

シリコン制御整流素子を含む回路の過渡応答について

松 村 文 夫

On the Transient Response of Silicon Controlled Rectifier Circuit

by Fumio MATSUMURA

Abstract

In recent years, silicon controlled rectifier (abbr. SCR) has been developed, and broadly applied to automatic control system. But it is difficult to determine the transient response of SCR circuit, because it has the character of nonlinearity and intermittence.

In this paper, the author treats the dynamic characteristics of the center-tap rectifier circuit with SCR when the output current flows continuously, and solves how to choose the magnitude of the series inductance in order to flow the output current continuously. The experiments and theoretical calculations of the transient response are carried out by means of indicial response method and frequency response method.

As a result of both investigations, it is introduced that the transfer function of SCR circuit is approximately equal to "dead time" the interval of which varies by the time of input change.

1. ま え が き

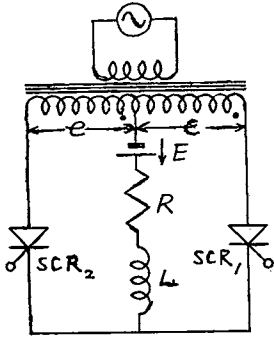
従来より制御格子付水銀整流器、サイラトロンなどが制御を要する整流回路に使われたり、直流電動機の駆動に使われたりしていたが、近年になりシリコン制御整流素子（以下 SCR と略す）が開発され、その小形高性能の特質によりさらに広い分野に使われるようになった。ことにそのターンオン時間、ターンオフ時間が短いという特長から高い周波数領域まで使われ、速応性のすぐれたものができる可能性がある。そしてこれが自動制御系に使用される場合にこの系の伝達関数を求めること、適当な保護装置をつけること、応答の早いゲート回路を作ることなどが肝要となってくる。これらのうち伝達関数を求める分野には問題点が多く、いろいろの面から研究が行われているが^{1)~4)}、いずれも複雑な結果が導かれており実際面への応用には困難が多い。本文もある特殊な例についてのみ研究を行ったものであるが、できるだけ実際面への応用が容易な形になるようにした。

本文では SCR の過電流保護と制御性能向上の目的で出力回路に直列にインダクタンスを接続した場合に、その過渡特性がどのようなことになるかということインディシャル応答と周波数応答の両方の面から実験および解析を行ってみた。

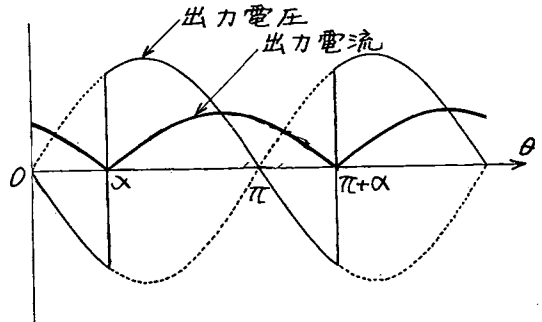
またどの程度のインダクタンスを接続すればよいかという設計上の資料となる図表を掲げてある。

2. 接続すべきリアクタンスの決定

SCR が直流電動機とか蓄電池のように回路の抵抗がきわめて小さいような負荷を持つ場合には、そのままでは印加電圧と逆起電力との差が僅かであっても SCR には過大な電流がパルス状に流れて好ましくない。また直流電動機駆動などの場合に電流が断続的に流れると過渡状態における時定数が長くなり好ましくない。そこで電流を平滑にする目的で、あるいは SCR の十字結線の場合には必要以上の循環電流を抑える目的で電機子回路にインダクタンスを接続する。しかしインダクタンスの値が大き過ぎても回路の時定数を大きくすることになり良くない。ここでは適当なインダクタンスの値を定める目的で、電流が連続して流れるかどうかという臨界的な状態を調べてみる。



第1図 SCRによる中間タップ形整流回路



第2図 電圧および電流波形（臨界状態）

今回路は第1図の単相中間タップ形回路とし、負荷回路の全抵抗を R 、リアクタンスを $X(=\omega L)$ とする。さらに理論をより一般的に拡張するために電動機の誘起起電力とか、電池の電圧に相当する逆起電力 E （時間的に一定とする）が存在するものとする。この逆起電力の値が大きければ大きいほど電流は断続し易くなる。また SCR の特性は理想的で正方向抵抗 0、逆方向抵抗無限大、ターンオン時間およびターンオフ時間を 0 とする。

