

# 小型内燃機関の調速に関する研究 (第3報)

(過渡応答について)

本 多 良 辰

## Research on Speed Control of Internal Combustion Engines

(Third Report ..... On Transient Responses)

by Ryōsin HONDA

In a previous paper, the functioning of a speed control system for a small kerosene engine was analysed, and the steady response of the system to change of load was calculated.

In this paper, the transient response of the speed control system to change of load is calculated by a numerical method, and the calculated values are compared with observed values.

### 1. 緒 言

内燃機関の調速性能を判定するうえに、定常応答および過渡応答結果が重要な意味をもつ。ゆえに調速装置の設計、調整にあたっては、これらの結果を予知して最適ゲインを決定することが望まれる。しかしながら内燃機関は気化器の絞り弁、機関の内部抵抗が非線型特性を呈するため、線型理論が適用できず、定常応答や過渡応答を求めることは困難であった。

筆者は既報<sup>1)</sup>において定常応答を数値計算法および図解法で計算することを試み、実験結果とよく一致する結果を得た。本報告では過渡応答を数値解法によって求めた結果について述べる。数値解法はその系に含まれる非線型特性を考慮することができ、計算結果は実験結果にかなり近似し、調速装置の計画あるいは調整に際し定量的判断の資料として役立つと考える。

### 2. 要素方程式

記 号

$x$ : 制 御 量	rpm	$t$ : 経 過 時 間	sec.
$q$ : 操 作 量	kg·m	$L$ : ム 夕 時 間	sec.
$u$ : 外 乱 (負荷トルク)	kg·m	$T_1$ : 調速機時定数	sec.
$\theta$ : 絞 り 弁 偏 位	deg.	$T_2$ : 機 関 時 定 数	sec.
$K_V$ : 絞 り 弁 感 度	kg·m/deg.	$K_4$ : 機 関 の 抵 抗 に 関 する 定 数	rpm/kg·m

$K_1, K_2, K_3, K_\epsilon, K_\phi$ : 調速機に関する各定数

調速系の各要素の動作は

$$\text{調速機} \quad T_1 \frac{d\theta(t)}{dt} + \theta(t) = -K_1 K_3 K_\phi K_\epsilon x(t) \quad (1)$$

$$\text{操作量} \quad q(t) = K_V \theta(t - L) \quad (2)$$

$$\text{機 関} \quad T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K_4 \{q(t) - u(t)\} \quad (3)$$

で表わされ<sup>2)</sup>、3個の方程式が結合して調速動作を表わす。これを回転速度の次元に統一し、整理すれ

ば 
$$T_1 \frac{dx_g(t)}{dt} + x_g(t) = x(t) \tag{1'}$$

$$K_4 q(t) = K x_g(t - L) \tag{2'}$$

$$T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = K_4 \{-u(t) - q(t)\} \tag{3'}$$

となる。ただし

$$\theta = K_\varepsilon K_\phi K_1 K_3 x_g$$

$$K = K_\varepsilon K_\phi K_V K_1 K_3 K_4$$

### 3. 数 値 解 法

#### 3.1 数 値 解 法

一階線型微分方程式の数値解法について検討する。

$$T \frac{dx}{dt} + x = f(t) \tag{4}$$

において

$$f(t) = \begin{cases} 0, & (t \leq 0) \\ C, & (t > 0) \end{cases}$$

なる初期条件が与えられれば、(4)式の解は

$$x = C(1 - e^{-t/T}) \tag{5}$$

となり、指数関数曲線の幾何学的性質<sup>3)</sup>に基づき、微小時間  $dt$  について近似的に次の関係が成り立つ。

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{C - x(t - \Delta t)}{T + \frac{\Delta t}{2}} \tag{6}$$

ここに  $t = n \Delta t$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とする。

$f(t)$  が時間関数的変化をする場合は、第1図で鎖線表示されるように、 $f(t)$  は微小時間  $dt$  ごとに階段状に変化し、 $dt$  時間中一定値を取ると考えれば、 $(t - dt)$  と  $t$  の区間では(4)式は近似的に(7)式で表わされる<sup>4)</sup>。

$$T \frac{dx}{dt} + x(t - \Delta t) \cong f(t - \frac{\Delta t}{2}) = \text{Const.} \tag{7}$$

