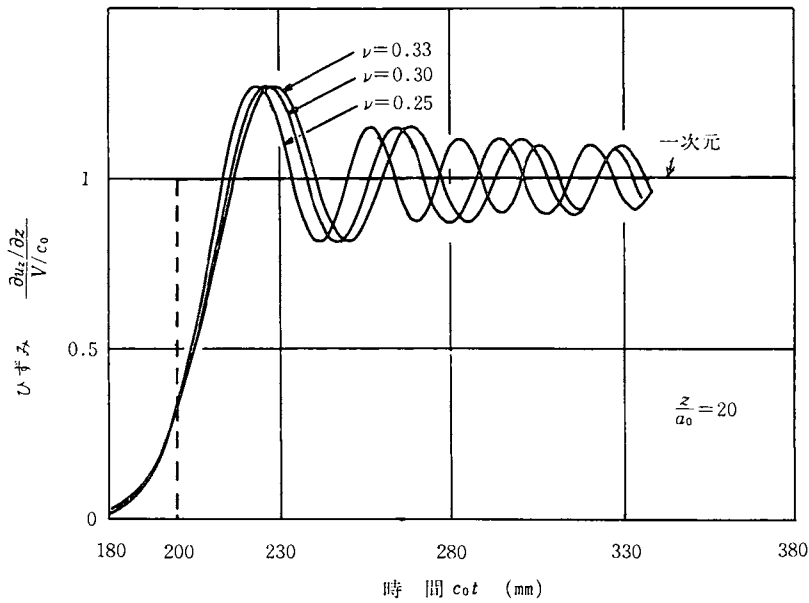


第3図 (b)



(c)

第3図 軸方向ひずみ分布 (時間固定の場合)

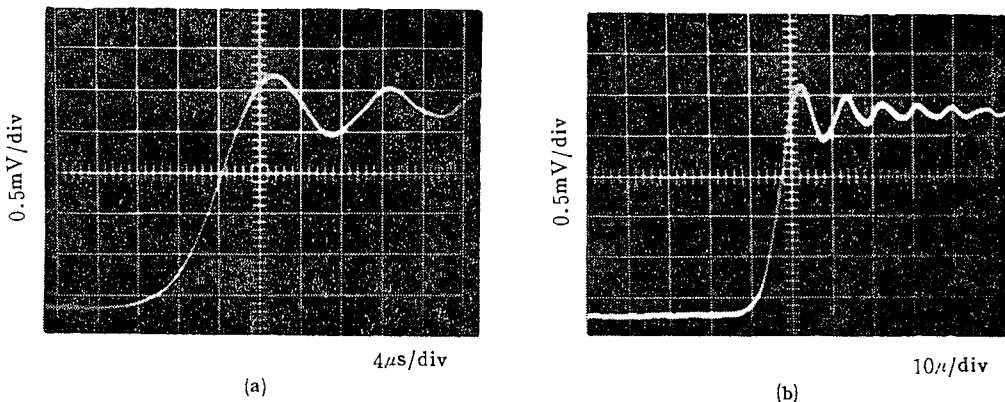


第4図 ひずみに及ぼすポアソン比の影響

### 5 検 討

上述の結果を実験的に確認するために、水平方向に支持した前記寸法の炭素鋼製みがき丸棒（JIS S45 C—D 相当品）に、同径同質で長さ 1000 mm の打撃丸棒を同軸上端面に衝突させた。そしてひずみゲージ（共和 K—3—AL—11）によりシンクロスコープ（岩崎 DS 5015）を用いてひずみ変動を実測した。打撃丸棒はスプリングコイルのひずみエネルギーを利用して加速されるもので、測定用丸棒に外乱がないように配慮した。なお各丸棒の衝突面は入念に旋盤仕上げの後 500 番エメリー紙で軽く仕上げ、できる限り面接触状態を得るようにした。

第5図は、打撃速度 4.2 m/s、衝突面から 1200 mm での測定例で、第2図と同様な傾向を示している。この実験では測定技術上、掃引用のひずみゲージが正確にどのレベルで作用したか決めがたいため、この結果に第2図の横軸を正確に一致させて対応させることは困難であった。そのために相対的傾向のみ比較すれば、波頭近傍では一次元の結果を中心にひずみが振動する現象は明らかで、最大振幅はこの実験では約 15% となり理論の約 27% よりも小さくなっている。このように振幅は小



第5図 実測ひずみ波形

さいが、振動の周期  $T$  に注目すれば、第1の山と第2の山の間隔は実験で  $T=12 \mu s$ 、理論で  $T=13 \mu s$  とほぼ一致する。振幅が小さい原因は、とくに立上り初期では衝突面がその端面の凹凸のために理想的な等質の弾性平面接触状態になっていないであろうことにもよるかも知れないが、本理論解が厳密解ではないために詳細な原因を考察することには多少の無理を感じず。なお接触状態を変えて、接触面積を小さくした丸棒では第5図の場合より振幅がさらに小さくなり、実験では衝突面の接触状態に十分注意する必要がある。