今、点弧回路より点弧パルスが左右の SCR に交互に送り込まれ、位相 α のところで点弧させた場合につき臨界の条件を求める。

この臨界の状態は第2図に示す電流波形のように $\theta = \alpha$ および $\theta = \pi + \alpha$ において $i = 0$ になることである。

$\alpha \leq \theta \leq \pi + \alpha$ においては、いずれか一方の SCR が導通しているので次式が成り立つ。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e - E = E_m \sin \omega t - E \quad (1)$$

$\omega t = \theta$ とおけば (1) 式は

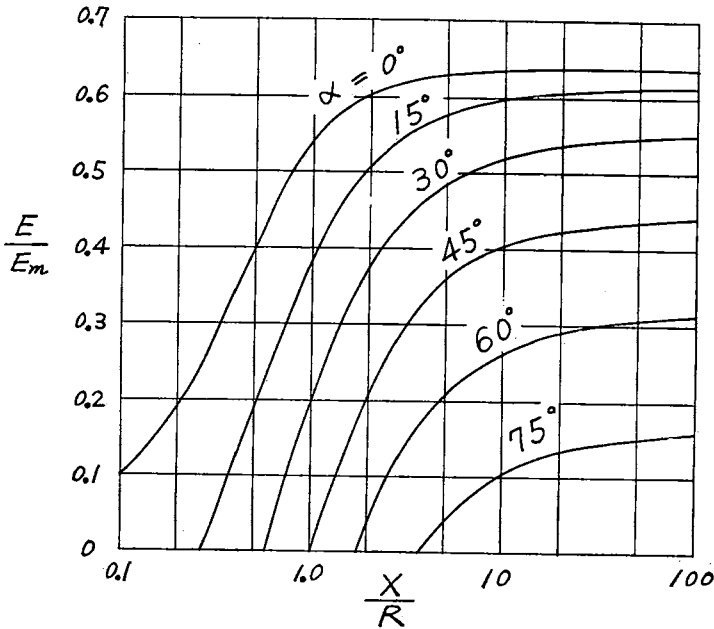
$$X \frac{di}{d\theta} + Ri = E_m \sin \theta - E \quad (2)$$

(2) 式と先の条件より臨界の条件を求めると次式を得る。

$$\frac{E}{E_m} = \frac{\sin(\phi - \alpha)}{1 + \left(\frac{X}{R}\right)^2} \cdot \frac{1 + \epsilon^{-\frac{R}{X}\pi}}{1 - \epsilon^{-\frac{R}{X}\pi}} \quad (3)$$

$$\text{ここで } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

(3) 式を α をパラメータとして画くと第3図の曲線群となる。図は点 $(X/R, E/E_m)$ がそれぞれの α に対応する曲線の右下にあれば電流は連続となり、左上にあれば断続となることを示している。したがって回路の抵抗の大きさ、点弧角の変化範囲、逆起電力の変動の範囲などがわかれば、電流を連続させるために必要なリアクタンスの値をただちに読みとることができる。



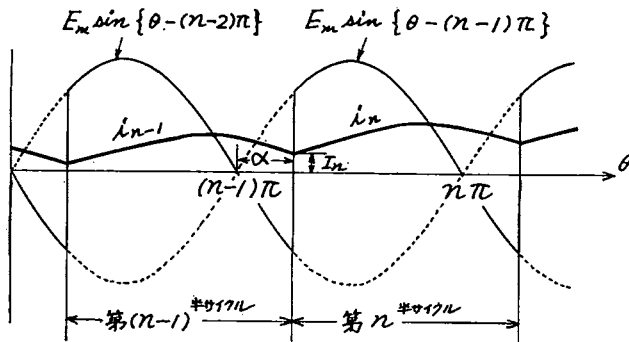
第3図 電流を断続させない条件を求める線図

3. ステップ入力に対する応答

最初、入力信号を点弧角、出力信号を負荷回路の電流とするブロックを考え、この入出力信号間の伝達関数を求めてみる。ただし前章の結果を用いて適当なインダクタンスの大きさを決め、今考えようとするどのような時にも電流は連続して流れるものとする。