(7)式に(4),(5),(6)式の関係を用いるとすれば

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{f(t - \frac{\Delta t}{2}) - x(t - \Delta t)}{T + \frac{\Delta t}{2}}$$

となり、

$$x(t) = \Delta x + x(t - \Delta t) = \frac{f(t - \frac{\Delta t}{2}) x - (t - \Delta t)}{T + \frac{\Delta t}{2}} \Delta t + x(t - \Delta t) \tag{8}$$

を得る。

入力がムダ時間  $L$  だけおくれで作用する場合、すなわち  $f(t-L)$  なるときは、(8)式は

$$x(t) = \frac{f(t - \frac{4t}{2} - L) - x(t - 4t)}{T + \frac{4t}{2}} 4t + x(t - 4t) \quad (9)$$

となる。

単容量要素2個よりなる回路の応答を計算する場合は、2個の要素の数値計算式の間時間的ずれが存在すれば計算が容易である。ゆえに前方要素の計算には(8)式を用い、後方要素の計算には  $4t/2$  だけ時間ずれをもたせた次式を用いる。

$$x(t + \frac{4t}{2}) = \frac{f(t) - x(t - \frac{4t}{2})}{T + \frac{4t}{2}} 4t + x(t - \frac{4t}{2}) \quad (10)$$

第1図は  $f(t) = at$  なる場合の(8)、(9)、(10)式による計算値を示す。(8)および(10)式の数値解は理論曲線に対し内接あるいは外接する辺の関係にある。

### 3.2 適用方法

機関に階段状負荷突変を与えた場合の過渡応答を計算するには、次の事項を考慮して上述の諸式を適用する。

(1) 負荷変動に対する応答においては、機関動作が先行し、調速機動作は従属する。ゆえに(3')式の計算には(9)式 (1')式の計算には(10)式を適用する。すなわち

$$u(t) = 0 \quad (t \leq 0), \quad u(t) = -u_0, \quad (t > 0)$$

なる階段状変化に対する応答計算式は次式で与えられる。

$$x(t) = \frac{K_1 \{u_0 - q(t - \frac{4t}{2} - L)\} - x(t - 4t)}{T_2 + \frac{4t}{2}} 4t + x(t - 4t) \quad (11)$$

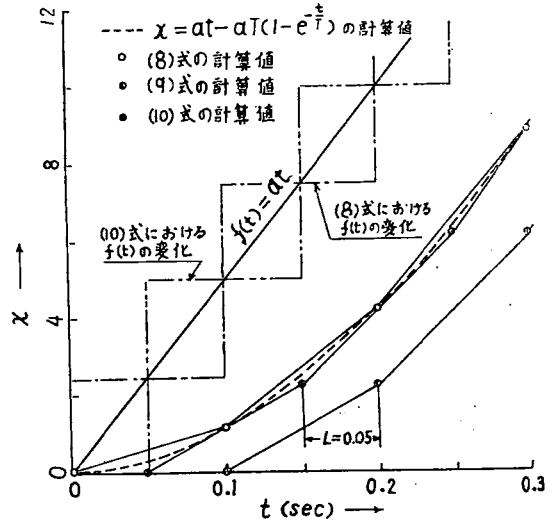
$$x_g(t + \frac{4t}{2}) = \frac{x(t) - x_g(t - \frac{4t}{2})}{T_1 + \frac{4t}{2}} 4t + x_g(t - \frac{4t}{2}) \quad (12)$$

(2) 単シリンダ機関では、 $q$ は機関のサイクル周期  $T_r$  ごとに階段状に変化すると考えられる。ゆえに  $4t$  を  $T_r$  に等しく取るのが妥当である。

(3) 弁偏位と操作トルクの関係を表わす(2)式は、絞り弁特性曲線に従がい第2図のようになる。設定点  $(U_0, \theta_0)$  で  $\theta = 0, q = 0$  であり、 $u = -u_0$  なる変化が与えられると、調速機が動作して絞り弁が偏位し、これに応じて操作トルクは  $U_0$  を基点として負方向に変化する。数値計算を行なうには、 $q$ の値よりもむしろ  $(u_0 - q)$ の値が直接与えられれば都合がよい。第2図に示されるように弁特性線図上において  $u_0 - q = Q$  であることに着目して、(2')式のかわりに次式の関係を用いる。

$$K_1 Q(t) = K_1 \{u_0 - q(t)\} = \Psi \{x_g(t)\} \quad (13)$$

ここに  $\Psi$  は関数記号である。(2')式における  $x_g(t-L)$  のムダ時間  $L$  は(11)式にて考慮する。(13)