ひずみゲージの応答性についてはゲージ長さが3mmであるからひずみゲージの特性が測定結果に及ぼす影響はきわめて小さく、またシンクロスコープの周波数帯域は200 KHzであるから本結果のようなひずみ変動は十分正確に測定されたと考えられる。

この測定位置のように衝突面から十分離れた位置では、理論結果は実験結果にほぼ一致すると言えるから、ひずみが波頭近傍で振動する主因は垂直ひずみによる横慣性にあることが確認される。それゆえ、Loveの式によっても波頭近傍のひずみ変動をかなりよく表現し得ることになる。

衝突面に近い他の位置での測定結果も、波頭近傍に関する限り、ひずみの振動状態は第5図の場合とほぼ同様で周期は短くなり、第2、3の山以後に小さい不規則な振動が観測された。これは第5図(b)の第5、6の山の近傍にもわずかに認められる。しかしこれは衝突面に発生するせん断ひずみ波が到達したことを示し、理論ではせん断ひずみ成分を無視しているのでこの検討は別の機会にゆずりたい。

## 6 む す び

本研究では同径同質丸棒を衝突させる場合を対象として、横慣性を一次的に考慮したLoveの式に基づく理論解を求め、とくにひずみ波頭近傍の特性を明らかにした。理論仮定に忠実な一定変位速度を与えることは実験技術上高度の注意を要することであったが、実験結果を理論結果と比較すれば理論結果は実際の現象をかなりよく説明し得るものであると思う。

理論結果の要点をまとめればつぎのようになる。

- (1) ひずみは波頭で最大となり、一次元の結果より約27%大きく、その後振動しながら減衰して一次元の結果に近づく。
- (2) 衝突面から離れるにしたがい、波頭の立上り勾配は小さく振動の周期は長くなるが、最大ひずみは一定である。
- (3) 影響は小さいが、ポアソン比が大きいほど波頭の立上り勾配は大きく、振動の周期は短くなる。

おわりに、本学 米谷茂教授にいろいろとご検討を、また本学 田上繁技官には実験を手伝っていただいたことを附記し、ここに感謝申し上げます。なお級数の計算には本学計算機センターFACOM 230-35を使用した。

## 参 考 文 献

- 1) R. Skalak, J. Applied Mech., 79 (1957), 59.
- 2) R. Folk, G. Fox, C. A. Shock and C. W. Curtis, J. Acoust. Soc. Amer., 30-6 (1958), 559.
- 3) C. W. Curtis, J. Applied Phys., 25 (1954), 928.
- 4) R. M. Davies, Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A, 240 (1948), 374.
- 5) A. E. Love, A Treatise of Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge Univ. press 4th edition, (1927), 287.

(昭和48年5月19日受理)



## 附 録

Hamilton の原理による式(2)の誘導

任意時刻  $t_0$  と  $t_1$  の間で物体の全ひずみエネルギーを  $U$ ，全運動エネルギーを  $K$ ，外力によるポテンシャルエネルギーを  $F$  とすれば，変分記号を  $\delta$  として

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U - K + F) dt = 0 \quad (\text{附-1})$$

が Hamilton の原理である。

第1図の変位速度  $V$  の代わりに応力  $\sigma_0$  を与え，運動エネルギーは  $\partial u_z / \partial t$  によるものと  $\partial u_r / \partial t$  によるもののみを考えて  $U$ ， $K$ ， $F$  を式(附-1)に代入すれば

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_0^l \frac{EA}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 dz - \int_0^l \frac{\rho A}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} \right)^2 dz - \int_0^l \left\{ \int_A \frac{\rho}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} \right)^2 dA \right\} dz + A \sigma_0 (u_z)_{z=0} \right] dt = 0 \quad (\text{附-2})$$

が得られ，ここで  $A$  は丸棒の断面積， $E$  は縦弾性係数， $\rho$  は密度である。

上式の左辺積分第3項の計算に式(3)を代入して整理すれば，

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left\{ -E \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \rho \frac{(\nu a_0)^2}{2} \frac{\partial^4 u_z}{\partial z^2 \partial t^2} \right\} \delta u_z dz dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left\{ E \frac{\partial u_z}{\partial z} + \rho \frac{(\nu a_0)^2}{2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial z \partial t^2} - \sigma_0 \right\} \delta u_z \right]_0^l dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{附-3})$$

が得られ， $c_0^2 = (E/\rho)$  とすれば，式(2)が上式左辺の積分第1項の中を0とおいて導びかれることになる。

(昭和48年5月19日受理)