点弧角が $t < 0$ において α_0 であり、 $t = 0$ において α_0 から α にステップ状に変化した場合に出力電流がどのように変化するかを調べる。

いま定常状態に落ち着くまでの任意の第 $(n-1)$ 半サイクル、第 n 半サイクルを第4図のようにとる。(n は整数)



第4図 過渡状態における電流波形

第 n 半サイクルにおいて次の微分方程式が成り立つ。

$$X \frac{di_n}{d\theta} + Ri_n = E_m \sin \{\theta - (n-1)\pi\} \quad (4)$$

初期条件として、第 n 半サイクルの初めにおいて仮りに $i_n = I_n$ であるとすれば (4) 式より i_n が求まる。

$$i_n(\theta) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin \{\theta - (n-1)\pi - \phi\} + \left\{ I_n - \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin(\alpha - \phi) \right\} \varepsilon^{-\frac{R}{X} \{\theta - (n-1)\pi - \alpha\}} \quad (5)$$

ここで $i_n(\theta)$ を第 n 半サイクルにわたって平均し、その値を $I(n)$ とする。

$$I(n) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cos(\alpha - \phi) - \frac{X}{\pi R} \left\{ I_n - \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin(\alpha - \phi) \right\} (\varepsilon^{-\frac{R}{X}\pi} - 1) \quad (6)$$

L の存在のために、第 $(n-1)$ 半サイクルの終りでは、同じく $i_{n-1} = I_n$ ということ を考慮し、上式と同様にして第 $(n-1)$ 半サイクルにおける平均を求めると次式を得る。

$$I(n-1) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \cos(\alpha - \phi) - \frac{X}{\pi R} \left\{ I_n - \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + X^2}} \sin(\alpha - \phi) \right\} (1 - \varepsilon^{-\frac{R}{X}\pi}) \quad (7)$$

(6), (7) 式より I_n を消去して $I(n)$ に関する次の漸化式を得る。

$$I(n) = I(n-1) \varepsilon^{-\frac{R}{X}\pi} + \frac{2E_m \cos \alpha}{\pi R} (1 - \varepsilon^{-\frac{R}{X}\pi}) \quad (8)$$

変化前の出力電流の平均値を $I(0)$ とすれば (8) 式の解は

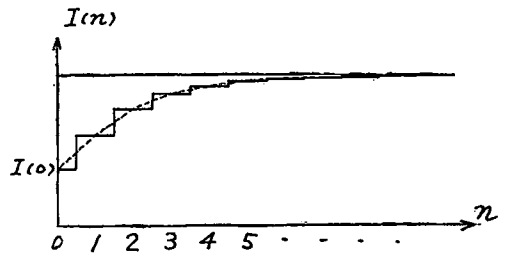
$$I(n) = \frac{2E_m \cos \alpha}{\pi R} (1 - \varepsilon^{-\frac{R}{X}\pi n}) + I(0) \varepsilon^{-\frac{R}{X}\pi n} \quad (9)$$

(9) 式はおよそ第5図のごとき階段状の応答となる。電流の変化分を表すように書き換えれば、

$$I(n) - I(0) = \left\{ \frac{2E_m}{\pi R} \cos \alpha - I(0) \right\} \times (1 - \varepsilon^{-\frac{R}{X}\pi n}) \quad (10)$$

(10) 式までは階段状の関数であるが、これでは一般的に取扱いにくく、連続時間関数 $i(t)$ で近似するために $n\pi = \omega t$ とおけば、

$$i(t) - I(0) = \left\{ \frac{2E_m}{\pi R} \cos \alpha - I(0) \right\} \times (1 - \varepsilon^{-\frac{R}{L}t}) \quad (11)$$



第5図 インディシャル応答

すなわち、出力電流の変化分は時定数 L/R をもって指数関数的に変化していることを示している。(11) 式のラプラス変換を $O(s)$ とすれば

$$O(s) = \left\{ \frac{2E_m}{\pi R} \cos \alpha - I(0) \right\} \frac{\frac{R}{L}}{s + \frac{R}{L}} \quad (12)$$