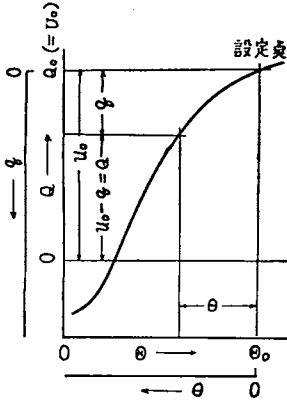
$a = 100, T = 0.4 \text{ sec } 4t = 0.1 \text{ sec}$   
(9)式においては  $L = 0.05 \text{ sec}$  とする

第1図  $T \frac{dx}{dt} + x = f(t)$  の数値計算

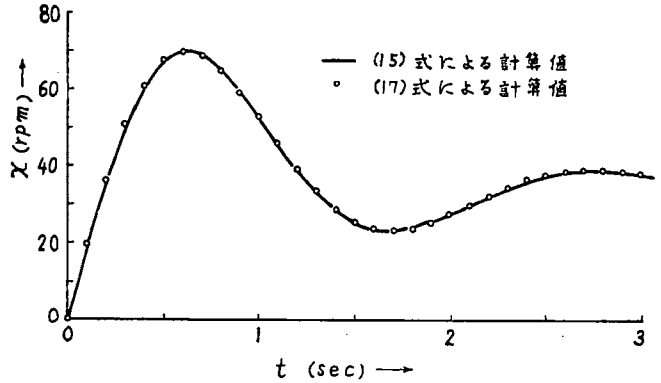
式の関係は絞り弁特性線図と调速機特性線図より求める。

3.3 数値解法の計算精度

(11), (12) 式の数値計算式による計算値と, 调速微分方程式の解による計算値を比較し, 数値解法の計算精度を吟味する。この場合は调速系は線型であるとし, 定数値は第5章の数値計算におけると同じ数値を使用する。



第2図 絞り弁特性線図における  $(u_0 - q)$  と  $\theta$  の関係の説明図



$K_4 u_0 = 650 \text{ rpm}, K = 17.6, T_1 = 0.6 \text{ sec}$   
 $T_2 = 3.3 \text{ sec}, L = 0, \Delta t = 0.1 \text{ sec}$

第3図 数値解法の計算精度の吟味

(1), (2), (3) 式より调速の微分方程式

$$T_1 T_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dx}{dt} + (1 + K)x = -K_4 (T_1 \frac{du}{dt} + u) \tag{14}$$

を得る。これに  $t \leq 0$  にて  $u = 0, t > 0$  にて  $u = -u_0$  なる初期条件を与え, 解を求める。

$$x = K_4 u_0 \left\{ \frac{1}{K+1} + \sqrt{\frac{K}{K+1}} \frac{2 T_1}{\sqrt{4(K+1) T_1 T_2 - (T_1 + T_2)^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right\} \tag{15}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{T_1 + T_2}{2 T_1 T_2}, & \beta &= \frac{\sqrt{4(K+1) T_1 T_2 - (T_1 + T_2)^2}}{T_2 - T_1} \\ \varphi &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{4(K+1) T_1 T_2 - (T_1 + T_2)^2}}{T_2 - T_1} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{4(K+1) T_1 T_2 - (T_1 + T_2)^2}}{-(T_1 + T_2)} \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

(15) 式に  $K_4 u_0 = 650 \text{ rpm}, K_4 = 900 \text{ rpm/kg} \cdot \text{m}, K = 17.6, T_1 = 0.6 \text{ sec}, T_2 = 3.3 \text{ sec}$ , を与えて計算すれば, 第3図に実線で示される応答曲線を得る。

数値解法においては,  $L = 0, \Delta t = 0.01 \text{ sec}$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \frac{650 - K_4 q \left( t - \frac{\Delta t}{2} \right) - x(t - \Delta t)}{3.35} \times 0.1 + x(t - \Delta t) \\ K_4 q(t) &= 17.6 x_g(t) \\ x_g \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) &= \frac{x(t) - x_g \left( t - \frac{\Delta t}{2} \right)}{0.65} \times 0.1 + x_g \left( t - \frac{\Delta t}{2} \right) \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

(17) 式による算計値は第3図に丸印で示される。この値は(15)式による計算値に非常に近似しており, 実用上十分な計算精度を有する。

## 4. 実 験

### 4.1 実 験 装 置

実験には前報に同じく 2.5 HP, 1000 ~ 1400 rpm の小型石油機関を使用した。負荷測定にはブローニ動力計を使用し、摩擦帯締め付けボルトを瞬間的にはずせる機構にして、過渡応答実験を行なった。回転速度の測定には直流発電機式回転計を使用し、また調速機動作測定は電気容量変換法により、両者とも電磁オシログラフで記録した。

### 4.2 実 験 結 果

調速機特性の一例を第4図に示す。x線図は回転速度偏差  $x$  と弁開度  $\theta$  との関係を示し、C線図は回転速度を一定にして弁開度  $\theta$  と有効遠心力  $C$  との関係を求めたグラフである。両線図とも  $\theta = 12^\circ$  付近で折れ非線型様相を呈している。この原因は、フライボールのペルクランクの先端とスリーブの当り面の接触部分が摩耗し、そのため変位および力の伝達に異常を生じたためと考えられる。 $K_2$  の値は  $\theta < 12^\circ$  では 2060 gr/rad.,  $\theta > 12^\circ$  では 750 gr/rad., である。

第5図は気化器の絞り弁の特性を示す。機関を 負荷運転状態から無負荷に突変させた場合、その過渡応答経過中操作トルクが負負荷状態になる場合が生ずる。そのため絞り弁特性を 負負荷位置まで求めておく必要がある。負負荷状態の特性決定にはモータリング法による測定、および過渡応答実験結果より算出する方法の両方法を試みた。

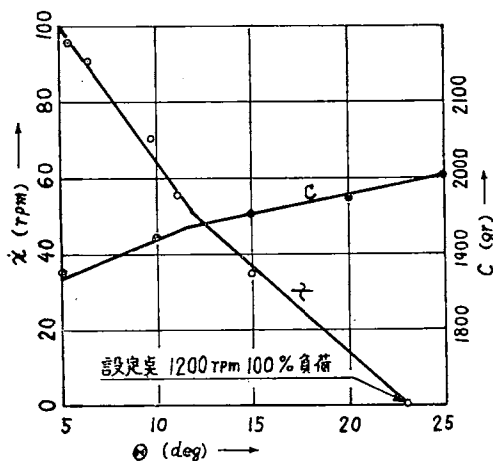
モータリング法による測定には、交流超分巻電動機型動力計を使用し、着火運転状態で0負荷以下に弁開度を絞っていき、動力計の負荷を読みとった。

過渡応答より  $Q$  の値を求めるには 機関動作の数値計算式 (11) 式を使用する。(11), (13) 式より  $(t - \frac{4t}{2} - L)$  時刻の  $Q$  の値は

$$Q = \frac{\frac{dx}{dt} \times \left(T + \frac{4t}{2}\right) + x(t - 4t)}{K_4} \quad (18)$$

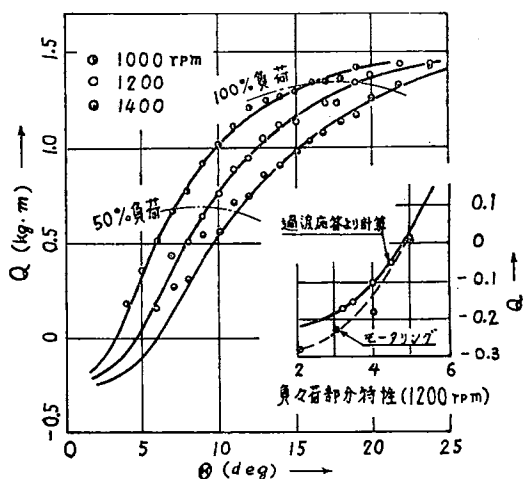
ここに  $\Delta x = x(t) - x(t - 4t)$

で与えられる。



x 線図……調速機静特性  
C 線図…… $\theta$  と  $C$  の関係

第4図 調速機特性 (1200 rpm)