入力のラプラス変換を $I(s)$ とすれば

$$I(s) = \frac{\alpha - \alpha_0}{s} \quad (13)$$

したがって伝達関数 $G(s)$ は

$$G(s) = \frac{\left\{ \frac{2E_m}{\pi R} \cos \alpha - I(0) \right\}}{(\alpha - \alpha_0)} \cdot \frac{\frac{R}{L}}{\left(s + \frac{R}{L}\right)} \quad (14)$$

ここで $I(0) = \frac{2E_m}{\pi R} \cos \alpha_0$ であるから

$$G(s) = \frac{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}{(\alpha - \alpha_0)} \cdot \frac{\frac{2E_m}{\pi L}}{\left(s + \frac{R}{L}\right)} \quad (15)$$

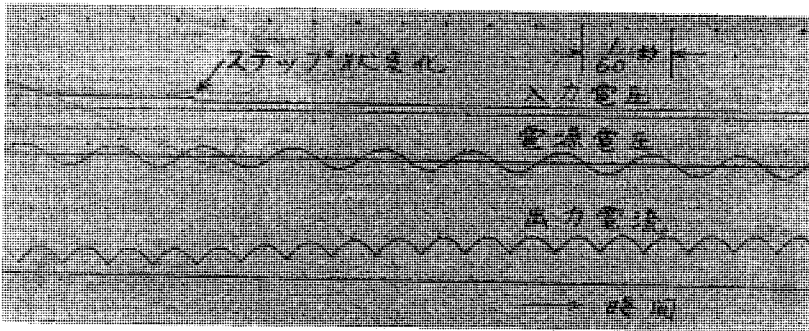
非線形性のゆえに伝達関数は α_0, α を含んだ値となる。ここで電圧を入力信号、電流を出力信号とする LR 直列回路の伝達関数は $1/(Ls+R)$ であることを考慮すれば、SCR の伝達関数は負荷回路のそれと分離できて、入力信号を点弧角、出力信号を SCR 出力電圧とする伝達関数は次式のように入ラプラス演算子 s を含まぬ定数となる。

$$F(s) = \frac{2E_m}{\pi} \cdot \frac{(\cos \alpha - \cos \alpha_0)}{(\alpha - \alpha_0)} \quad (16)$$

ただし、以上は平均化という手段を用いていることと、 $t=0$ 附近の取扱いをあいまいにしているので、電源電圧半サイクルの時間に相当する程度の時間的経過（むだ時間、一次おくれ、その他）はつかめていない。

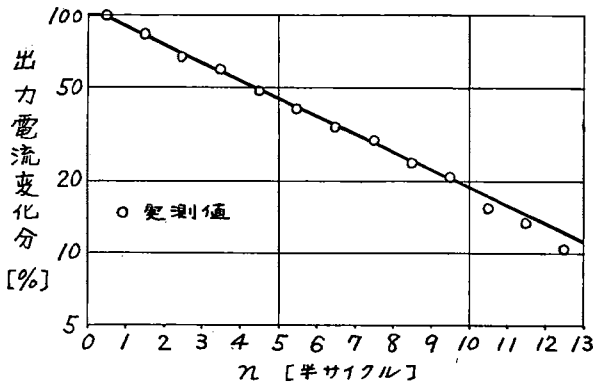
そこで実際のSCR回路について、(15) 式をたしかめ、さらに時刻 $t=0$ 附近の様子も知るために実験を行ってみた。ここでは入力信号を点弧制御回路への入力電圧とみてある。点弧回路には第8図（後出）のようにNPN形トランジスタ(2SC121)、ユニジャンクショントランジスタ(UJT)、ツェナーダイオード(ZD)などを用い、SCRとしては東芝M8346-100(定格値……繰返しせん頭逆耐電圧100V、平均順電流10A)、リアクトルとしては空隙付リアクトルの線形部分を用いた。