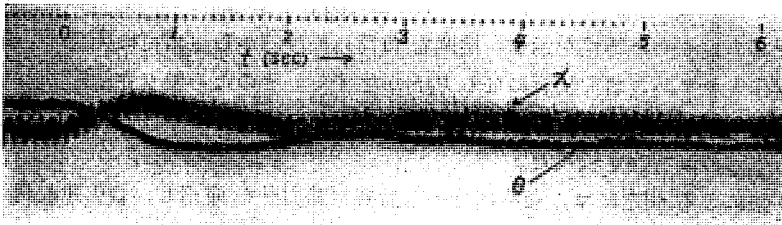


第5図 絞り弁特性

絞り弁開度および回転速度偏差の応答が同時記録されるならば、所要の弁開度  $\theta$  に対応する位置の  $x$  の値を知り (18) 式によって  $Q$  の値を求めることができる。しかし負荷部分の  $K_4$ ,  $T_2$  の値は未知であるから、数種類の回転速度のものについて、最初は  $K_4$ ,  $T_2$  を 0 負荷附近の値に取って計算し  $Q$  の値を求める。この値を用いて機関運転特性線図を引き、この線図より  $K_4$  の値を求めて、 $Q$  の計算をやりなおす。このようにすれば  $Q$  の計算値をかなり実際値に近づけることができる。

第5図右下の図は、1200 rpm における負荷特性を示す。モータリング法による測定値は応答実験より求めた  $Q$  の値より低くでている。モータリング法ではシリンダ、ピストン等が冷却し、内部摩擦抵抗が増大し、また燃焼が完全に中止される。しかし過渡応答状態の場合は短時間の現象であるから機関は高温に保たれ、負荷状態でも燃焼は不完全ながら継続していると考えられる。測定値と計算値の差異はこれらの事項に原因するものであろう。

過渡応答実験例として、1200 rpm に設定し、50% 負荷より 0 負荷に突変させた場合の応答のオシログラフダイヤグラムを第6図に示す。



1200 rpm, 50% 負荷より 0 負荷に突変した場合の応答

第6図 過渡応答実験例

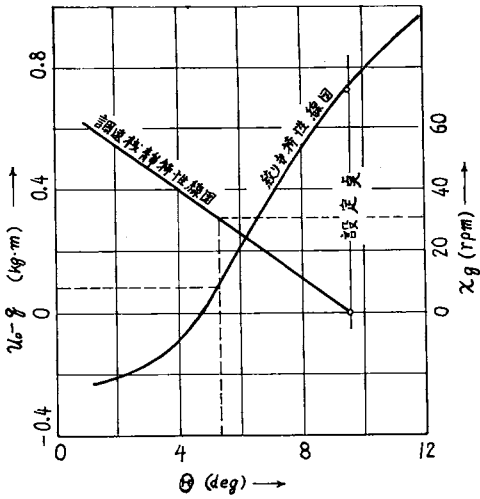
## 5. 計算結果

第4図に示されるように、調速機静特性線図は  $\theta = 12^\circ$  付近で折れ非線型様相を呈している。計算中にこのような折点が含まれると計算結果と実験結果の比較、検討を複雑にする。ゆえにこの折点を避けるため、設定回転数 1200 rpm にて 50% 負荷より 0 負荷に突変させた場合の過渡応答について計算を進める。

(13) 式の関係を求めるには、第7図に示すように 1200 rpm における調速機静特性線図および絞り弁特性線図を引き、 $Q$  と  $x_g$  の対応値を求め  $K_4$  を与えて  $K_4(u_0 - q) \sim x_g$  線図を引く。第8図の a 曲線は  $K_4$  を一定 (= 900 rpm/kg·m) とした場合の  $K_4(u_0 - q)$  の値を示す。機関時定数  $T_2$  の値は本実験用機関では  $T_2 = 0.00368 K_4$  と与えられ、この場合は  $T_2 = 3.3 \text{ sec}$  となる。b 曲線は  $K_4$  の変化を考慮したものである。このときの  $T_2$  の値は  $T_2$  曲線で示される。

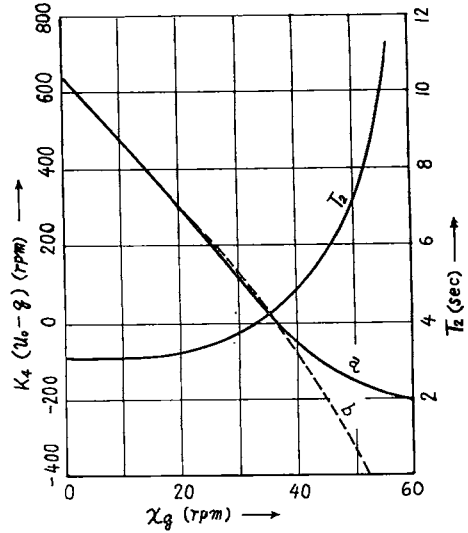
(11), (12) 式および第8図を用いて応答を計算する順序を簡単に述べる。階段状入力  $K_4 u_0$  が加えられると、(11) 式により  $4t$  時間後の回転速度偏差  $x$  が求められる。この  $x$  の値が (12) 式に代入され ( $4t + 4t/2$ ) 時間後の調速機偏差  $x_g$  が求められる。つぎに ( $4t + 4t/2 - L$ ) 時間における  $x_g$  に対応する  $K_4(u_0 - q)$  の値を第8図より求め、(11) 式に代入して  $24t$  時間後の  $x$  の値が求められる。以上のごとく (11), (12) 式の計算を交互に進めていく。この計算は第1表のごとく表によって行なうと便利である。

まず機関の内部抵抗に関する定数  $K_4$  が一定であるとして計算する。 $L = 0.05 \text{ sec}$  にとり、調速機時定数  $T_1$  を 0.5, 0.6, 0.7 sec として計算した過渡応答を第9図 (a) に示す。図において波線は同一条件における実験結果を示す。 $T_1 = 0.7 \text{ sec}$  の応答は初期偏差が実験結果とほぼ等しくなり、初期偏差の近くまでは計算値と実験値は近似しているが、それ以後は両者はかなり違っており、実験結果の方がゆるやかな応答を示す。



設定点 1200 rpm, 50% 負荷

第7図  $(u_0 - q)$  と  $x_g$  の関係を求めるグラフ



a :  $K_4(u_0 - q) \sim x_g$  ( $K_4 = 900 \text{ rpm/kg} \cdot \text{m}$ )

b :  $K_4(u_0 - q) \sim x_g$  ( $K_4 = \text{変数}$ )

$T_2$  :  $K_4$  を変数とした場合の  $T_2$  の値

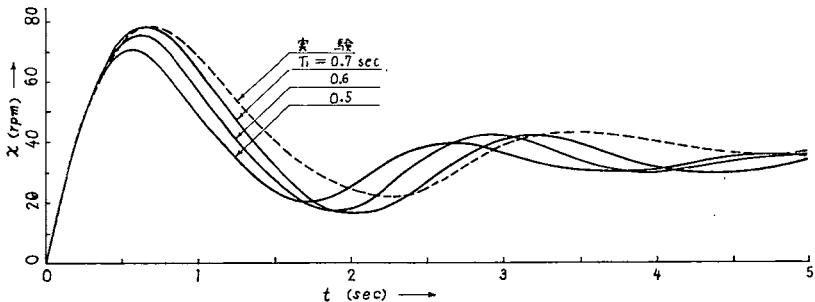
設定点 1200 rpm, 50% 負荷

第8図  $K_4(u_0 - q)$ ,  $T_2$  の値

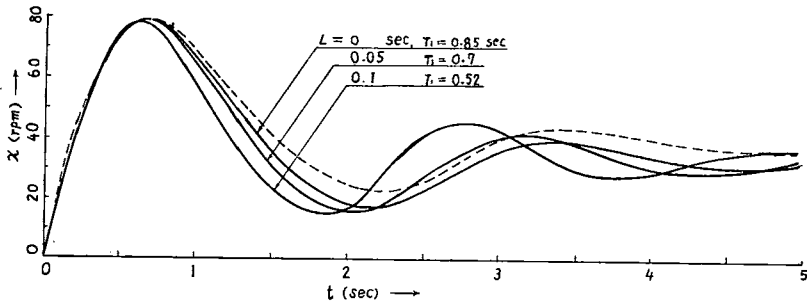
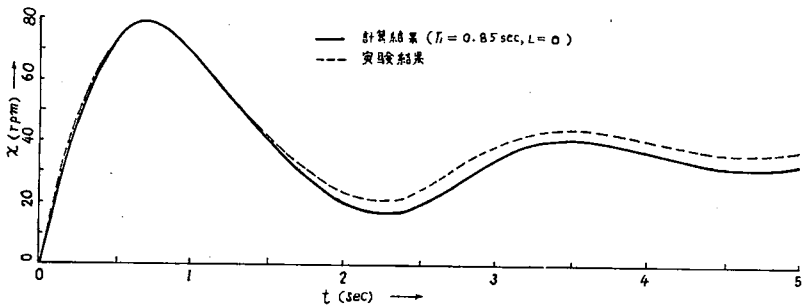
第1表 応答計算表