第6図のオシログラムは入力電圧を突変させて、点弧角を 77° から 66° にした場合の入力電圧、電源電圧、出力電流を示す。



第6図 ステップ状変化に対するオシログラム

この出力電流波形をステップ状変化が起った時間を時刻0とし、ここから半サイクルの間を第1半サイクル、次の半サイクルを第2半サイクル……としてオシログラムからこの面積を読みとって行き、それらの最終値からの変化分を片対数方眼紙にとったものが第7図である。



第7図 インディシャル応答を片対数方眼紙にとった図

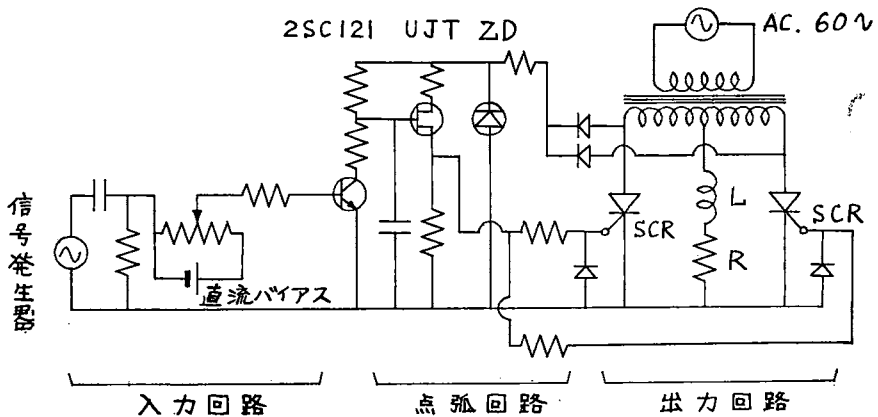
第11半サイクル以降は最終値に近く誤差率が大いといて、この部分を捨てて最小二乗法により実験直線を描けば、ほとんどの実測値がこの直線の上になり、指数関数的に変化していることをよく表わしている。この変化の時定数は LR 回路の時定数に等しい。また、図より半サイクルの約40%程度のむだ時間が存在するのがうかがわれる。

また十数回行った別の実験によれば、指数関数的経過になることと、その時定数には変化はないが、むだ時間の大きさがいろいろに違っている。これはステップ状変化が電源電圧のどの位相で起るかにより変化するもので、その大きさは最大半サイクルである。

がいろいろに違っている。これはステップ状変化が電源電圧のどの位相で起るかにより変化するもので、その大きさは最大半サイクルである。

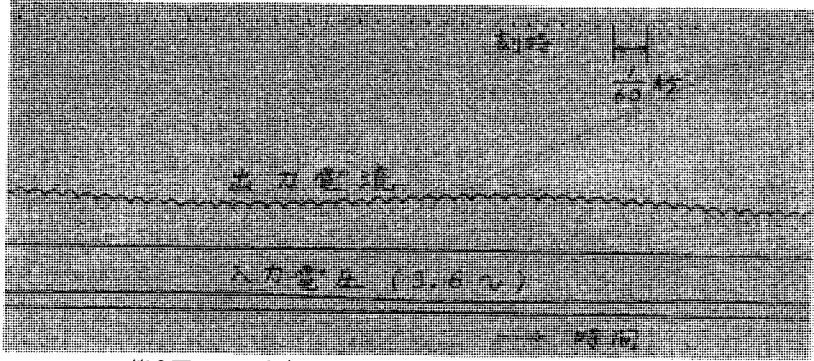
4. 正弦波入力に対する応答

前章では SCR の点弧角をステップ状に変化させたときの解析と実験を行ったが、ここでは点弧位相制御回路へ入る電圧を入力信号と考え、SCR によって整流される電流を出力信号と考える場合の要素の周波数応答を決定するための実験を行った。入力信号は直流分と基本波であるが、出力信号は直流分、基本波およびたくさんの高調波成分を含む電流であるから、ここで求める伝達関数はいわゆる記述関数に相当する。