$T_1 = 0.85 \text{ sec}$ ,  $T_2 = 3.35 \text{ sec}$ ,  $L = 0 \text{ sec}$ ,  $\Delta t = 0.1 \text{ sec}$ , (矢印は計算順序を示す)

$t$ (sec.)	$K_4 Q(t - \frac{\Delta t}{2})$	$K_4 Q(t - \frac{\Delta t}{2}) - x(t - \Delta t)$	$\Delta x$	$x(t)$ (rpm)	$x_g(t - \frac{\Delta t}{2})$	$x(t) - x_g(t - \frac{\Delta t}{2})$	$\Delta x_g$
0	-	-	-	0	-	-	-
0.1	640	640	19.1	19.1	0	19.1	2.1
0.2	610	591	17.7	36.8	2.1	34.7	3.9
0.3	546	509	15.2	52.0	6.0	46.0	5.1
0.4	461	409	12.2	64.4	11.1	53.3	5.9
0.5					17.0		



第9図 (a)  $T_1$  を変えた場合の計算結果 ( $K_4 = \text{一定}$ ,  $L = 0.05 \text{ sec}$ .)

(b)  $L$  を変えた場合の計算結果 ( $K_4 = \text{一定}$ )(c)  $K_4$  の変化を考慮した場合の計算結果

1200 rpm において 50% 負荷より 0 負荷に突変した場合の応答

第9図 過渡応答計算結果

そこで燃料系統のムダ時間  $L$  の影響を検討する。 $L$  を 0, 0.05, 0.1 sec. に取り、初期偏差が実験結果にほぼ等しくなるような  $T_1$  の値を選び計算した結果を第9図(b)に示す。 $L=0$  の応答がもっとも実験結果に近似した傾向を示し、 $L$  が大きくなる程実験結果よりはずれる。筆者はさきに燃料・トルク変換過程を徹視的に考察し  $1/2 \cdot T_T \sim T_T$  程度のムダ時間が存在すると考えた<sup>5)</sup>。しかしこの結果はムダ時間の存在を否定する傾向を示す。燃料系統に時間オクレが存在しても、それは他の現象により相殺されるのでないかと考える。

次に機関の内部抵抗に関する定数  $K_4$  が弁開度により変化する事象を考慮し、第8図b線図、 $T_2$  線図を用いて計算する。第9図(c)は  $T_2 = 0.85 \text{ sec.}$ ,  $L = 0$  として計算した応答を示す。計算結果と実験結果は 1.5 sec. 附近まではよく一致し、それ以後は数値はずれているが、応答の傾向はまったく同一である。定常偏差の不一致は計算に用いたゲインと応答実験時のゲインの差異によるものであろう。

## 6. 結 語

1. 指数関数曲線の幾何学的性質を用いて、過渡応答の数値解法を導き、計算精度を含味して、計算値の信用度が高いことを確かめた。
2. 絞り弁特性曲線の負荷部分の値を過渡応答実験結果より計算する方法を試みた。
3. 負荷突変の際の過渡応答を数値解法により求め、実験結果と比較した。燃料系統のムダ時間  $L$  を 0 とした方が実験結果に近似し、また  $K_4$  の変化を考慮すれば実験結果と合致することを認めた。しかし実用的には  $K_4$  を定数として取り扱ってもさしつかえないと考える。



終りに本研究を行なうにあたり、終始御指導、御鞭撻をたまわった本学成松教授に謝意を表する。

## 文 献

- 1), 2), 5) 本多良辰： 金沢大学工学部紀要, 2-5 (昭 36-12), 296
- 3) 野本, 林 共訳： アイゼルマン原著, 自動制御理論, (昭 33), 189, コロナ社
- 4) Translated by J. S. SHAPIRO, Automatic Regulating Electrical Machines, (by M. V. MEEROV), (1961), 198, London, Butter worths.

(原稿受付 1962年9月30日)