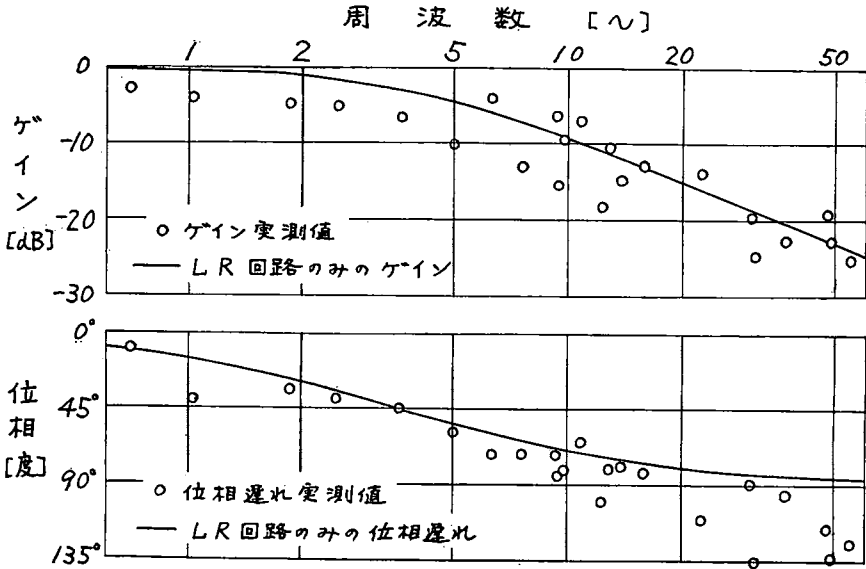
第8図 周波数特性測定回路

実験回路を第8図に示す。ここでも出力電流を断続させないで流す必要があるので、負荷抵抗に直列に線形インダクタンス L を接続した。出力電流にはこの L により一次遅れの特性が加わるが、この影響は前章のように分離することができる。周波数特性の測定にあたっては直流バイアスと発振器の出力レベルを調整して、入力電圧を $1.8 \pm 0.6V$ の範囲で正弦波状に変化させた。制御電圧波形と出力電流波形の関係を示すオシログラムの一例を第9図に示す。



第9図 正弦波状変化に対するオシログラム

約30例についての各周波数に対するオシログラムから、フーリエ解析により制御電圧と出力電流の基本波の振幅および位相を求め、ゲイン、位相遅れを計算し、その結果を第10図のボード線図にまとめた。図では周波数0でのゲインを0 dBとしてある。



第10図 SCR回路のボード線図

測定値は非常にばらつきが大きいですが、これは測定誤差およびデータ処理上の誤差にもよるが、大部分は入力電圧と交流電圧との位相関係が全くランダムであるために入り込むものである。

実測値のゲインは傾向として、LR回路のみの応答を示す曲線にはほぼ一致しているのに対し、位相は高周波域に行くほど曲線の下側に來ることから、むだ時間要素の特性に似ていると言える。このことは前章のインディシャル応答の実験の結果とも一致する。

SCRがむだ時間要素で表せるということは、かなり高い周波数（極端には電源周波数に近い程度）まで一様に信号を伝達し得るということであり、少し奇異に感ぜられる。このことをげん密に理論的に取扱うことはかなり困難であるし、結果も複雑なものになると予想されるので、ごく大ざっぱに次のように考えてみる。

- (a) 信号周波数を f/m とする。（ f は電源周波数， $m=1, 2, 3, \dots$ ）
- (b) 電源電圧，信号電圧とも $\theta=0$ から始まっているといる。

(c) 各半サイクルの出力の大きさはその半サイクルの初めにおける入力大きさにより決り、しかもその出力の大きさが半サイクルの間一定と考える。

すなわち、入力信号と出力信号の関係が第11図のごとくなっているとする。この仮定はきわめて大ざっぱではあるが、点弧回路の動作様式を考えるとかなり妥当なものであり、さらに、信号周波数が低くなるにつれて実際のものに近くなる。

この出力の階段状の波形を次式の形にフーリエ展開する。

$$y(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\theta \quad (17)$$

しかしながら、記述関数を求めるのに必要なのは基本波成分だけであるから $k=1$ の場合、すなわち a_1, b_1 のみを求めればよい。

信号電圧の振幅を単に1として $\sin(2\pi \frac{f}{m} t) = \sin \theta$ とおけば

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\theta) \sin \theta \cdot d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{2m-1} \int_{\frac{n}{m}\pi}^{\frac{n+1}{m}\pi} \sin\left(\frac{n}{m}\pi\right) \sin \theta \cdot d\theta = \frac{m}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \quad (18)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(\theta) \cos \theta \cdot d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{2m-1} \int_{\frac{n}{m}\pi}^{\frac{n+1}{m}\pi} \sin\left(\frac{n}{m}\pi\right) \cos \theta \cdot d\theta$$

$$= \begin{cases} \frac{m}{\pi} \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{m}\right) - 1 \right\} & (m \geq 2) \\ 0 & (m = 1) \end{cases} \quad (19)$$

出力の基本波を y_1 とおくと

$$y_1(\theta) = a_1 \sin \theta + b_1 \cos \theta = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin(\theta + \phi) \quad (20)$$

$$\text{ここで } \phi = \tan^{-1}\left(-\frac{b_1}{a_1}\right)$$

信号の振幅が1であったから (20) 式の $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ はそのままゲインを表し、 ϕ は位相差を示す。位相差は簡単に式の上で求まる。すなわち

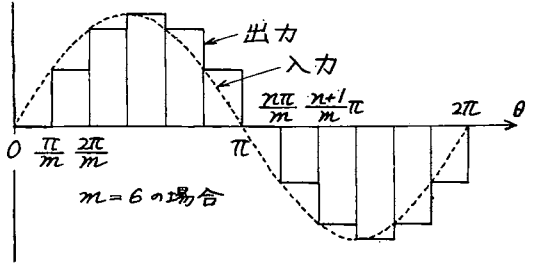
$$\tan \phi = \tan\left(-\frac{b_1}{a_1}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) - 1}{\sin\left(-\frac{\pi}{m}\right)} = -\tan\left(\frac{\pi}{2m}\right)$$

$$\therefore \phi = -\frac{\pi}{2m} \quad (21)$$

m は信号周波数に反比例する値であるから (21) 式は「位相遅れは信号周波数に比例する」という結果となる。

次にゲインに関して計算すると、 $m=1$ のとき $a_1=b_1=0$ でゲインは0となり、 $m \geq 2$ のときゲインは次式となる。

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \frac{m}{\pi} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right) + \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{m}\right) - 1 \right\}^2} = \frac{2m}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2m}\right) \quad (22)$$



第11図 入出力関係を簡略化した図

(22) 式からゲインを数値計算し、位相遅れと一緒に書けば第1表となる。

第1表 ゲインおよび位相遅れの数値計算例

m	1	2	3	4	5	6
ゲイン	0	0.900	0.955	0.974	0.983	0.988
位相遅れ	—	45°	30°	22°30′	18°	15°

m	7	8	9	10	...	∞
ゲイン	0.993	0.994	0.995	0.996	...	1
位相遅れ	12°51′	11°15′	10°	9°	...	0°

ゲインは $m=1$ を除きほとんど1に近くなり、位相遅れが信号周波数に比例するというのもあわせて考えれば、やはりむだ時間要素の伝達関数に近いということになり、実験の結果とよく合致する。

5. 結 言

以上、SCR を含む整流回路の動特性につきインディシャル応答と周波数応答の両方の面から実験および解析を行ってみた。この結果いずれの面からもこのような SCR および SCR 点弧回路の伝達特性は入力変化が電源電圧のどの位相で起るかにより大きさの変化するむだ時間要素にきわめて近いものになることが明らかにされた。その値は使用範囲では半サイクル以下の小さいもので、電動機速度制御などの場合にはほとんど問題にならないが、SCR の過電流制限を考える時には重要となってくる。

終りにあたって、本研究は昭和36年度文部省内地研究員制度による研究中に開始されたものであり、懇切なご指導をいただいた東京工業大学高井宏幸教授をはじめ、研究室の方々に深く感謝の意を表する。

文 献

- 1) W. Steiger : Regelungstechnik 5, No. 2 45 (1957)
- 2) 研野 : 機械試験所報 12, 162 (昭33) ; 13, 16, 219, 274, 281 (昭34)
- 3) 細野 : 三菱電機 35, No. 2 35 (昭36)
- 4) 石崎, 石川 : 電気学会雑誌 83-7, No. 898 1201 (昭38)